

ある無限多値論理とパターンの特徴づけ について

中 村 昭 (広大工学部)

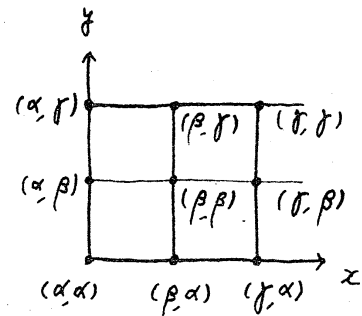
§0 まえがき

最近 cellular automata とか tessellation automata 等によつて, パターンの生成とその特徴づけなど興味ある topics が研究されている。よく知られている様に, これらの automata は (少く大まかにいって) 何々の automaton のある space での無限個の配列を与え, これらを global に考えればそれと等しい。

ところで, 一階の述語論理における論理式の universal validity (又は satisfiability) は $\{0, 1\}$ (但し 0 は偽, 1 は真を示す) の $\{0, 1\}$ space における配列の方法がある条件を満足する様に与えられるかどうかが問題と与えられる。例えば, x, y は individual variables とし, 論理式 $F(x, y)$ の $D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ における truth-

value のすべてのとり方は、次の様な各真における truth-value に対応する。

この場合、上の配列
を global に考えて、
それらを truth-value と
すれば、ある種の多値論理



が構成される。述語論理式の universal validity は、Löwenheim-Skolem の定理によ、 $\aleph_1$ 可算無限個の domain を考えればよいから、上の様な配列全体 (パターン) と一つの truth-value と (1 対 1) 対応、ある無限多値論理が、述語論理に対応して構成されることになる。(この様な無限多値論理について undecidability が [1] で示されたが、われわれはここではこの種の論理をからみ除く)

(注) 述語論理の decision problem とパターン認識との関係から考え、いくつかの unsolvability に関して、組合せ数学として面白い Domino ゲームの問題が [2], [3], [4] で H. Wang 等によって示されている。Domino ゲームとは、次の問題である。いま、大きさ (縦横) が同じで各辺に色がついている有限種類の正方形を考える。そしてこれらの正方形は無限個あるとして、それらを使って有限平面の全平面が埋められるかどうかとい

う問題を考える。ただし正方形を回転したり裏返しにしたりしないで、辺の色は隣の正方形の辺の色と同じとする。この問題の recursive unsolvability が, Turing Machine の halting problem を使って証明され、述語論理のある type の wff の決定不能問題との関係が [23] [33] [24] にくわしくのべてある。

さて、この報告の目的は、上でのべた様な意味である space での $\{0,1\}$ の配列を global に考え、そのパターンを truth-value と考えた無限多値論理系を定義し、その decision problem とが complete な公理系 (特徴づけ) 等を論ずる事である。(この様な抽象的な話が、実際の工学的問題に果(て)どの様な役割を演ずるか、わかんないんだが——。)

31 Truth-value と truth-value function

いま、 N を自然数として $\Omega = \{0,1\}$ とする。このとき、次の mapping を考える。

$$f: N \rightarrow \Omega$$

$$g: N \times N \times N \rightarrow \Omega^N$$

上の g を truth-value と定義する。勿論、これは無限多値

である。いま $N \times N \times N \ni (x, y, z)$ をとり、これを座標とし、
 x, y, z をそれぞれ x 座標, y 座標, z 座標 としう。
 次に logical operations と $(\neg, X, Y, Z, \exists x, \exists y, \exists z, \exists t, \wedge \text{ 及び } \vee)$ をとり、それらの truth-value functions を次の様に定義する。

いま $f(\lambda) = *_{\lambda}$ と $g(x, y, z) = \bigvee_{xyz}$ と表わす。
 $\exists$ は (明らかに $*_{\lambda} \in \Omega, \bigvee_{xyz} \in \Omega^N$ のとき、

X : wff ϕ が $N \times N \times N \ni (i, j, k)$ で値 v_{ijk} をとれば、
 $X \phi$ は あらゆる (i, y, z) ($y, z = 1, 2, 3, \dots$) で
 v_{ijk} をとる。

Y, Z : X と同じ様に (て) 定義される。

$\vee, \neg$: Truth-value の成分である $0, 1$ に (関) して
 普通の方法で定義される。

$\exists x$: f, g を固定して $N \times N \times N \ni (x, f, g)$ を考え、
 wff ϕ が (a, f, g) で値の中 $*_{\lambda}$ が 1 である場合 a があれば、 $\exists x \phi$ は あらゆる
 (x, f, g) ($x = 1, 2, 3, \dots$) の値の中 $*_{\lambda}$ は 1 である。

$\exists y, \exists z$: $\exists x$ と同じ様に (て) 定義される。

$\exists t$: あらゆる $g(x, y, z)$ に対して

$$\exists t g(x, y, z) = \begin{cases} \text{すべからず } *_{\lambda} (\lambda = 1, 2, 3, \dots) \text{ は } 1 \\ \text{(ある } \lambda \text{ に対して } *_{\lambda} = 1 \text{ のとき)} \\ \text{すべからず } *_{\lambda} (\lambda = 1, 2, 3, \dots) \text{ は } 0 \\ \text{(すべからず } \lambda \text{ に対して } *_{\lambda} = 0 \text{ のとき)} \end{cases}$$

上で考えた truth-value のうちで、あらゆる (x, y, z) のすべての $*_{\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, 3, \dots$) が 1 であるものを designated value という。そして wff ϕ が、その中にあらわれる propositional variables $P_1, P_2, \dots, P_n$ の truth-value のとりかたにかかわらず、つねに designated value をとるとき、 ϕ は valid であるという。

§2 Decision Problem

§1 で述べた infinitely many-valued logic L として、その論理系で wff ϕ が valid であるかどうか判定する決定問題について考える。

(注) N の代わりに自然数の有限集合 M として、

$$f: M \rightarrow \Omega$$

$$g: M \times M \times M \rightarrow \Omega^M$$

であるような g を truth-value とすれば、これは有限多値論理になって、決定問題は無意味になる。Domino の問題も有限部分を埋めつくすかどうかといふのは、無意味になる。

この決定問題をしらべるために、上で定義した論理系 L と、一階の述語論理との関係をおいておく。さて, Surányi Reduction Theorem によれば、次の性質が成立する。

定理 述語論理の wff のに対し、次の形の wff $\mathcal{L}_e$ を、
つくる事ができる。

$$(I) (\exists x)(\exists y)(\exists z) M_1 \vee (\exists x)(\exists y)(z) M_2$$

ただし、 M_1, M_2 は quantifier-free であり、monadic
と dyadic predicates だけを含む。更に、 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}_e$ は uni-
versal validity に属（す）る等値である。

以下、述語論理の任意の wff $\mathcal{L}$ に対し、(I) の形の wff
を $\mathcal{L}^*$ で表わす事にする。いま述語論理 $\mathcal{L}$ の wff $\mathcal{L}^*$ と
そのあらゆる subformula $\mathcal{F}$ に対し、 $h(\mathcal{F})$ を次の
定義される $\mathcal{L}_e$ の wff とする。

(i) $\mathcal{F}$ が monadic predicate $F(x)$ ならば¹⁾
 $h(F(x)) = (\exists_t) X F.$

(ii) $\mathcal{F}$ が dyadic predicate $G(x, y)$ ならば¹⁾
 $h(G(x, y)) = (\exists_t) (X G^1 \wedge Y G^2).$

(iii) $\mathcal{F}$ が logical operation $\neg$ は quantifier を含むとき
は、

$$h(\neg \mathcal{F}_1) = \neg h(\mathcal{F}_1)$$

$$h(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) = h(\mathcal{F}_1) \vee h(\mathcal{F}_2)$$

$$h((\exists x) \mathcal{F}_1) = \exists_x h(\mathcal{F}_1)$$

$$h((\exists y) \mathcal{F}_1) = \exists_y h(\mathcal{F}_1)$$

¹⁾ $F(y), G(y, z)$ 等も同様である

$$h((\exists z) \gamma_i) = \exists_z h(\gamma_i)$$

$$\begin{aligned} \text{例えば } h((\exists x)(\exists y)(\exists z)(F(x) \& G(x, z))) \\ = \exists_x \exists_y \exists_z (\exists_t (x F \wedge \exists_t (x G' \wedge z G''))). \end{aligned}$$

以後、われわれは $h(\alpha^*)$ を $\tilde{\alpha}^*$ と表わす。 $\tilde{\alpha}^*$ は L の wff である。

このとき、次の定理が成立する。

定理1 $\tilde{\alpha}^*$ が L で valid ならば、 α^* は K で universally valid である。

定理2 α^* が K で universally valid ならば、 $\tilde{\alpha}^*$ は L で valid である。

この定理1, 2の証明は、さうである事に(2, 上の定理から L の決定問題は unsolvable である事がわかる。なぜならば、いま L の decision problem が recursively solvable であるとする。(たが、2, L における任意の wff $\tilde{\alpha}^*$ が valid かどうかを決定する effective procedure がある。このとき定理1, 2から K における wff α^* が universally valid かどうかを判定する effective procedure を持つ事になり、述語論理の決定問題が recursively solvable になる。これは矛盾である。

§3 定理1, 2の証明

そこで、定理1に equivalent な定理1'を証明する。

定理1' $\mathcal{U}^*$ が K で universally valid でなければ、 $\mathcal{U}^*$ は L で valid でない。

(証明)

Löwenheim-Skolem の定理によれば、 K における wff ϕ は、それが ある enumerable infinite domain ω において valid であるならば、一般に universally valid である。

したがって、定理の仮定から $\mathcal{U}^*$ は適当な truth-value assignment によつて ω 上で F (falsity) となる。いま、 ω の元を $e_1, e_2, e_3, \dots$ とし、 $\mathcal{U}^*$ に与えられる述語を

$$(II) \quad F_1(x), F_2(x), \dots, F_\alpha(x), \dots; F_1(z), F_2(z), \dots, F_\alpha(z) \\ G_1(x, x), \dots, G_\beta(x, x), \dots; G_1(z, z), \dots, G_\beta(z, z)$$

とする。

さて、 $\mathcal{U}^*$ は ω 上で F な ϕ (ある述語(II)の truth-value assignment を与える。それをいま次で与え、 ϕ とする。

$$(III) \quad \begin{array}{llll} F_1(e_1) : T & F_2(e_1) : F & \dots & F_\alpha(e_1) : T \\ F_1(e_2) : T & F_2(e_2) : T & & F_\alpha(e_2) : F \\ & \vdots & & \\ G_1(e_1, e_1) : T & G_1(e_2, e_1) : F & \dots & \end{array}$$

) これらの述語は実際に $\mathcal{U}^$ の中に与えられるとしよう。なぜなら ϕ は $F_1(x)$ が M_1 に M_2 に与えられるならば $(\exists x)(\exists y)(\exists z) M_1$ に equivalent な $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(M_1 \& F_1(x) \vee F_1(y))$ を与えられる。

$$G_1(e_1, e_2): T \quad G_1(e_3, e_2): T$$

⋮

$$G_\beta(e_1, e_1): T \quad G_\beta(e_3, e_1): F \quad \dots$$

$$G_\beta(e_1, e_2): F \quad G_\beta(e_3, e_2): T$$

⋮

この truth-value assignment から、それぞれは L における次の様な truth-value assignment を与える。
まず、 K における $\top, F \in L$ の $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $f(\lambda) = 1$ である f (以下 f' と記す。) と $\forall \lambda \in \Lambda$ に対して $f(\lambda) = 0$ である f (以下 f° と記す。) と対応させる。そして $(\tau, e_1, e_2, \dots) \in N \times N \times N$ の $(1, 1, 1), (2, 2, 2), \dots$ とそれぞれ対応させる。

さて、 $\tilde{\mathcal{U}}^*$ における $F_1, F_2, \dots, F_\alpha$ には、次の truth-value を与える。即ち $\forall (III)$ で $F_\alpha(e_j)$ が $\top$ (又は F) ならば F_α は (f, f', f) で f' (又は f°) とする。この場合 F_α の $v_{11}, v_{22}, \dots$ 以外の v_{xy2} は任意とする。この事は、明らかに何時も可能である。

次に $\mathcal{U}^*$ の $G_1, G_2, \dots, G_\beta$ に対応する $\tilde{\mathcal{U}}^*$ の $G_1^1, G_2^1, \dots, G_\beta^1, G_1^2, G_2^2, \dots, G_\beta^2$ について与える。もし $(G_\alpha(e_1, e_1))$ が (III) で $\top$ ならば、それぞれは G_α^1 は $(1, 1, 1)$ で $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots)$ とし、 G_α^2 は $(1, 1, 1)$ で $(\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3, \dots)$ とし、それ

によ, $\exists t (G_i' \wedge G_i^2)$ が f' である様に, $\tau_i, \tau_i' (\in \Omega)$ を与える。又 $G_i (e_1, e_2)$ が (III) で $\top$ ならば, G_i' は (1,1) での $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots)$ をとり, G_i^2 は $(2, 2, 2)$ での $(\tau_1'', \tau_2'', \tau_3'', \dots)$ をとり, それによ, $\exists t (G_i' \wedge G_i^2)$ が f' である様に $\tau_i, \tau_i'' (\in \Omega)$ を与える。そしてこの事を繰り返して行く。この場合も $(G_i (e_k, e_l))$ が (III) で $\top$ を与えれば, (k, k, k) における G_i' の値 $(\tau_1^{(k)}, \tau_2^{(k)}, \dots)$ と (l, l, l) における G_i^2 の値 $(\tau_1^{(l)}, \tau_2^{(l)}, \dots)$ で $\exists t (G_i' \wedge G_i^2)$ は f' を与えるようにする。この様な値を $N \times N \times N$ の空間上の $(1,1,1), (2,2,2), \dots$ に対して $G_i', G_i^2, \dots, G_i^p; G_i^2, \dots, G_i^p$ に対しても与える。ただ (上の座標以外の点に対しては任意である。この事は, f は $(*, *, \dots)$ の如く 0, 1 の無限数列であるから何時も可能である。

例えは G_i が次の様な truth-value assignment を与えるとする。

- ① $G_i (e_1, e_1) : \top$ ② $G_i (e_2, e_1) : \top$ ③ $G_i (e_3, e_1) : \top$
 ④ $G_i (e_1, e_2) : \top$ ⑤ $G_i (e_2, e_2) : \top$ ⑥ $G_i (e_3, e_2) : \top$
 ⑦ $G_i (e_1, e_3) : \top$ ⑧ $G_i (e_2, e_3) : \top$ ⑨ $G_i (e_3, e_3) : \top$

ここで, ①, ③, ⑤, ... は $\top$ に, ②, ④, ⑥, ... は $\bot$ である事を示す。

この 1) に対しては、次の 2) を考えればよい。

$$\begin{aligned}
 & G_{i_1}^1(e_1): (1, 0, 1, *, *, \dots) \quad G_{i_1}^2(e_1): (1, 0, 0, \dots) \\
 2) \quad & G_{i_1}^1(e_2): (0, 0, 0, 0, 1, \dots) \quad G_{i_1}^2(e_2): (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \dots) \\
 & G_{i_1}^1(e_3): (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \dots) \quad G_{i_1}^2(e_3): (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \dots) \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

ここで、 $G_{i_1}^j(e_k)$ ($j=1, 2$) は $G_{i_1}^j$ の (k, k, k) における値を意味する。又 1) において $\mathbb{T}$ とする番号 ① ③ $\dots$ に対応して、それぞれの値が ①番目、③番目で 1 となる、となる。

さて、enumerable infinite domain N においては、 $(\exists x)$, $(\exists y)$, $(\exists z)$ は x -座標、 y -座標、 z -座標における infinite disjunction と解釈される。例えば $\exists x) \exists y) \exists z) F(x, y, z)$ は $\exists x) \exists y) \exists z) (F(x, y, z) \vee F(x, y, z) \vee \dots)$ 。そして $F(e_1, e_2)$ が述語 $F(x, y)$ の $\rightarrow$ の truth-value であれば、それは $N \times N \times N$ の $(1, 2, 2)$ の value を表わす事か、 x, y, z の定義からわかる。($F(e_1, e_2)$ が $F(y, x)$ の truth-value であれば、それは $(2, 1, 2)$ の値になる。)

(したがって、上で与えた truth-value assignment と $\tilde{\sigma}^*$ のつくり方と、更に N における quantifier の解釈から、わめかれは $\tilde{\sigma}^*$ は L で valid でない事が

わかる。

Q. E. D.

次に、定理2に equivalent な定理2' を証明する。

定理2' $\tilde{\sigma}^*$ が L で valid でなければ、 σ^* は L で universally valid でない。

(証明)

まず、 $\tilde{\sigma}^*$ の形は、 $\exists x \exists y \exists z \tilde{M}_1^* \vee \exists x \exists y \exists z \neg \tilde{M}_2^*$ である事に注意する。たゞし $\tilde{M}_1^*, \tilde{M}_2^*$ は、それぞれ $h(M_1), h(M_2)$ を表わす。(たゞ、 $\neg$ 、定理の仮定から $\tilde{\sigma}^*$ における propositional variables $F_1, F_2, \dots, F_\alpha, G_1', \dots, G_\beta', G_1^2, G_2^2, \dots, G_\beta^2$ に適当な値を与えれば、 $\tilde{\sigma}^*$ はあらゆる $(x, y, z) \in N \times N \times N$ に対して f° をとり得る事になる。

さて、 f°, f' に F, T を対応させてやる。そして、 $N \times N \times N \ni (i, j, k)$ における値のみを考える。(i=1, 2, 3, ...) 以下、仮定を満足する truth-value assignment が次の形であるとす。

$$F_1(e_1): (t_{111}, t_{112}, \dots) \quad F_2(e_1): (t_{211}, t_{212}, \dots) \quad \dots$$

$$F_1(e_2): (t_{121}, t_{122}, \dots) \quad F_2(e_2): (t_{221}, t_{222}, \dots)$$

⋮

$$G_1'(e_1): (\tau_{111}', \tau_{112}', \dots) \quad G_1^2(e_1): (\tau_{111}^2, \tau_{112}^2, \dots)$$

$$G_1'(e_2): (\tau_{121}', \tau_{122}', \dots) \quad G_1^2(e_2): (\tau_{121}^2, \tau_{122}^2, \dots)$$

⋮

$F_1 \in (1, F_1(e_1), F_1(e_2), \dots)$ は $(1, 1, 1), (2, 2, 2), \dots$ にあたる F_1 の値を表わす。

このとき, individual domain $\omega \in (1, (1, 1, 1), (2, 2, 2), \dots)$ とする。そこで述語 $F_f(x)$ の $x = (x_1, x_2, x_3)$ にあたる truth-value $\in (1, 1)$ 上の $F_f(e_i)$ から得られる $\exists_t X F_i$ とする。又述語 $G_f(x, y)$ の $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ での truth-value $\in (1, 1)$ 上の $G_f^1(e_k), G_f^2(e_k)$ から得られる $\exists_t (X G_f^1 \wedge Y G_f^2)$ とする。他に ω についても同様にする。このとき, X, Y, Z の定義と $h(F_f(x)) = \exists_t X F_f$, $h(G_f(x, y)) = \exists_t (X G_f^1 \wedge Y G_f^2), \dots$ から $\mathcal{O}^*$ は enumerable infinite domain ω で f^0 とする。即ち $\mathcal{O}^*$ は $\mathbb{N}$ と同値であることがわかる。よって定理 2' をいう。

Q. E. D.

34 Truth-value の拡張

さて, 無限多値命題論理 L の undecidability が前節で示されたが, これを特徴づける事と考える。特徴づけとして, L はその generation rule とする事と解釈(2)おく。(例えば, ある言語が context-free grammar によらず, あるいは context-sensitive grammar によらず生成されると特徴づけられる様々。) とするが, この

事は多値論理といふよりむしろ、この公理化に他ならない。
 とすることで、 L を公理化するよりも、ある意味で述語論理に
 equivalent な多値命題論理を公理化（ L が論理と
 して意味ある、という）な application があるかも
 （ある）。とすることで、前節までを参照（ L は、Swamy
 の Reduction Form を使ったから $g: N \times N \times N \rightarrow \Omega^N$
 の如き三次元の関数を使う。一般に K の wff は
 individual variables と（これは $x_1, x_2, \dots$ の可算無
 限個の中が「使う」のであるから（ x, y, z 等は K では使わ
 ないとする。）前節で示したものを無限次元に拡張（

$$g: \prod_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} N_i \rightarrow \Omega^N$$

を考える。そして $(\prod_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} N_i) \ni (x_0, x_1, x_2, \dots)$ の x_i は
 i -変数標という。

いま、 g の各成分の上 K を ω として g とかき、
 $g \mapsto g^\omega$ の形に、おもしろい truth-value と考える。
 さて、 ω は truth-value の Ω に、logical operations
 $X_1, X_2, \dots, \vee, \neg, \exists_1, \exists_{x_2}, \dots, \exists_t$ に対応する ω の
 truth-value functions を定義する。

$$(1) \quad X_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots) :$$

wff の ω が g であるならば、 X_ν の ω は β_3 の X の

に対応する value をとり (この場合 x_0 -座標 を考え
る。) x_0 上に w の記号を持つ。又 w が $\bar{g}$ となる
ならば、 x_0 は上と同じ value をとり、 x_0 上に w
の記号を持つ。

- (2) $\vee$: $\alpha \vee \beta$ で α が $\bar{g}_\alpha$, β が $\bar{g}_\beta$ ならば、
 $\alpha \vee \beta$ は普通の $\bar{g}_\alpha \vee \bar{g}_\beta$ 。又 α, β のうち
なくとも一つが $\bar{g}_\alpha$ ならば、 $\alpha \vee \beta$ は $x_0 \bar{g}_\alpha \vee \bar{g}_\beta$
となる。(α が $\bar{g}_\alpha$ の場合、他も同様) $\bar{f} = \bar{f}'$ ($\bar{f}$ は $x_0 \bar{g}_\alpha$ は $\bar{g}_\alpha$ に x_0 を施した値とする。

- (3) $\neg$: $\neg \alpha$ で α が $\bar{g}_\alpha$ ならば、 $\neg \bar{g}_\alpha$ 。又 α が
 $\bar{g}_\alpha$ ならば $x_0 \bar{g}_\alpha$ となる。

- (4) $\exists x_0$: $\exists x_0 \alpha$ で α が $\bar{g}_\alpha$ ならば、 $\exists x_0 x_0 \bar{g}_\alpha$ 。
又 α が $\bar{g}_\alpha$ ならば $\exists x_0 \bar{g}_\alpha$ 。

- (5) $\exists t$: $\exists t \alpha$ で α が $\bar{g}_\alpha$ ならば、 $\exists t x_0 \bar{g}_\alpha$ 。又
 α が $\bar{g}_\alpha$ ならば $\exists t \bar{g}_\alpha$ となる。

いま、 α が $\bar{f}$ の成分が $\bar{f}'$ で x_0 上に w が、 $\dots, \bar{g}_\alpha$
を $\bar{f}'$ と置き、これをそれぞれ論理式 L' の designated
value とする。そして L' の w が、その propositional
variables の truth-value を与えるようにする。

らず、つねに designated value をとるとき valid という。

このとき、次の定理が成立する。

定理3 L' の任意の wff α が valid であるか否かは、決定不能である。

(証明)

§3 で与えた $\tilde{\alpha}^*$ を考える。これは L' の一つの wff であるが (X, Y, Z を X_1, X_2, X_3 と考える。)、いまその propositional variables のすべてが $\mathcal{G}_0$ の形をとったとき、 $\tilde{\alpha}^*$ が $\{1\}$ となるか否かは決定出来ない事を示せばよい。ところで、われわれの truth-value の構成と truth-value function の定義から、いま考えている truth-value $\alpha(x_0, x_1, x_2, \dots) \in \prod_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}} N_j$ の $x_0, x_1, x_2, \dots$

の各成分の値は (x_1, x_2, x_3) で考えられた値の projection に等しい。したがって §3 で示した事からこの定理が成立する。

Q. E. D.

§5 特徴づけ

L' の valid formula をすべて生成する公理系を考える。いま、次のように定義される function φ を考える。

- (i) $\varphi(X, p) = p(t, x_0)$ $t \in L$ (X, p の形でない p に対しては $\varphi(p) = p(t, x_0)$.)

$$(ii) \quad \varphi(\alpha \vee \beta) = \varphi(\alpha) \vee \varphi(\beta)$$

$$(iii) \quad \varphi(\neg \alpha) = \neg \varphi(\alpha)$$

$$(iv) \quad \varphi(\exists x_\nu \alpha) = (\exists x_\nu) \varphi(\alpha)$$

$$(v) \quad \varphi(\exists t \alpha) = (\exists t) \varphi(\alpha)$$

いま, f が X_μ の free operation ならば X_μ 上の $\exists x_\mu$ の作用域におこらない事と定義する。このとき次の axiom schemata を考へる。(ただし $f \rightarrow g \equiv \neg f \vee g$)

$$1) \quad \vdash f \rightarrow f \vee g$$

$$2) \quad \vdash f \vee f \rightarrow f$$

$$3) \quad \vdash f \vee g \rightarrow g \vee f$$

$$4) \quad \vdash (f \rightarrow g) \rightarrow (h \vee f \rightarrow h \vee g)$$

$$5) \quad \vdash f \rightarrow \exists_j f' \quad (j = x_\nu, t)$$

ただし $\exists t$ の場合をのぞいて左辺の f' は, 述語論理の普通の公理の按に, f と共にそれに対応する free operation がかわる。これもよい。

$$6) \quad \vdash X_\nu (f \vee g) \leftrightarrow X_\nu f \vee X_\nu g$$

$$7) \quad \vdash X_\nu \neg f \leftrightarrow \neg X_\nu f$$

$$8) \quad \vdash X_\nu X_\mu f \leftrightarrow X_\nu f$$

$$9) \quad \vdash X_\mu \exists x_\nu f \leftrightarrow \exists x_\nu f^{X_\mu} \quad (\mu \neq \nu)$$

ただし f^{X_μ} は, 次の場合を除き, $\exists x_\nu f$ 中の free operation を X_μ で置きかえる事を示す。 f の中に $\exists x_\mu$ の形があ

るときは $\exists_{x_\lambda} \phi^{\lambda\mu}$ (λ は μ に等しくない任意の自然数) 又 ϕ が P ときは $\phi^{\lambda\mu}$ は $X_\mu P$ となる。

$$10) \vdash X_\mu \exists_{x_\mu} \phi \iff \exists_{x_\lambda} \phi^{\lambda\mu} \quad (\text{ただし } \phi^{\lambda\mu} \text{ は } 9) \text{ と同様})$$

$$11) \vdash X_\mu \exists_t \phi \iff \exists_t \phi^{\lambda\mu} \quad (\text{上と同様})$$

Rule

$$\vdash \phi, \vdash \phi \rightarrow \psi \Rightarrow \vdash \psi$$

$$\vdash \phi \rightarrow \psi \Rightarrow \vdash \exists_j \phi \rightarrow \psi \quad (j = x_\mu, t)$$

ただし ψ は X_μ を free に含まない。又 $\exists_t$ の場合は $\psi(\phi)$ は t を free に含まない。

このとき、次の定理が成立する。

補助定理 4.1 $\vdash \phi$ ならば、 ϕ は L' で valid である。

(略証)

Axiom schemata がすべて valid である事及び
rule が validity を保持する事を使えばよい。

Q. E. D.

次の容易に得られる。

補助定理 4.2 ϕ を L' の wff とする。このとき公理 6) — 11) を使って X_0 operation が他の X_μ operation の中にあるような形にする事が出来、この ϕ なる wff は証明可能に關して equivalent である。

(証明)

6) — 11) の公理では、左辺と右辺が ϕ である事は

れを用いる事を使えばよい。

Q. E. D.

補助定理 4.3 $\vdash \sigma \Rightarrow \vdash \forall x_v \sigma$ ($\forall x_v \models \neg \exists x_v \neg$)

$$\vdash \forall x_v (\sigma \rightarrow \phi) \rightarrow (\sigma \rightarrow \forall x_v \phi)$$

ただし σ は x_v を free に含まない。

(証明)

$$\vdash \sigma \text{ から } \vdash p \vee \neg p \rightarrow \sigma$$

$$\therefore \vdash \exists x_v \neg \sigma \rightarrow \neg (p \vee \neg p)$$

$$\text{即ち } \vdash p \vee \neg p \rightarrow \neg \exists x_v \neg \sigma$$

$$\therefore \vdash \forall x_v \sigma$$

他も同様。

Q. E. D.

定理 4 σ が $\mathcal{L}$ で valid ならば、 $\vdash \sigma$ である。

(completeness)

(証明)

σ が $\mathcal{L}$ で valid ならば、補助定理 4.2 を使って X_K operation が他の X_v operation の中におこなわれる様にする事が出来る。これを $\hat{\sigma}$ とする。このとき σ と $\hat{\sigma}$ は provability に関しても、validity に関しても equivalent である。また、 $\hat{\sigma}$ がわれわれの公理系で証明出来る事を示せばよい。いま $\varphi(\hat{\sigma})$ を考えれば、これは φ の定義から K の wff になる。そして $\varphi(\hat{\sigma})$ は

仮定から K の valid formula になる。よ、 $\vdash_K \varphi(\overline{a})$ をうる。ところでこの証明に対応するおれおれの証明図を考えれば、 K の公理と rule に対応するおれおれの公理と rule が与える (すなわち、補助定理 4.3 により Mendelson [5] の K の公理系を考えればよい。) $\vdash \overline{a}$ をうる。したが、 $\vdash$ 補助定理 4.2 から $\vdash \overline{a}$ をうる。

Q. E. D.

§6 おとがし

以上で、述語論理に対応するある種の無限多値論理とその truth-value をハートンと考える場合の decision problem 及び production rule の与え方がわかった。ここで考えた論理系 L' は、述語論理の代数的化として考えられ、Cylindric Algebra 等と関係を持つものであり、面白い applications があるかもしれないと思われる。

References

- [1] A. Nakamura : On a propositional calculus whose decision problem is recursively unsolvable, Nagoya Math. J. vol. 38 (1970) 145-152.
- [2] H. Wang : Proving theorems by pattern

recognition II, Bell System Tech. J.

vol. 40 (1961) 1-41.

- [3] H. Wang: Dominoes and AEA case of the decision problem, Math. theory of automata, Polytechnic Press, 1963 23-55.
- [4] R. Berger: The undecidability of the domino problem, Memoirs of the Amer. Math. Soc.
- [5] E. Mendelson: Introduction to mathematical logic, D. van Nostrand Co. 1964.