

3次元双曲型空間内の 平均曲率 1 の曲面の双対性とその応用

大阪大・理 梅原雅顕 (Masaaki Umehara)
熊本大・教養 山田光太郎 (Kotaro Yamada)

定曲率 -1 の 3次元双曲型空間の平均曲率 1 の曲面は, 3次元 Euclid 空間の極小曲面と大変よく似た性質をもつことが知られている. たとえば, 3次元双曲型空間の平均曲率 1 の曲面に対しても Weierstrass 表現と類似の表現公式が Bryant によって示された.

本講演では, 3次元双曲型空間の平均曲率 1 の曲面のある種の双対性を用いて 3次元 Euclid 空間の極小曲面に対する Osserman の不等式の類似が成り立つことについてお話ししたい. Osserman の不等式は, 完備極小曲面の全曲率を上から評価する不等式で, Cohn-Vossen の不等式より, エンドの数の 2π 倍だけ強い評価を与える.

このことについて, 以前に我々は Osserman の不等式とほぼ同程度の深さの主張として Cohn-Vossen の不等式の等号が成立しないことの証明を得ていたのであるが, 今回, 「双対性」に気がついたことで, ようやくその双曲版を与えることに成功した. Osserman の不等式の等号条件は, Jorge-Meeks [JM] で決定されているが, その双曲版の等号条件も以前の我々の結果 [UY1] を用いて決定できる.

以後簡単のために, 平均曲率 1 を CMC-1 (constant mean curvature 1 の略) で表すことにする.

1. 3次元 Euclid 空間の極小曲面

まず、極小曲面の Weierstrass 表現に関連した部分について復習する。極小曲面といえは、与えられた針金に石鹸膜を張る、所謂、Plateau 問題の解として、捉えることができるが、これから述べる 3 次元双曲型空間の平均曲率 1 の曲面は極小ではなく石鹸膜の問題とは関係が薄いにもかかわらず不思議とよく似た性質を備えているのである。

M^2 を Riemann 面とし、 $x = (x_1, x_2, x_3) : M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を共形はめ込みとすると、 x が極小となるための必要充分条件は、 x が調和写像となることである。(i.e. $\partial\bar{\partial}x = 0$) いま、 x を極小とすると、この条件から

$$(1.1) \quad \omega := \partial x_1 - i\partial x_2$$

$$(1.2) \quad g := \frac{\partial x_3}{\partial x_1 - i\partial x_2}$$

はそれぞれ、 M^2 上の正則 1-形式、有理型関数となる。対 (g, ω) を Weierstrass data とよぶ。ここで g は、はめ込み x の Gauss 写像と立体射影との合成である。そのため、同一視して、 g 自身を x の Gauss 写像と呼ぶことにする。このとき、 x の第一基本形式 ds^2 および第二基本形式 h は、それぞれ次で与えられる。

$$(1.3) \quad ds^2 = (1 + |g|^2)^2 \omega \cdot \bar{\omega}$$

$$(1.4) \quad h = -\omega \cdot dg - \overline{\omega \cdot dg}$$

ここで、ドットは対称積を表す。上の式で複素化された第二基本形式の $(2,0)$ -part に相当する $Q := \omega \cdot dg$ は、Hopf differential とよばれる。Weierstrass data (g, ω) を用いて、

$$(1.5) \quad x = \operatorname{Re} \left(\int_{z_0}^z (1 - g^2) \omega, \int_{z_0}^z i(1 + g^2) \omega, \int_{z_0}^z 2g\omega \right)$$

なる表示式を得る。(ここで z_0 は M^2 の固定点とする。) 逆に、任意に M^2 上の正則 1-形式 ω と、有理型関数 g で (1.3) が正定値になるものを与えると、一般には経路により積分値が異なるが、 M^2 が単連結のときには、(1.5) によって、共形極小はめ込みがえられる。これを、Weierstrass の表現公式と云う。

ここでは、完備かつ有限全曲率をもつ $\mathbf{R}^3$ の極小曲面について考えたい。共形極小はめ込み x の Gauss 曲率 K は、(1.3) より、

$$(1.6) \quad K = -\frac{4dg \cdot \overline{dg}}{(1 + |g|^2)^4 \omega \cdot \overline{\omega}}$$

で与えられ、特に $K \leq 0$ となる。(このことは、極小曲面の主曲率 λ_1, λ_2 の和が 0 なので K がその積 $K = \lambda_1 \lambda_2$ として表わされることから明らか。) いま、 M^2 上の共形的擬計量 $d\sigma^2$ を $d\sigma^2 := (-K)ds^2$ によって定義すると、(1.6) より、

$$(1.7) \quad d\sigma^2 = \frac{4dg \cdot \overline{dg}}{(1 + |g|^2)^2}$$

と書け、 $d\sigma^2$ は、Gauss 写像 g による球面の標準計量の引き戻しになることがわかる。とくに、 $d\sigma^2$ は定曲率 1 になる。 x が有限全曲率と云う条件は、曲面の $d\sigma^2$ -面積が有限という条件と同値である。このとき全曲率は -4π の整数倍 (g の写像度倍) になることもわかる。次が知られている。

定理 1.1. (Osserman [O]) M^2 を Riemann 面とし、 $x: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を完備かつ有限全曲率をもつ共形極小はめ込みとすると、コンパクトな Riemann 面 $\bar{M}^2$ が存在し、 M^2 は、 $\bar{M}^2$ から有限個の点 $\{p_1, \dots, p_n\}$ を除いたものと正則同値となり、その Weierstrass data (g, ω) は、 $\bar{M}^2$ 上に有理型に拡張される。

上の主張で $\{p_1, \dots, p_n\}$ は極小曲面 x の end に対応する。さらに次が成り立つ。

定理 1.2. (Osserman [O]) M^2 を Riemann 面とし、 $x: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を完備かつ有限全曲率をもつ極小はめ込みとすると、次の不等式が成り立つ。

$$(1.8) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K ds^2 \leq \chi(M^2) - n$$

ここで、 n は end の数、 $\chi(M^2)$ は M^2 の Euler 数を表す。

これは、Cohn-Vossen の不等式より強い主張である。証明の核心は、各エンドにおいて曲面の第一基本量 ds^2 の発散の order が $1/|z|^2$ より大きいことを示す処にある。 ds^2 の order は整数値しかとらないのでこのことから各エンドで 2π の全曲率が稼げるのである。

この不等式の等号条件が次で与えられる。

定理 1.3. (Jorge-Meeks [JM]) 不等式 (1.8) で等号が成り立つのは, x の end がすべて埋め込みであることが必要充分である.

2. 3次元双曲型空間の平均曲率 1 の曲面

3次元双曲型空間の平均曲率 1 の曲面についても, 前節と若干異なるが類似の結果が成り立つ.

L^4 を $(-+++)$ 型の 4次元 Minkowski 空間とすると, その部分多様体

$$H^3(-1) := \left\{ (t, x_1, x_2, x_3) \in L^4; \sum_{j=1}^3 (x_j)^2 - t^2 = -1, t > 0 \right\}$$

の誘導計量は, この上で正定値かつ定曲率 -1 となる. $H^3(-1)$ を 3次元双曲型空間という. ここでは, 4次元 Minkowski 空間 L^4 の各点 (t, x_1, x_2, x_3) を 2次の Hermite 行列

$$(2.1) \quad \begin{pmatrix} t + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & t - x_3 \end{pmatrix} \in \text{Herm}(2),$$

と同一視する. これにより同一視,

$$(2.2) \quad \begin{aligned} H^3(-1) &= \{X \in \text{Herm}(2); \det(X) = 1, \text{trace}(X) > 0\} \\ &= \{a \cdot a^*; a \in SL(2, \mathbb{C})\} \end{aligned}$$

を得る. 3次元双曲型空間をこのように表すと, $PSL(2, \mathbb{C}) := SL(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$ の元 a は対応 $H^3(-1) \ni X \mapsto a \cdot X \cdot a^*$ によって等長的に作用する. (但し $a^* := {}^t \bar{a}$)

$\mathbb{R}^3$ の極小曲面の Weierstrass 表現公式に対応して次の定理が成り立つ.

定理 2.1. (Bryant [B1]) M^2 を単連結なリーマン面とし, g を M^2 上の有理型関数, ω を M^2 上の正則 1 次形式とし, $ds^2 = (1+|g|^2)^2 \omega \cdot \bar{\omega}$ が, 正定値になるとする. z_0 を M^2 の固定点とすると, 以下の条件を満たす正則はめ込み $F: M^2 \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ が一意的に存在する.

$$(1) F(z_0) = \pm id$$

$$(2) F^{-1} \cdot dF = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega$$

(3) $x = F \cdot F^* : M^2 \rightarrow H^3(-1)$ は平均曲率 1 (CMC-1 で表す.) の共形はめ込みで第一基本形式は ds^2 となる.

逆に, M^2 上の共形的 CMC-1 はめ込みは, すべてこのようにして構成される.

正則写像 $F : M^2 \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ は, 条件 (2) から

$$(2.3) \quad \det(F^{-1} \cdot dF) = 0$$

を満たす. この性質をもつ $PSL(2, \mathbb{C})$ への正則写像を null と云う.

定理で与えられる対 (g, ω) を, 極小曲面のときと同様に Weierstrass data と呼ぶことにする. (g のことを, 第二 Gauss 写像と呼ぶが, それは後で定義される双曲的 Gauss 写像 G と区別するためである.) 上の CMC-1 はめ込み x の第二基本形式 h は,

$$(2.4) \quad h = -\omega \cdot dg - \overline{\omega \cdot dg} + ds^2$$

で与えられる. $Q = \omega \cdot dg$ を, x の Hopf differential と呼ぶ. Gauss 曲率を表す式 (1.6) は, CMC-1 曲面でもそのまま成り立ち, とくに CMC-1 曲面も $\mathbb{R}^3$ の極小曲面と同様に非正曲率になる.

以下, 代表的な CMC-1 曲面の例を紹介しよう.

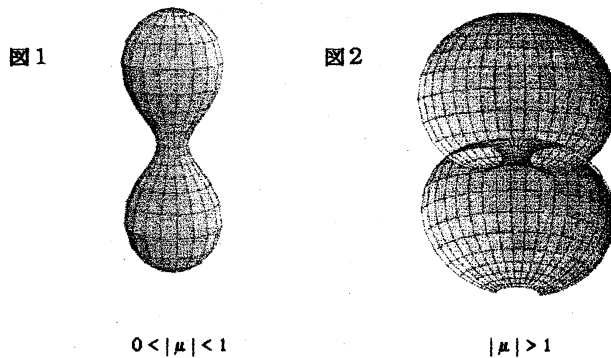
例 2.2. $M^2 = \mathbb{C}$ とし, $g := z$, $\omega := 0$ とおくと, horosphere が得られる. horosphere はもっとも簡単な CMC-1 曲面の例で $\mathbb{R}^3$ の平面と同じ Weierstrass data をもつ.

例 2.3. ([B1]) 同じく $M^2 = \mathbb{C}$ とし, $g := z$, $\omega := dz$ とおくと, Enneper cousin が得られる. Enneper cousin は, $\mathbb{R}^3$ の Enneper 曲面と同じ Weierstrass data をもつ. あとで定義するが, この例は irregular end をもつ典型的な例である.

例 2.4. ([B1]) $M^2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とし,

$$\begin{aligned} g &:= z^\mu \\ \omega &:= \left(\frac{1-\mu^2}{4\mu} \right) z^{-\mu-1} dz \quad (\mu \neq 0, \pm 1) \end{aligned}$$

とおくと, catenoid cousin が得られる. catenoid cousin は, $\mathbf{R}^3$ の catenoid と異なる Weierstrass data をもつ. 単連結でないので, 定理 2.1 が直接適用されないが, 回転不変なので直接曲面の式が決定でき, $x : M^2 \rightarrow H^3(-1)$ が M^2 上 1 価になることがわかる. $z = 0, \infty$ に regular end をもつが, $0 < |\mu| < 1$ の範囲では embedded になる. 図 1, 2 は $H^3(-1)$ の Poincaré モデル上に描いた catenoid cousin の絵である. Gauss 曲率を表す式 (1.6) は, CMC-1 曲面でもそのまま成り立ち, 全曲率は $-4\pi|\mu|$ に等しい. 極小曲面のときと異なり, 一般には全曲率は, 4π の整数倍にならない.



前節の定理 1.1, 定理 1.2 および 定理 1.3 に対応してそれぞれ次の 3 つの定理が成り立つ.

定理 2.5. (Bryant [B1]) M^2 を Riemann 面とし, $x : M^2 \rightarrow H^3(-1)$ を完備かつ有限全曲率をもつ共形的 CMC-1 はめ込みとすると, コンパクトな Riemann 面 $\bar{M}^2$ が存在し, M^2 は, $\bar{M}^2$ から有限個の点 $\{p_1, \dots, p_n\}$ を除いたものと正則同値となり, その Hopf differential Q は, $\bar{M}^2$ 上に有理型に拡張される.

例 2.4 が示すように, $\mathbf{R}^3$ の極小曲面と異なり, 一般には CMC-1 曲面の Weierstrass data (g, ω) は M^2 上 1 価にはならない. しかし, この定理から, Hopf differential は, $\bar{M}^2$ 上にまで, 有理型に拡張できることがわかる. このことから, CMC-1 曲面の場合, Hopf differential が, 特に重要な役割を果たす. 一方, CMC-1 曲面

に関しては、全曲率に関する Osserman の不等式 (1.8) はそのままでは成立せず、すぐあとに述べるが dual な CMC-1 曲面を考える必要がある。完備な CMC-1 曲面 それ自身の全曲率については、次が示される。

定理 2.6. ([UY1]) M^2 を Riemann 面とし、 $x: M^2 \rightarrow H^3(-1)$ を完備かつ有限全曲率をもつ CMC-1 はめ込みとすると、次の不等式が成り立つ。

$$(2.5) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K \, dM < \chi(M^2)$$

つまり、Cohn-Vossen の不等式の等号は成立しない。

これは、最良の評価である。実際、例 2.4 の catenoid cousin に対し $\mu \rightarrow 0$ とすると、全曲率は等号にいくらでも近づけられる。(最後に二つの holosphere に崩壊する。) 一般に、 (M^2, ds^2) を 2 次元完備 Riemann 多様体とし、任意の基点 $p \in M^2$ に対して、

$$i(M^2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A_p(t)}{\pi t^2}$$

とおくと、これは基点 p の取り方によらない。(ここで $A_p(t)$ は点 p を中心とする半径 t の測地円板の面積とする。) Cohn-Vossen の等号条件は、 $i(M^2) = 0$ で与えられる。([Sh]) 上の不等式は完備 CMC-1 曲面について、 $i(M^2) > 0$ が成り立つことを意味する。

ここで、3 次元双曲型空間のもう一つのモデルとして Poincaré モデルを紹介しよう。 $\mathbf{R}^3$ の原点を中心とする半径 1 の開球に

$$(2.6) \quad ds^2 := \left(\frac{2}{1 - \sum_{j=1}^3 (x^j)^2} \right)^2 \sum_{j=1}^3 (dx^j)^2$$

によって、定曲率 -1 の Riemann 計量が入る。これは、Minkowski 空間の部分多様体としての双曲型空間の南極からの立体射影の像として得られ、Poincaré モデルと呼ばれる。3 次元双曲型空間の理想境界は、このモデルでは、半径 1 の球面として実現される。

重要な概念である双曲的 Gauss 写像はこの Poincaré モデルを用いて以下のように定義される。 $H^3(-1)$ の曲面上の各点 p から、法線方向に測地線を伸ばし、理想境界 S_∞^2 との交点を $G(p)$ と定める。 G を双曲的 Gauss 写像と云う。

$x: M^2 \rightarrow H^3(-1)$ が、完備かつ有限全曲率をもつ CMC-1 はめ込み のときには、 S_∞^2 を立体射影によって、 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と同一視すると、 G は有理型関数となる。定理 2.1 で定まる正則写像 F を用いれば、 G は次のように簡明に表される。

$$(2.7) \quad G = \frac{dA}{dC} = \frac{dB}{dD}$$

但し、

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

とする。このとき、極小曲面の Gauss 写像とは異なり、双曲的 Gauss 写像 G は、 $\bar{M}^2$ にまで有理型に拡張されるとは限らない。定理 2.5 において、 p_j が G の高々極になっているとき、 p_j を regular end と呼び、真性特異点になっているとき、irregular end と呼ぶ。次が成り立つ。

補題 2.7. ([B1]) *end p_j が regular であるための必要充分条件は、Hopf differential Q が、 p_j で高々 2 位の極しかをもたないことである。*

特に、例 2.2 と例 2.4 は共に、regular end をもち、例 2.3 の場合は、irregular end をもつ。Poincaré モデルで、regular end を描くと、理想境界に接することが知られている。([UY1])

$\mathbb{R}^3$ の極小曲面の場合、各 end の embeddedness が Osserman の不等式 (1.8) の等号条件で与えられた。これに対応する定理を紹介しよう。与えられた CMC-1 はめ込みに対し、その双曲 Gauss 写像 G と第二 Gauss 写像 g とを入れ換えた、CMC-1 はめ込み $x^\#$ が存在し、元の CMC-1 はめ込みの dual と呼ばれる。その具体的な構成方法は簡単であり、以下の手順で構成される。

定理 2.1 で述べたように、与えられた CMC-1 はめ込み $x: M^2 \rightarrow H^3(-1)$ に対して、null 正則はめ込み $F: \widetilde{M}^2 \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ が存在して $x = FF^*$ と表すことができる。ただし $\widetilde{M}^2$ は M^2 の普遍被覆である。ここで、 F の逆行列 $F^{-1}: \widetilde{M}^2$ も null 正則はめ込みになることに注意すると、再び定理 2.1 により

$$x^\# := (F^{-1}) \cdot (F^{-1})^*: \widetilde{M}^2 \rightarrow H^3(-1)$$

は CMC-1 はめ込みになる。簡単な計算により $x^\#$ の双曲的 Gauss 写像は定理 2.2 の (2) 式に現れる第二 Gauss 写像 g に一致し、 G は $x^\#$ の第二 Gauss 写像になり、符号を換えた $-Q$ がその Hopf differential となる。

この構成からわかるように dual CMC-1 はめ込み $x^\#$ は元の曲面上で一価になるとは限らないが、第一基本形式は一価となり、その全曲率を考えることができる。次の定理が成り立つ。

定理 2.8. ([UY5]) M^2 を Riemann 面とし、 $x: M^2 \rightarrow H^3(-1)$ を完備な CMC-1 はめ込みとする。 x の dual CMC-1 はめ込み $x^\#$ の Gauss 曲率を $K^\#$ とすると、次の不等式が成り立つ。

$$(2.8) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K^\# ds^{\#2} \leq \chi(M^2) - n$$

ここで、 n は end の数、 $\chi(M^2)$ は M^2 の Euler 数を表す。さらに、等号は、もとの CMC-1 はめ込み x の end がすべて regular で embedded のとき、そのときに限り成立する。

証明の最初の核心は、Osserman の不等式のときと同様各エンドにおいて曲面の第一基本量 ds^2 の発散の order が $1/|z|^2$ より大きいことを示す処にある。この議論は既に [UY1] において定理 2.6. の証明で示されている。第二の核心は ds^2 の order は整数値とは限らないが双対曲面の第一基本量 $ds^{\#2}$ の order は整数値となり、しかも各エンドにおいて ds^2 の order が $1/|z|^2$ より大きいことと $ds^{\#2}$ の order もそうなることが同値になることである。

また等号条件については、やはり論文 [UY1] において CMC-1 はめ込み x の end がすべて regular で embedded になるための必要充分条件をすでに決定していたので、それがこの不等式の等号条件に一致することを確かめたものである。この意味では、以前 [UY1] で示した結果を今回、見つけた双対曲面の言葉に翻訳したのが、上の定理と云えなくもない。

CMC-1 曲面の双対性については、もう一つ応用があり、これを用いて、Euclid 空間に対称性の高い極小曲面をその対称性を保存したまま CMC-1 曲面に変形する一般的手段をあたえることが示されている。([RUY])

一方, irregular end をもつ CMC-1 曲面は, コンピュータ・グラフィックスにより embedded にならないことが, 予想されるが, 現在のところ未解決である. また, 双対性とは関係ないが, 最近 W. Rossman 氏 [R] は極小曲面の Bernstein の定理の CMC-1 版の証明を得たようである.

参考文献

- [B1] R. Bryant: *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, Astérisque 154-155(1987), 321-347.
- [JM] L. P. M. Jorge and W. H. Meeks, III: *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*, Topology 22(1983), 203-221.
- [O] R. Osserman: *Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n* , Ann. of Math. 16(1965), 340-364.
- [R] W. Rossman: *A Bernstein Theorem in Hyperbolic Space*, Preprint.
- [RUY] W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada: *Irreducible CMC- c surfaces in $H^3(-c^2)$ with positive genus*, Preprint.
- [Sh] K. Shiohama: *Total curvatures and minimal areas of complete open surfaces*, Proc. Amer Math. Soc. vol 94 94(1985), 310-316.
- [UY1] M. Umehara and K. Yamada: *Complete surfaces of constant mean curvature one in the hyperbolic 3-space*, Ann. of Math. 137(1993), 611-638.
- [UY2] M. Umehara and K. Yamada: *A parametrization of the Weierstrass formulae and perturbation of some complete minimal surfaces in $\mathbf{R}^3$ into the hyperbolic 3-space*, J. reine angew. Math. 432(1992), 93-116.
- [UY4] M. Umehara and K. Yamada: *A construction of surfaces of constant curvature c in $H^3(-c^2)$ with prescribed hyperbolic Gauss map*, Preprint.

- [UY5] M. Umehara and K. Yamada: *Dual CMC-1 surfaces and a hyperbolic correspondence of the Osserman's inequality*, Preprint.