

周期波の弱非線形解析

小川 知之*

1 はじめに

応用の観点からの分岐解析を紹介する。ここでいう分岐理論とは、局所分岐理論いわゆる弱非線形解析を意味する。すなわち自明解（もしくは解析可能な解）の臨界安定点の近傍で非自明解を構成する。そのためには特異点まわりの標準系理論による分岐の分類論にとどまらず、個々のモデルに応じた非線形性から実際に標準系の各係数を決定する必要がある。こうして分岐した直後の非自明解は自明解からのずれも当然小さく小振幅解である。しかしながら最も退化した多重分岐点まわりの局所分岐の結果は多くの知見を与えてくれる。

分岐解析の方法論に着目した場合、対象は熱対流や Couette-Taylor 問題などの流体問題に限らない。生物のパターン形成や化学反応系の空間パターン形成などにも分岐理論を適用して理解できる現象は数多く見られる。こうしたパターン形成の問題では、2つの相の境界がはっきりするような、解としては大振幅のレイヤー解を問題にすることも多い。これに対しては分岐理論ではなく、特異摂動法による解析が行われる。そこでは特定のパラメーターの極限的な状況においては、系の状態が2つの極端に異なる速さで動くダイナミクスに分解されることを用いる。

このようなパターン形成の問題でも、局所分岐理論の適用は極めて有用である。すなわちまず、自明解の分岐点を決定し非自明解を構成する。次にパラメーターを動かしながら非自明解の枝を追跡する。このようにして大域的な分岐図を描くことが、計算機援用証明などにより進みつつある。（例えば計算機援用位相的方法で、[4][14] 参照。）特異摂動法で構成した解も、自明解に繋がっている¹ならば、この大域分岐図のどちらかの端にあるはずである。すべての非自明解が自明解からの分岐の繰り返しで得られるかどうかはもちろん問題に依存する。分岐図上で自明解と非連結な解を見つけることは別の問題であるが、一般的な方法はない。

さて、定数定常解が分岐するときある特定の波数付近の周期モードの不安定化によることが多い。これは波数関係式で概ね理解することができる。しかしながら、不安定化する波数が連続的にあるので厳密な扱いは一般に難しい。そこで、例えば有限区間に周期境界条件を課し波数を離散化し方程式をフーリエ級数で書き直すと便利である。周期境界条件は、計算機上でシミュレーションする場合は別として、実現可能性の低い境界条件である

*大阪大学大学院基礎工学研究科

¹これは保証の限りではない。たとえば2つの特異摂動解が途中で saddle-node 分岐的に消滅しているような場合はそれ自身独立した分岐ブランチである。

うが、多くの実験で周期構造が広い領域で見られることから、周期構造自身を調べるという立場で考えることにする。

波数離散化により偏微分方程式は実際には加算無限個のフーリエ係数に関する常微分方程式系になり、さらに臨界点の近くでは有限個の主要なモードに対応するフーリエ係数のみの常微分方程式系に還元することができる。そこでは偏微分方程式の解の時間発展が有限次元の常微分方程式系に橋渡しされ力学系の分岐理論と結びつき、異なる基本周期モードの非線形相互作用が明らかにされる。こうした解析をまず比較的簡単な偏微分方程式（非対称 Swift-Hohenberg 方程式）や活性・抑制型反応拡散系における Turing 不安定性の結果生じるパターンを題材に紹介する。相互作用の結果、単純な周期波のみでなくいくつかの周期波の重ね合わせの複合モード波が現れること、特に Kuramoto-Sivashinsky 方程式では変調波のような非自明な複合モード波が積極的に選択されることを紹介する。また波数選択性（Eckhaus 不安定性）、2次元での六角形パターンとロールパターンの安定性の問題なども議論する。

2 反応拡散系の Turing 不安定性

問題提起として Turing 不安定性から始めよう。Turing 不安定性は反応拡散系におけるパターン形成の基本的なメカニズムとしてよく知られる。本稿では線形安定性解析にとどまらず、その結果どのようなパターンが得られるかを解析する。まず Turing 不安定性が何かを復習しよう。常微分方程式系：

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u, v) \\ \dot{v} = g(u, v) \end{cases} \quad (2.1)$$

が、漸近安定な平衡点を持つ状況を考えよう。例えば

$$\begin{cases} f(u, v) = u - u^3 - v \\ g(u, v) = 3u - 2v \end{cases} \quad (2.2)$$

とすれば原点が唯一の平衡点でかつ漸近安定である。このとき次の反応拡散方程式系：

$$\begin{cases} u_t = D_u \Delta u + f(u, v), \\ v_t = D_v \Delta v + g(u, v), \quad x \in \Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

は Neumann 境界条件：

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

の下では自明な定常解 $u = v = 0$ を持つ。ここで、 Ω は $\mathbf{R}$ または $\mathbf{R}^2$ の境界のなめらかな有界領域とする。 $u = v = 0$ は (2.1) の解としては漸近安定であるにもかかわらず、拡散係数の取り方によってはこの自明な定常解が (2.3) の解として不安定化することがある。それを Turing 不安定性という。

実際, $u = v = 0$ のまわりでの線形化固有値問題を波数 k のフーリエモード毎に行うと次を得る.

$$\begin{cases} \lambda A &= -k^2 D_u A + f_u A + f_v B \\ \lambda B &= -k^2 D_v B + g_u A + g_v B \end{cases} \quad (2.4)$$

ここで, f_u などは $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ などとする. したがって行列

$$M_k = \begin{pmatrix} f_u - k^2 D_u & f_v \\ g_u & g_v - k^2 D_v \end{pmatrix}$$

が実部正の固有値を持つか否かが問題となる. $u = v = 0$ は (2.1) の解としては漸近安定であるという仮定から $\text{trace} M_0 = f_u + g_v < 0$ かつ $\det M_0 = f_u g_v - f_v g_u > 0$ である. したがって M_k が実部正の固有値を持つのは $\det M_k < 0$ となることと同値であり, そのとき実数の正固有値をもつ. さて

$$\det M_k = f_u g_v - f_v g_u - (D_v f_u + D_u g_v) k^2 + D_u D_v k^4$$

であるので, $D_v f_u + D_u g_v > 0$ かつ $(D_v f_u + D_u g_v)^2 - 4(f_u g_v - f_v g_u) D_u D_v > 0$ であればよい. そのためには D_u に対して D_v を十分大きく取ればよく, 不安定化が起こる瞬間では $k \approx k_c = (\frac{f_u g_v - f_v g_u}{D_u D_v})^{1/4}$ の波数のフーリエモードが不安定化する.

以上は線形安定性の議論であり, もちろんこのことからすぐに臨界波数付近の周期パターンが分岐することが結論できるわけではない. 非線形項まで込めた解析は後の 6 節に譲るが, (2.3) を数値計算すると周期定常解が現れることが確かめられる. また空間 2 次元で数値計算すると, まずは局所的なロールパターンを張り合わせたパターンが現れ, 徐々に統制され空間的に一様なロールパターンに近づく様子が観察される. ここでもし非線形項が (2.2) のような奇関数でなく

$$\begin{cases} f(u, v) &= u - u^3 - au^2 - v \\ g(u, v) &= 3u - 2v \end{cases} \quad (2.5)$$

のように 2 次の項を持つ物である場合は, ロールパターンよりむしろ六角形的に並んだドット状のパターンが顕著に現れる. こうした 2 次元のパターンの競合は 8 節で議論する.

3 Swift-Hohenberg 方程式の周期解と Eckhaus 不安定性

しばらく反応拡散系から離れて, 分岐の計算にとって単純で, かつ構造的には Turing 不安定性と同じであるようなモデルを考察しよう. Swift-Hohenberg 方程式は熱対流のロールパターン形成などを理解するための最も単純な方程式として知られる.

$$(SH) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \left\{ \nu - \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \right\} u - u^3.$$

Raileigh-Benard 対流の Bousinesq 近似モデル ([2][5][6]) からの Swift-Hohenberg 方程式の導出は [5] などにあるが, おおざっぱに言うと定数定常解の線形化固有値問題の臨界固

有ベクトルを求め、それが方程式の波数関係式（後述）に現れるようにした現象論的モデルである。なお、Bousinesq 近似モデルにおける波数と臨界レーリー数の関係や臨界固有ベクトルを求める手続きは [2] を参照されたい。また、(SH) の Raileigh-Benard 対流のモデルとしての正当性に関する議論は [15] にある。

ここでは [3] に従って、(SH) の周期定常解を形式的に求めさらにその線形化安定性を計算してみよう。そのため (SH) の線形部分に $u = e^{\lambda t + ikx}$ を代入し波数関係式 $\lambda = \nu - (1 - k^2)^2$ を得る。これは、 $\nu > 0$ のとき $k \approx 1$ 付近で不安定化が起こることを意味する。そこで $\nu = \varepsilon^2$ としてスケールされた変数 $T = \varepsilon^2 t, X = \varepsilon x$ を用い、振幅方程式に帰着させると便利である。すなわち $u = \varepsilon \{A(T, X)e^{ix} + \overline{A(T, X)}e^{-ix}\}$ を (SH) に代入し e^{3ix} などの高波数成分を無視すると、Ginzburg-Landau 方程式：

$$\frac{\partial A}{\partial T} = 4 \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + A - 3|A|^2 A \quad (3.1)$$

が得られる。

さて (3.1) は厳密解として次の定常解を持つ。

$$A_0(X; \omega, \phi, \varepsilon) = \sqrt{\frac{1 - 4\omega^2}{3}} e^{i\omega x} e^{i\phi}, \quad |\omega^2| < \frac{1}{4} \quad (3.2)$$

ここで ϕ は任意である。従って形式的には (SH) が次の形の定常解をもつことがわかる。

$$u_0(x; \omega, \phi, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{\frac{1 - 4\omega^2}{3}} e^{i(1 + \varepsilon\omega)x} e^{i\phi} + c.c. + O(\varepsilon^2), \quad |\omega^2| < \frac{1}{4} \quad (3.3)$$

ここで $c.c.$ は直前の項の複素共役を表す。ところで、 u_0 の波数は $k = 1 + \varepsilon\omega$ であるから、 $|\omega^2| < \frac{1}{4}$ は $\nu > 4(1 - k)^2$ に相当し両辺に $(1 + k)^2 \approx 2^2$ をかければ、 $\nu \approx 0$ で漸近的に $\nu > (1 - k^2)^2$ で、すなわち波数関係式が正となるときの非自明な定常解が存在することになる。

さて (SH) を (3.3) のまわりで線形化し形式的に不安定性を調べてみよう。(SH) の線形化方程式：

$$v_t = -(1 + \partial^2)^2 v + \varepsilon^2 v - 3u_0^2 v$$

に (a, b) を未知として摂動

$$v = e^{\sigma t} (ae^{i(1 + \varepsilon\hat{\omega})x} + be^{-i(1 + \varepsilon\hat{\omega})x})$$

を代入し、波数 κ を適当にとれば、摂動が不安定 ($\sigma > 0$) とできるような ω に対する条件を求める。ここで、 $\hat{\omega} = \omega + \kappa$, $\bar{\omega} = \omega - \kappa$ であり $(a, b) = (0, 0)$ でない非自明な摂動を見つける。少々煩雑だが、

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^2 - (1 - (1 + \varepsilon\hat{\omega})^2)^2 - 2\varepsilon^2(1 - 4\omega^2) & -\varepsilon^2(1 - 4\omega^2) \\ -\varepsilon^2(1 - 4\omega^2) & \varepsilon^2 - (1 - (1 + \varepsilon\bar{\omega})^2)^2 - 2\varepsilon^2(1 - 4\omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

となるので、大きい方の固有値を $\sigma_1(\kappa)$ とすると、

$$\frac{\sigma_1(\kappa)}{\varepsilon^2} = -(1 - 4\omega^2) - 4\kappa^2 + \sqrt{(1 - 4\omega^2)^2 + 64\omega^2\kappa^2}$$

が得られ、 $4\omega^2 > 1/3$ のとき不安定になることがわかる。これは Eckhaus 不安定性と呼ばれ、上のこととあわせると、 $3(1 - k^2)^2 > \nu > (1 - k^2)^2$ では周期定常解は不安定ということになる。

実は同様の形式的計算は複素 Swift-Hohenberg 方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \{\nu - (1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2})^2\}u - |u|^2u \quad (3.4)$$

でもでき、近似解でなく厳密解があることからむしろこの方が見通しがよい。ここからも同様の Eckhaus 不安定性が得られ、(3.4) と (SH) の間の関係や厳密な Eckhaus 不安定性の説明は [16] に詳しい。

この節では、(SH) に焦点をあてて、形式的にはあるが周期構造の出現とその線形化安定性を調べた。次節以降では周期パターンとその分岐を初等的な方法ではあるが厳密に解析する試みを紹介する。解の挙動の全体を低次元の力学系に帰着させるので線形化安定性だけでなく解のダイナミクスをより詳しく調べることもできる。

4 波数離散化と周期解のモード 臨界点

次の非対称 Swift-Hohenberg 方程式に着目してその周期パターンあるいは異なるモードの周期パターンの相互作用を調べ局所分岐解析の実際を見てみよう。

$$(mSH) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \left\{ \nu - \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 \right\} u - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - qu^3$$

$u(t, x) \in \mathbf{R}$ が未知関数で、 $\nu, p, q \in \mathbf{R}$ は定数。定数 $q > 0$ で $p = 0$ のとき前節ですでに述べた (SH) となるが、 p は $u \mapsto -u$ の対称性を崩すパラメーターである。熱対流の問題で、上面もガラス板で覆われ上面底面とも同じ境界条件のときが $p = 0$ に、上面が自由境界のときが $p \neq 0$ に対応すると考えられる。また特に (mSH) で $q = 0$ かつ $p \neq 0$ のときを Kuramoto-Sivashinsky 方程式と呼ぶことにする。通常 $\nu = 1$ かつ $q = 0$ のときに Kuramoto-Sivashinsky 方程式と呼ばれるが、ここでは ν を Kuramoto-Sivashinsky 方程式の安定性のコントロールパラメーターと考えることにする。

まず $u(t, x) \equiv 0$ が解なので、そのまわりの線形化安定性を次の分散関係式から調べてみよう。それには方程式の線形部分に $u = e^{\lambda t + i k x}$ を代入し波数 k の微小振幅の摂動が増大するのか減少するのかを $\text{Re } \lambda$ の正負をもとに見ればよい。

$$\lambda = \lambda(\nu, k) = \nu - (1 - k^2)^2. \quad (4.1)$$

したがって $C = \{(\nu, k) | \nu = (1 - k^2)^2\}$ が中立安定曲線を与える。特に $\nu < 0$ のときにはすべての波数域にわたって摂動は減衰することがわかる。(それだけでなく実は $\nu < 0$ の

とき $u = 0$ は大域的に漸近安定であることもわかる。) 一方, $\nu > 0$ のとき $k = 1$ を中心としたある波数域の摂動波が増大する. このことは Swift-Hohenberg 方程式における不安定化が Turing 不安定化と同じ構造であることを意味する. 周期パターンが現れる直感的な説明は前節で述べたが, 厳密には分岐理論が必要になる場面である.

さて系のサイズに比べて得られるパターンサイズが小さいときはむしろ無限区間の問題として理想化した方が自然である. しかしながらここでは無限区間の困難さを避けるため, 有限区間 $x \in [0, L]$ に周期境界条件を課して考え, しかる後に区間サイズ L を大きくして無限区間での何らかの情報を引き出すことにする. 数値計算でも無限区間で解くことはできないので区間サイズを大きくして周期境界条件を課して解くことが多い. したがってここには計算機という実験道具から得られる現象を説明したいという動機もある.

周期境界条件とはすなわち $u(t, x+L) \equiv u(t, x)$ である. これにより, 許容される波数を離散化できる: $k \in (2\pi/L)\mathbb{Z}$ すなわち $k = (2\pi/L)m, m \in \mathbb{Z}$. 解析する上での大きなメリットがここにある. 波数 $(2\pi/L)m$ の周期波を m モードの波と呼ぶことにする. 言い換えればモード数 m は区間長 L が周期波の基本周期の $|m|$ 倍であることを表す. $k_0 = 2\pi/L$ とおき, 各モード m に対して $\text{Re}\lambda = 0$ となる集合を (ν, k_0) 空間の中で

$$C_m = \{(\nu, k_0) | \nu = \nu_m(k_0) = (1 - m^2 k_0^2)^2\}$$

とおく. これは, ν だけでなく区間サイズ L もパラメータ (可変できる) と捉えて (実際には便宜上 $k_0 = 2\pi/L$ を用いる), そのパラメータ空間の中で C_m が m モードの波に対する安定性の臨界集合であるということである. さて $n \neq n'$ として2つの曲線 C_n と $C_{n'}$ の交点でのパラメータ値は $k_0 \neq 0$ のとき

$$\nu = \nu^{n,n'} := \left(\frac{n^2 - n'^2}{n^2 + n'^2} \right)^2 \quad (4.2)$$

$$k_0^2 = (k_0^{n,n'})^2 := \frac{2}{n^2 + n'^2} \quad (4.3)$$

であるので, 3本の異なる $C_{m_1}, C_{m_2}, C_{m_3}$ が $(\nu, k_0) = (1, 0)$ 以外で同時に交わることはない. したがって区間サイズ L (もしくは k_0) を固定するごとに次の I. II. のいずれかが起こる. ただしここで $\nu_*(k_0) = \min_{m \in \mathbb{Z}} \nu_m(k_0)$ と定める.

- I. (単純臨界点) ある $n \geq 1$ があって, 次が成り立つ. $\nu_*(k_0) = \nu_n(k_0)$ で $|m| \neq n$ であれば $\nu_*(k_0) < \nu_m(k_0)$. (このような $\nu_*(k_0) = \nu^n(k_0)$ とおく.)
- II. (多重臨界点) ある $n \geq 1$ があって, 次が成り立つ. $\nu_*(k_0) = \nu_n(k_0) = \nu_{n+1}(k_0)$ で $|m| \neq n, n+1$ であれば $\nu_*(k_0) < \nu_m(k_0)$. (このような $(\nu_*(k_0), k_0) = (\nu^{n,n+1}, k_0^{n,n+1})$ とおく.)

前節での議論の示唆するところでは, ν が $\nu^n(k_0)$ を少しでも上まわれば I. では m モードの周期解が出現するということになる. また II. のように $(\nu^{n,n+1}, k_0^{n,n+1})$ の近くでは $m, m+1$ モードの周期解が出現するはずであるが, これらは共存するのだろうか? 安定性はどうか? 例えば Eckhaus 不安定性などどう関連するのだろうか? あるいは $m, m+1$ モードの周期解だけでなくその複合型解が出現したりしないか? こういったことを次節以降で詳しく調べてみよう.

5 フーリエモードの方程式と中心多様体への縮約

簡単な分岐の実例でウォーミングアップを始めよう. 状態変数 $x(t) \in \mathbf{R}$ が微分方程式

$$\dot{x} = f(x; \mu) \quad (5.1)$$

に従うとする. ここでは記号 $\dot{\cdot}$ はもっぱら時間に関する微分を表すことにする, すなわち $\dot{x} = dx/dt$ である. また μ を分岐パラメーターとする. さて, 状態変数がある種の対称性を持つ場合を考えよう. もっとも簡単なものは反転に関する不変性

$$f(-x; \mu) = -f(x; \mu) \quad (5.2)$$

がある場合であろう. すると, まず $f(0; \mu) = 0$ で, $x = 0$ は μ の如何によらず平衡点であることがわかる. この平衡点 0 の安定性は $df/dx|_{(x;\mu)=(0;\mu)}$ の正負で決まるが, $\mu = 0$ がその正負の臨界点 (特異点) であるとしよう. したがって $df/dx|_{(x;\mu)=(0;0)} = 0$ である. さらに必要なら μ と x を適当に変数変換することにより, $f(x; \mu)$ のテーラー展開は $f(x; \mu) = \mu x \pm x^3 + \dots$ となる. よって $(x, \mu) = (0, 0)$ の近傍での平衡点と安定性は x^3 の項の正負に応じて普遍的に決定できる. $\mu x - x^3$ の場合が超臨界² (スーパークリティカル) 熊手型 (Pitchfork) 分岐, $\mu x + x^3$ の場合が亜臨界 (サブクリティカル) 熊手型分岐である. 局所的にではあっても高次の項の摂動を無視できるのはここで得られたものが構造安定であるからである.

次に $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbf{R}^2$ を分岐パラメーターとする 2 次元の力学系

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y; \mu) \\ \dot{y} = g(x, y; \mu) \end{cases} \quad (5.3)$$

を考えよう. ここでは対称性

$$\begin{aligned} f(-x, y; \mu) &= -f(x, y; \mu), & f(x, -y; \mu) &= f(x, y; \mu), \\ g(-x, y; \mu) &= g(x, y; \mu), & g(x, -y; \mu) &= -g(x, y; \mu) \end{aligned}$$

を仮定しよう. 上と同様 $(x, y) = (0, 0)$ はつねに平衡点であるが, 退化した特異点のまわりの分岐を調べよう. 退化とは 2 つの特異点が同時に存在している状況で, 適当な変数変換により, (5.3) は以下と同値である.

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\mu_1 + a_{11}x^2 + a_{12}y^2 + O(4)), \\ \dot{y} = y(\mu_2 + a_{21}x^2 + a_{22}y^2 + O(4)) \end{cases} \quad (5.4)$$

ここで $O(4)$ は x, y に関して 4 次以上の高次項を表す. (5.4) の分岐点 $(\mu, x, y) = (0, 0, 0)$ の周りのダイナミクスを分類しよう. 非線形項の係数 $\{a_{ij}\}$ によって異なるが, ここでは

²超臨界/亜臨界という言葉に関してはニュアンスの異なる使われ方がある. 非自明解のブランチがパラメーターの増大する方向に出るときに超臨界という定義もあり得るが, ここでは, 分岐点の定性的な性質を重視して, 非自明解が安定解として分岐する場合を超臨界, 逆に不安定解として分岐する場合を亜臨界と呼ぶことにする.

すべての $a_{ij} < 0$ の場合を見てみよう。このとき (5.4) のアイソクライン（ヌルクラインと呼ばれることもあるが、 $f(x, y), g(x, y)$ それぞれの零点集合のこと）を考慮に入ると相図が描ける。一見似ているが (a) $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$, (b) $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ の場合に異なる相図が得られる。対称性があるので相空間のなかの第 1 象限のみ着目すれば十分である。元の平衡点 $(0, 0)$ から単純分岐で得られた $(x_*, 0), (0, y_*)$ 以外の平衡点を (x^*, y^*) としよう。(a) の場合には $(x_*, 0), (0, y_*)$ が安定であるのに対して、(b) の場合には (x^*, y^*) が安定、 $(x_*, 0), (0, y_*)$ は不安定となる。 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ の場合には構造安定性が失われる状況があるので 3 次の項までの解析では不十分である。

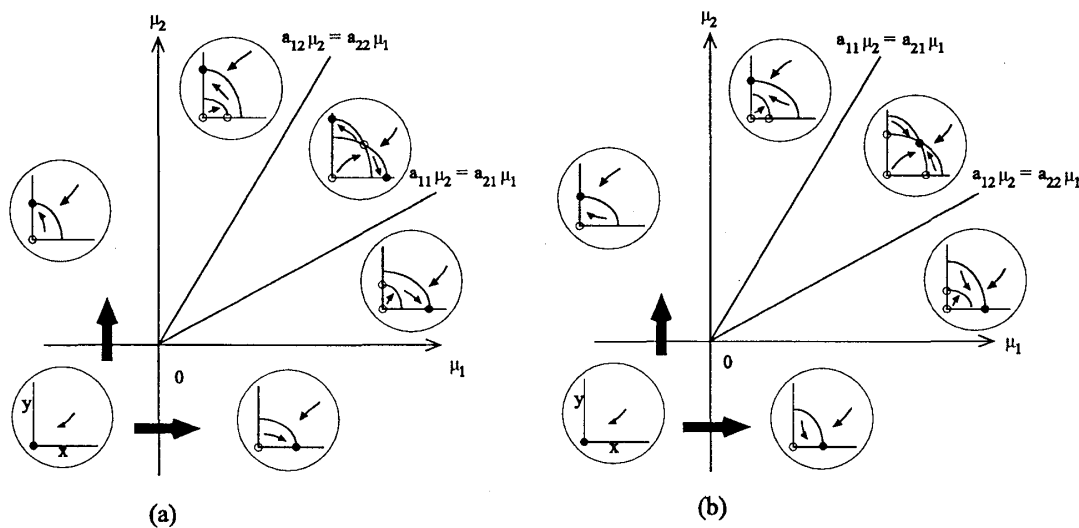


図 1: (5.4) の分岐ダイアグラム。パラメータ空間が 6 つに分けられてそれぞれの領域で (5.4) の相図を示す。相図中で黒丸は安定、白丸は不安定平衡点を表す。また太矢印のようにパラメータを動かすと超臨界熊手型分岐が見られる。

上の 2 つの例は対称性下での単純な分岐現象であるが、実は普遍的で同様な対称性を持つもっと複雑な系の解の様子を調べるのに有効である。本稿の主題である周期パターンのモード相互作用も実はこれらに帰着される。すなわち、定数定常解の不安定化が起こるとき 2 通りの場合があることを前節最後に述べた。結論から先に言うと、I., II. の場合がそれぞれ上の 1 次元および 2 次元の力学系に帰着されることになる。I. では単純に n モードのみが不安定化するのに対して II. では $n, n+1$ モードの不安定性が同時に起こることである。もちろん勝手に与えた区間サイズによって後者が起こる可能性はほとんどないが、非線形現象の解析では II. のような退化した点の近傍の構造が、実際に解析できるのは近傍だけであるにもかかわらず、より広範囲の構造を規定することがしばしばある。しかもここで扱う問題の場合にはこうした退化した点が区間サイズを大きくすることにより先端の分岐点に集積している。

今まで「モード」という言葉を漠然と使ってきたが、ここではフーリエ展開した各フーリエ係数のことである。従ってモードのダイナミクスを記述するにはフーリエ係数の微分方程式を求めなければならない。実際未知関数 $u(t, x)$ は x に関する周期関数としているので u をフーリエ展開しよう。すなわち周期境界条件下で許容される波数すべてにわたって分解して、

$$u(t, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m(t) e^{imk_0 x}. \quad (5.5)$$

関数 $u(t, x)$ は実数値としているので、 $m, -m$ のフーリエ係数は互いに複素共役: $\alpha_{-m} = \overline{\alpha_m}$ である。これによって u に関する方程式 (mSH) をフーリエ係数に関する方程式に直すと、

$$\dot{\alpha}_m = \lambda_m \alpha_m + pk_0^2 \sum_{m_1+m_2=m} m_1 m_2 \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} - q \sum_{m_1+m_2+m_3=m} \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} \alpha_{m_3}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (5.6)$$

となる。ここで、 $\lambda_m = \lambda(\nu, mk_0)$ 。また $\alpha_{-m} = \overline{\alpha_m}$ より (5.6) は実質 $m \geq 0$ で考えれば十分である。

さて I. の状況下では n モードの固有値 (λ_n, λ_{-n}) のみが臨界でそれ以外は実部が負である。上の方程式系 (5.6) をこの2つの部分 (臨界モードとそれ以外) に分けることを念頭に以下のように書き表してみよう。

$$\begin{cases} \dot{v} = f(v, w) = \Lambda_0 v + f_2(v, w) \\ \dot{w} = g(v, w) = \Lambda_- w + g_2(v, w) \end{cases} \quad (5.7)$$

ここで、 $v = \alpha_n$ で w はそれ以外のすべての $m \geq 0$ モードのフーリエ係数とする。また $f_2(v, w), g_2(v, w)$ は各フーリエ係数に関して2次以上の項で、線形部分は各対角成分が対応する λ_m の対角行列 Λ_0, Λ_- で表せる。詳しくはこの節の後ろに述べるが、中心多様体理論 ([1] 参照) の教えるところでは、上の方程式系 (5.7) は臨界モードのみに限定した方程式系に帰着できる。すなわち臨界モードの数と同じ次元 (複素2次元であるが複素共役対称性から複素1次元) を持つ原点を通る方程式系 (5.7) の不変多様体 $\mathcal{C}$ があり、原点では v 平面に接する。さらに原点近傍のすべての軌道は時間とともに指数的に $\mathcal{C}$ に吸引されることがわかるので $\mathcal{C}$ 上のダイナミクスを調べるのが本質である。原点近傍で不変多様体 $\mathcal{C}$ を $w = h(v)$ のグラフとしてあらわせば、 $\mathcal{C}$ 上のダイナミクスは $\dot{v} = f(v, h(v))$ となる。さて $v = \alpha_n$ は n モードのフーリエ係数であったからもとの関数は $u(t, x) = \alpha_n(t) e^{ink_0 x} + \overline{\alpha_n(t)} e^{-ink_0 x}$ で近似されることになる。ところが、 $u(t, x)$ の方程式は平行移動に関して不変であるから、 $u(t, x + \theta)$ も勝手な θ に関して解になる。したがって v のダイナミクスを記述する方程式は写像 $v \mapsto v e^{ink_0 \theta}$ に関して不変であるべきであろう。これは $\tilde{f}(v) = f(v, h(v))$ が $e^{ink_0 \theta} \tilde{f}(v) = \tilde{f}(v e^{ink_0 \theta})$ をみたすことである。この対称性が何をもたらすかももう少し見てみよう。極座標表示により $v = r e^{i\phi}$ と表すと

$$\dot{v} = \dot{r} e^{i\phi} + i r e^{i\phi} \dot{\phi} = \tilde{f}(r e^{i\phi}) = e^{i\phi} \tilde{f}(r).$$

したがって $\dot{r} = \text{Re} \tilde{f}(r), \dot{\phi} = \text{Im} \tilde{f}(r)/r$ と同等であり、特に r だけの独立した方程式が得られたことになる。ここで、改めて (重複する記号だが) $f(r) = \text{Re} \tilde{f}(r)$ とおけば、もう一度対称性を $\theta = \pi$ で用いることにより f の対称性 $f(-r; \lambda) = -f(r; \lambda)$ が得られる。

よって (5.1)(5.2) で議論したように分岐点近傍のダイナミクスは $\dot{r} = \lambda r \pm r^3$ で与えられることになる. しかしながら以上の対称性の議論だけでは結局 3 次の係数は (正負のみならず 0 でないことも) 決定できない. これでは分岐がどちら側に出るのか, すなわち熊手型分岐が超臨界的に起きるのかあるいは亜臨界的に起きるのかがわからない. この係数をいかに計算するかは次節で解説する.

ここで中心多様体へのリダクション (縮約) を簡単にまとめよう. (詳細は [1][8][17] を参照されたい.) 有限次元であれ無限次元であれ Banach 空間 X 上で次の方程式を考える.

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x) \quad (5.8)$$

ここで A は X 上の線形作用素で微分可能な半群 e^{At} を生成するとし, さらに $f: X \rightarrow X$ は 2 次以上の十分なめらかな作用素とする. すなわち $\|f(x)\| \leq K\|x\|^2$ とする. 半群の性質を用いると定数変化法をはじめとして有限次元での考え方を自然に拡張できる. さて A は n_c (有限) 個の実部 0 の固有値をもちそれ以外の A のスペクトルは左半平面にあると仮定する. より正確には X が 2 つの A 不変な部分空間に分解され:

$$X = X^c \oplus X^s, \quad A(X^i) \subset X^i \quad (i = c, s)$$

次の条件が満たされるとする.

i) $\dim X^c = n_c < \infty$

ii) スペクトルの条件. $\delta > 0$ として

$$\operatorname{Re}(\sigma(A^c)) = 0$$

$$\operatorname{Re}(\sigma(A^s)) < -\delta$$

iii) A^s は $t > 0$ で微分可能な X^s 上の半群 e^{tA^s} を生成し次が成り立つ.

$$\|e^{tA^s}\|_{\mathcal{L}(X^s \rightarrow X^s)} < Ce^{-\delta t}$$

iv) $\|f^i(x^c, x^s)\|_{X^i} \leq K\|x\|_X^2$

ただし $A^i (i = c, s)$ は A の X^i への制限で, これを用いて (5.8) は次の形で表せる.

$$\begin{cases} \frac{dx^c}{dt} = A^c x^c + f^c(x^c, x^s) \\ \frac{dx^s}{dt} = A^s x^s + f^s(x^c, x^s) \end{cases} \quad (5.9)$$

(5.8) でもし非線形項がなければ $(x^c, x^s) \in X^c \oplus X^s$ の x^s 成分は指数的に減衰する. さらに X^c は (5.8) で不変なのでこの力学系のダイナミクスは X^c 上のダイナミクスで支配される. もし非線形項があってもこれと同様の事が成り立つ: すなわち原点近傍では X^c に接し, X^c と微分同相な不変多様体 Σ^c があって全体のダイナミクスは Σ^c 上の流れに帰着する. これは隷属原理とも言われる.

定理 5.1 上の仮定の下で

- i) (5.8) に中心多様体 Σ^c が存在する. Σ^c は局所的には X^c からのグラフ: $\Sigma^c = \{(x^c, \psi(x^c)); x^c \in U \subset X^c\}$ で表せて $\psi: U \rightarrow X^s$ は連続微分可能で

$$\psi(0) = 0, \quad D\psi(0) = 0$$

を満たす.

- ii) (5.8) を Σ^c 上に制限した縮約力学系は常微分方程式:

$$\frac{dx^c}{dt} = A^c x^c + f^c(x^c, \psi(x^c))$$

で与えられる.

- iii) 十分小さな初期値をもつ (5.8) の解 $x(t)$ に対して上の縮約方程式の解 $x^c(t)$ が存在してある $\gamma > 0$ を用いて次を満たす.

$$x(t) = (x^c(t) + O(e^{-\gamma t}), \psi(x^c(t) + O(e^{-\gamma t})))$$

さて, 有限次元であれば上の中心多様体定理の仮定は固有値に関する確認を行えばいいだけで単純である. 一方, 無限次元力学系では半群を生成するか否かなど細かい確認がケースバイケースで必要になるが, (mSH) などの散逸系方程式は境界条件に応じて適当に関数空間を定めてやれば, その線形作用素部分がセクトリアル作用素 ([13] 参照) と呼ばれるものになり, 解析半群が生成されるので, 上記の設定に持ち込むことができる. なお, 今考えている周期境界条件の設定では関数空間

$$X = \left\{ u \in H_{loc}^4; u(x+L) = u(x), \|u\|_X^2 = \sum_{m \in \mathbf{Z}} |\alpha_m|^2 (1+m^2)^4 < \infty \right\}$$

を用いればよい.

さらに I. の単純臨界点の場合には (α_n, α_{-n}) に対応する固有空間を $X^c = \mathbf{C}^2$ とすればよい. 結果として, ダイナミクス全体を複素 2 次元の不変多様体上に帰着することができる. もちろん $\alpha_{-n} = \overline{\alpha_n}$ なので, 実際にはその中の複素 1 次元のセクションを考察すれば十分である. II. の多重臨界点の場合には $(\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{-n}, \alpha_{-(n+1)})$ に対応する固有空間 $X^c = \mathbf{C}^4$ を用いて, 複素 4 次元の不変多様体上に帰着し, 最終的に対称性で複素 2 次元のダイナミクスに縮約できることになる.

上の中心多様体縮約は実は対称性を保存したまま行うことができる. すなわち中心多様体の構成は, 方程式 (5.8) が滑らかな群作用 $\gamma \in G$ に関して不変である場合, 中心多様体 (したがって関数 ψ も) も $\gamma \in G$ に関して不変であるようにできる. 先にも述べたように方程式 (5.6) は空間座標に依存しない偏微分方程式から得られたものなので, 自然に次のような対称性をもつ, すなわち方程式が次で不変である.

$$\gamma_\theta(\{\alpha_m\}_{m \in \mathbf{Z}}) = \{e^{im\theta} \alpha_m\}_{m \in \mathbf{Z}}, \quad \theta \in [0, 2\pi) \quad (5.10)$$

これは未知関数 $u(t, x)$ を $u(t, x + \theta/k_0)$ に平行移動することに対応する. したがって方程式 (5.6) に関する中心多様体も γ_θ に関して不変である.

6 周期解の単純分岐

はじめから中心多様体の一般論を用いて低次元のダイナミクスに帰着すると、分岐方程式の解析のためには中心多様体の詳しい情報が必要となる。そこで、少し見方を変えよう。まず元の方程式系に適当な座標変換を施し、後々分岐解析をするのに都合いい形に直すことを考える。その際の指針となるのは平行移動から来る対称性 (5.10) であるが、実は、座標変換により 2 次の項が消去できれば、中心多様体上のダイナミクスを求めるのに都合がよい。実際、(mSH) で $p = 0, q = 1$ の場合 (すなわち (SH)) は、フーリエ係数の方程式 (5.6) を眺めるとそもそも熊手型分岐の方程式と類似していることに気づくであろう。

(SH) ではすでに 2 次の項がないので、どうなるか見てみよう。(5.6) を次のように書き改める。

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_m &= \lambda_m \alpha_m - \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m \\ m_1, m_2, m_3 \in S}} \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} \alpha_{m_3} - \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m \\ m_1 \notin S, m_2 \notin S, m_3 \notin S}} \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} \alpha_{m_3}, \quad (m \in S) \\ \dot{\alpha}_{m'} &= \lambda_{m'} \alpha_{m'} - \sum_{m_1+m_2+m_3=m'} \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} \alpha_{m_3} \quad (m' \notin S)\end{aligned}$$

ここで、 $S = \{n, -n\}$ は臨界モードに対応する番号の集合とする。 $\nu \approx \nu^n(k_0)$ では $\text{Re} \lambda_m \approx 0 (m \in S)$ かつ $\text{Re} \lambda_{m'} < -\kappa < 0 (m' \notin S)$ なので、この段階で改めて中心多様体の縮約を行う。こうして得られた中心多様体を $\mathcal{C}^1$ とする。 $|\alpha_n| = O(\delta)$ であるかぎり $w = h(v) = O(\delta^2)$ であるので、縮約したダイナミクスは

$$\dot{\alpha}_n = \lambda_n \alpha_n - \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=n \\ m_1, m_2, m_3 \in S}} \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} \alpha_{m_3} + O(\delta^4)$$

である。さて $m_1, m_2, m_3 \in S$ で $m_1 + m_2 + m_3 = n$ をみたす組は $n \neq 0$ のときには $(m_1, m_2, m_3) = (n, n, -n), (n, -n, n), (-n, n, n)$ の 3 とおりであることに注意すれば、上の式はさらに

$$\dot{\alpha}_n = \lambda_n \alpha_n - 3\alpha_n |\alpha_n|^2 + O(\delta^4) \quad (6.1)$$

となることがわかる。極座標表示 $\alpha_n = r(t)e^{i\phi(t)}$ により、方程式を分解すれば

$$\dot{r} = \lambda_n r - 3r^3 + O(\delta^4), \quad \dot{\phi} = O(\delta^4).$$

一見これで解決したように見えるが、上の式 of 非摂動系は構造安定ではないことに注意しよう。すなわち半径 $r = \sqrt{\lambda_n/3}$ の円周上の点はすべて平衡点である。こうした退化性はもちろん周期境界条件を課して平行移動を許したことから来ているので、一旦それを固定する仮定をすればよい。たとえば $u(t, x)$ の x に関する偶関数性は保存されるが、これは部分空間 $E = \{\{\alpha_m\} \in \Omega : \alpha_m \in \mathbf{R} \text{ for } m \in \mathbf{Z}\}$ が (5.6) の流れで不変であることを意味する。だから $\alpha_n = r(t) \in \mathbf{R}$ に制限して考えれば十分でその方程式は単に

$$\dot{r} = \lambda_n r - 3r^3 + O(\delta^4)$$

となる。こうして、 $\lambda_n > 0$ ($\nu > \nu^n(k_0)$) で超臨界的に非自明な平衡点が現れることがわかる。(6.1) の平衡点がひとつわかれば、その周りのダイナミクスも込めて平行移動か

ら来る群作用 (5.10) で生成できる. $\mathcal{C}^I$ は実 2 次元なので, こうして生成したダイナミクスでカバーされてしまう. 従って $\mathcal{C}^I$ のダイナミクスは,

$$\dot{r} = \lambda_n r - 3r^3, \quad \dot{\phi} = 0$$

と同値であることがわかる. かくして (SH) の安定な周期定常解

$$u(t, x) = \sqrt{\frac{\lambda_n}{3}} e^{i(nk_0(x+\theta))} + c.c. + O(\lambda_n), \quad 0 \leq \theta \leq L/n$$

が得られた. ここで $c.c.$ は直前の項の複素共役を意味し, 安定とは軌道安定性 (平行移動の自由度が残る) を意味する. この解は α_n の周期性から真に L/n -周期の周期解であることを注意しよう. ここで, (3.3) の形式的近似解を思い出してみよう. そこでは, $\nu = \varepsilon^2$, $k = 1 + \varepsilon\omega$ であったから,

$$\lambda_n = \nu - (1 - k^2)^2 = \nu - (1 - k)^2(1 + k)^2 \approx \varepsilon^2 - 4\varepsilon^2\omega^2 = \varepsilon^2(1 - 4\omega^2)$$

で, 2 つの結果が一致していることがわかる.

以上 (SH) では難なく縮約ダイナミクスに帰着することができたが, (mSH) ではどうか. 指針とすべきことは 2 次の項を消去するように, うまい変数変換 $\{\alpha_n\} \mapsto \{\beta_n\}$ を構成することである. ただし, α_n と β_n の 1 次部分は一致させなければ中心多様体上の座標として失格である. さらにまた (5.10) に関する $SO(2)$ 不変性を保持することに注意して,

$$\beta_m(t) = \alpha_m(t) + \sum_{m_1+m_2=m} S_{m_1,m_2,m} \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} \quad (6.2)$$

の変換を行う. これにより 2 次の項が消去できるように未定係数 $S_{m_1,m_2,m}$ を決定するという方針で計算すればよい. 3 次までの項をまとめると

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_m - \lambda_m \beta_m &= \sum_{m_1+m_2=m} \{(\lambda_{m_1} + \lambda_{m_2} - \lambda_m) S_{m_1,m_2,m} + pk_0^2 m_1 m_2\} \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} \\ &+ \sum_{m_1+m_2+m_3=m} m_2 m_3 S_{m_1,m-m_1,m} \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} \alpha_{m_3} \\ &- q \sum_{m_1+m_2+m_3=m} \alpha_{m_1} \alpha_{m_2} \alpha_{m_3} \end{aligned}$$

となるので, 各 $m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$ に対して $\lambda_{m_1} + \lambda_{m_2} - \lambda_{m_1+m_2} \neq 0$ となればよい. これを non-resonance 条件という. このとき

$$S_{m_1,m_2,m} = -\frac{pk_0^2 m_1 m_2}{\lambda_{m_1} + \lambda_{m_2} - \lambda_m} \quad (6.3)$$

とすれば 2 次が消去される. 実際には中心多様体上の方程式で 2 次の項が消えれば十分なので non-resonance 条件は $m = m_1 + m_2 \in S$ で成立すればよい. ここで, $m \in S$ と $\lambda_m = 0$ は同値なので $m = m_1 + m_2 \in S$ で $\lambda_{m_1} + \lambda_{m_2} = \lambda_{m_1+m_2}$ となるには次の 2 通りしかない.

i) $m_1 \notin S$ かつ $m_2 \notin S$

ii) $m_1 \in S$ かつ $m_2 \in S$

i) のときには resonance で残る 2 次の項は高次項 (4 次以上) になるので無視してよい.

ii) の場合が 2 次の項を消去するに当たって真に困る resonance である.

さて, $S = \{n, -n\}$ のときは $m_1, m_2, m_1 + m_2 \in S$ となることはない. したがって non-resonance である. (次節で行う複合モード解析では $S = S_{II} = \{n, n+1, -n, -(n+1)\}$ なので, 1-2 モードの resonance が現れる. また後述する空間 2 次元の設定では 6 角パターンの resonance が現れる.) 以上のことより, 3 次の係数を計算すると次のことがわかる.

定理 6.1 $q > 0$ で $n \geq 1$ とする. $\nu > \nu^n(k_0)$ で $\kappa = \nu - \nu^n(k_0)$ が十分小さければ (mSH) の定常解 $u(x)$ で $u(x + \frac{L}{n}) = u(x)$ の意味で空間周期的な解が存在する. さらに u の空間プロファイルは適当な $\theta \in [0, 2\pi)$ を用いて

$$u(x) = O(\sqrt{\kappa})e^{i(nk_0x+\theta)} + c.c. + O(\kappa)$$

と表され, 平行移動を除いて漸近安定である.

このことより, ν が I. のような臨界の超え方をすると 2 次の項があろうとなかろうと 3 次の係数が負であれば非自明解 (周期定常解) が超臨界 Pitchfork 的に分岐することがわかる. Kuramoto-Sivashinsky 方程式でも同様のことが示せる.

最後に Turing 不安定化による周期解の分岐問題を考えよう. すなわち, (2.3) を周期境界条件³で考え D_u, D_v を Turing 不安定化の臨界点直後に取ったとする.

$$u = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m e^{imk_0x}, \quad v = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m e^{imk_0x}$$

とフーリエ展開すると, 次の方程式系が得られる.

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_m \\ \dot{\beta}_m \end{pmatrix} = M_{mk_0} \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \beta_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum_{m_1+m_2+m_3=m} \alpha_{m_1}\alpha_{m_2}\alpha_{m_3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

行列 M_{mk_0} は $m \in S$ で臨界固有値を 1 つ (λ_c としよう) 持つので,

$$TM_{nk_0}T^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_c & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{pmatrix}$$

で対角化すると, 変数変換

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n \\ \tilde{\beta}_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

により $m = n$ における方程式は

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\alpha}}_n \\ \dot{\tilde{\beta}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_c & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n \\ \tilde{\beta}_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n^3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(\tilde{\alpha}_n^4) \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. このうち第 1 行の式が中心多様体上の方程式で確かに超臨界的な Pitchfork 分岐でロールパターンが安定に現れることがわかる.

³Neumann 境界条件なら $\cos mk_0x$ でフーリエ展開すれば同じ.

7 多重臨界点まわりの解析と複合モード

前節で得られた結果は「I. の状況でパラメーター ν が臨界値を越えて不安定化が起きた直後には n モードの周期解が現れる」ということであった。ただし周期解は分散関係式の虚数部が 0 なら定常解で、0 でなければ周期的プロファイルをもつ進行波であった。もちろん非線形効果がどう働くかによってこのことは自明ではないが、(4.1) の線形解析 (分散関係式) からある程度予想可能な結論である。またこのことは 2.1 節で述べた近似解とも合致していた。

これに対して II. の多重臨界点の場合はどうであろうか。 $(\nu, k_0) \approx (\nu^{n,n+1}, k_0^{n,n+1})$ では 4 つの臨界モード $\{\alpha_m\}_{m \in S_{II}}, S_{II} = \{n, n+1, -n, -(n+1)\}$ がある。前節と同様に可能な標準系変換で 2 次の項を消去した物を用い、しかる後に中心多様体による縮約を行う。この中心多様体 $\mathcal{C}^{II}$ は $\{\alpha_m(t)\} = 0$ の近傍で局所不変な複素 2 次元多様体 (臨界モードは見かけ 4 つだが共役対称性から実質 2 つ) で、臨界モード $\{\alpha_m\}_{m \in S}$ で張られる超平面に接しており、さらに近傍の流れを指数的に吸引している。

まず $S = S_{II} = \{n, n+1, -n, -(n+1)\}$ に対して non-resonance 条件を調べよう。 $n = 1$ のとき $S = 1, 2, -1, -2$ で $(m_1, m_2) = (1, 1), (2, -1), (-1, 2)$ が resonance である。したがって $n = 1$ のときは 2 次の項を消去することはできない。実際、中心多様体上の方程式は

$$\begin{cases} \dot{A} = \sigma_1 \bar{A}B + A(\lambda_1 + a|A|^2 + b|B|^2) + O(\delta^4) \\ \dot{B} = \sigma_2 A^2 + B(\lambda_2 + c|A|^2 + d|B|^2) + O(\delta^4) \end{cases} \quad (7.1)$$

と表される。ここで、 $\sigma_1, \sigma_2, a, b, c, d \in \mathbf{R}$ は p, q から決まる定数である。このように 2 次の項があると以下のような簡単な解析ができず、解析が難しいが、そのダイナミクスは豊富な構造をもつ。興味のある読者は [7] を参照してほしい。一方 $n > 1$ のときは容易にわかるように resonance はない。さらに $m_1, m_2, m_3 \in S_{II}$ で $m_1 + m_2 + m_3 = n$ をみたす組み合わせは $n \geq 1$ のときには

$$n = n + n + (-n), \quad n = n + (n+1) + (-(n+1))$$

の 2 種類であることに着目すると次の結論が得られる。

定理 7.1 $n \geq 2$ とする。ある定数 $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ と $\delta, \kappa > 0$ が存在して、 $|(\nu, k_0) - (\nu^{n,n+1}, k_0^{n,n+1})| < \kappa$ のとき中心多様体上 $\mathcal{C}^{II}$ のダイナミクスは、 $|A|, |B| < \delta$ であるかぎり次の方程式で支配される：

$$\begin{cases} \dot{A} = A(\lambda_n + a|A|^2 + b|B|^2) + O(\delta^4) \\ \dot{B} = B(\lambda_{n+1} + c|A|^2 + d|B|^2) + O(\delta^4) \end{cases} \quad (7.2)$$

ただし $(A, B) = (\beta_n, \beta_{n+1})$ で $\beta_n = \alpha_n + O(\alpha^2)$ である。

なお a, b, c, d は以下の通りである。

命題 7.2

$$\begin{aligned} a &= a_n := \frac{4p^2 k_0^4 n^4}{\lambda_{2n}} - 3q, \\ b &= b_n := 4p^2 k_0^4 n(n+1)^2 \left(\frac{-1}{\lambda_{-1}} + \frac{2n+1}{\lambda_{2n+1}} \right) - 6q, \\ c &= c_n := 4p^2 k_0^4 n^2(n+1) \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{2n+1}{\lambda_{2n+1}} \right) - 6q, \\ d &= d_n := \frac{4p^2 k_0^4 (n+1)^4}{\lambda_{2(n+1)}} - 3q. \end{aligned}$$

証明) $\mathcal{C}^{\text{II}}$ 上の方程式は

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_n(t) &= \lambda_n \beta_n(t) + 2pk_0^2 \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=n \\ m_1, m_2, m_3 \in S_{\text{II}}}} m_2 m_3 S_{m_1, n-m_1, n} \beta_{m_1} \beta_{m_2} \beta_{m_3} \\ &\quad - \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=n \\ m_1, m_2, m_3 \in S_{\text{II}}}} \beta_{m_1} \beta_{m_2} \beta_{m_3} + O(\delta^4), \\ \dot{\beta}_{n+1}(t) &= \lambda_{n+1} \beta_{n+1}(t) + 2pk_0^2 \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=n+1 \\ m_1, m_2, m_3 \in S_{\text{II}}}} m_2 m_3 S_{m_1, n+1-m_1, n+1} \beta_{m_1} \beta_{m_2} \beta_{m_3} \\ &\quad - \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=n+1 \\ m_1, m_2, m_3 \in S_{\text{II}}}} \beta_{m_1} \beta_{m_2} \beta_{m_3} + O(\delta^4) \end{aligned}$$

であたえられるので, (6.3) と m_1, m_2, m_3 の組み合わせを勘案しさらに 3 次の合成積からの寄与に関しては $\{n, n, -n\}$ の順列は 3 とおりで $\{n, n+1, -(n+1)\}$ の順列が 6 とおりであることに注意すればよい。(証明終)

簡単のため (SH) の多重臨界点から考察しよう. すなわち $p=0, q=1$ である. 中心多様体上のダイナミクスは定理 2.4, 命題 2.5 より

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_n = \alpha_n(\lambda_n - 3|\alpha_n|^2 - 6|\alpha_{n+1}|^2) + O(\delta^4), \\ \dot{\alpha}_{n+1} = \alpha_{n+1}(\lambda_{n+1} - 6|\alpha_n|^2 - 3|\alpha_{n+1}|^2) + O(\delta^4) \end{cases} \quad (7.3)$$

で与えられる. まず (7.3) の平衡点を探そう. 前節と同様, はじめに偶関数に制限し $r = \alpha_n$ と $s = \alpha_{n+1}$ がいずれも実数とする. (7.3) から r, s のダイナミクスを求めると,

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\lambda_n^{SH} - 3r^2 - 6s^2) + O(\delta^4), \\ \dot{s} = s(\lambda_{n+1}^{SH} - 6r^2 - 3s^2) + O(\delta^4). \end{cases}$$

これは 4 節で登場した 2 次元の力学系 (5.4) である. 図 2 は多重臨界点 $(\nu^{n,m}, k_0^{n,m})$ まわりの分岐図である.

最も多くて 9 つの平衡点: $(0, 0), (\pm r_0, 0), (0, \pm s_0), (\pm r_1, \pm s_1)$ があるが, この中で $(\pm r_1, \pm s_1)$ を複合モード点と呼ぼう. 複合モード点は $0 < \frac{\lambda_n}{2} < \lambda_{n+1} < 2\lambda_n$ で存在し, サドル状の不安定平衡点である. またこれは (SH) の複合モード定常解:

$$u(x) = \pm 2r_1 \cos nk_0 x \pm 2s_1 \cos(n+1)k_0 x + O(\delta^4) \quad (7.4)$$

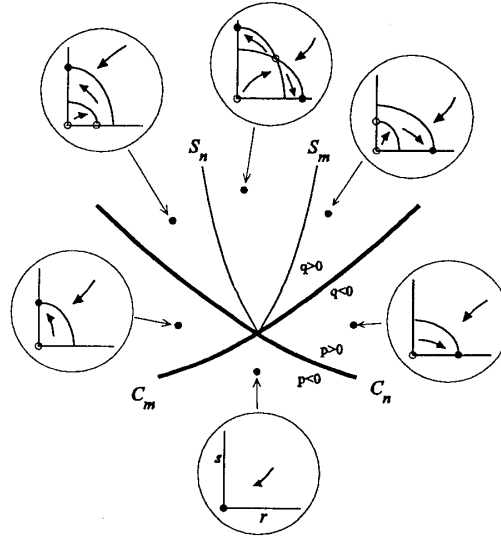


図 2: (SH) における n, m フーリエモードの多重臨界点まわりのダイナミクスを (ν, k_0) -パラメータ空間で示す. 相図中で $p = \lambda_n$, $q = \lambda_{n+1}$ で, 黒丸は安定, 白丸は不安定平衡点を示す.

に対応する. 偶関数に制限した場合, 安定な n -モードと $n+1$ -モード周期定常解のあいだのセパトリックスはこの複合モード点の安定多様体からなる. 再び平行移動から来る群作用をもちいて, 他の定常解

$$u(x) = 2r_1 \cos nk_0(x + \theta) \pm 2s_1 \cos(n+1)k_0(x + \theta) + O(\delta^4), \quad 0 \leq \theta < L \quad (7.5)$$

を作ることができる. ここでもう一度, (7.3) の力学系そのものを考えよう. 上で得られた複合モード点 (およびその群作用軌道) は (7.3) の不変トーラス

$$T = \{(\alpha_n, \alpha_{n+1}) : |\alpha_n| = r_1, |\alpha_{n+1}| = s_1\}$$

の上にある. 便宜上 T 上の点を

$$(r_1 e^{i\phi}, s_1 e^{i\psi}) \in T \mapsto (\phi, \psi) \in \mathbf{R}^2 / (2\pi\mathbf{Z})^2$$

で表すことにする. (7.5) から T 上の 1 つまたは 2 つの閉曲線:

$$\{(\phi, \psi) \in \mathbf{R}^2 / (2\pi\mathbf{Z})^2 : (n+1)\phi = n\psi, \text{ or } (n+1)\phi = n(\psi + \pi)\} \quad (7.6)$$

は平衡点からなることがわかる. しかしながら T 上の残りの領域に関してはどうなっているのかは不明である.

(mSH) の一般の場合は p, q, n によって異なる. 例えば Kuramoto-Sivashinsky の場合: $p = 1, q = 0$ を考えよう. このとき命題 2.5 より n によらずに $a, c, d < 0$ であり, $n = 2, 3, 4$ のとき $b > 0$ で $n \geq 5$ のとき $b < 0$ であることがわかる. さらに $n \leq 5$ のとき $ad - bc > 0$

で $n > 5$ のとき $ad - bc < 0$ である。したがって振幅方程式の特性は n によって異なる (図 3)。(KS) で特に顕著なところは $n \leq 5$ で安定な複合モード点が現れることである。これは C^II 上に安定な不変トーラスがあることを意味する。したがって Kuramoto-Sivashinsky 方程式ではパラメーター ν とシステムサイズ L を適当にとれば複合モード波が安定に観測されるはずである。

(SH) では上でみたように安定な複合モードは得られなかった。しかしながらこうして分岐点の周りのダイナミクスが得られたことは意味深い。いままで $n, n+1$ の隣接するモード相互作用のみ考えてきたが、互いに異なる任意の n, m モードの多重分岐点で解析することももちろん可能であり同様の結果が得られる。その際振幅方程式は

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\lambda_n - 3r^2 - 6s^2) \\ \dot{s} = s(\lambda_m - 6r^2 - 3s^2) \end{cases}$$

である。もう一度 (ν, k_0) パラメータ空間で分岐図を見てみよう。 n, m の多重分岐点からのびる 2 本の境界線 S_n, S_m があり、 S_m より右側では m モードが n モードに対して不安定化しているとみることができる。 S_m は $\sqrt{\lambda_n/6} = \sqrt{\lambda_m/3}$ で記述されるので、 m モードが安定であるための必要条件は

$$2\{\nu - (1 - m^2 k_0^2)^2\} > \nu - (1 - n^2 k_0^2)^2.$$

今 m モードの周期解の安定性をみているので、実際の波数 $k = mk_0$ である。従って波数 k の波が安定であるための必要条件として

$$2\{\nu - (1 - k^2)^2\} > \nu - (1 - (\frac{n}{m})^2 k^2)^2.$$

これがすべての $n, m \in \mathbf{Z}$ で成立する条件を求めると、

$$\nu > 2(1 - k^2)^2$$

が得られる。周期解は $\nu > (1 - k^2)^2$ をみたす波数 k で存在するが、波数が $2(1 - k^2)^2 > \nu > (1 - k^2)^2$ の範囲にある波数の周期解は不安定であることがわかる。不安定であるというだけでなく近接するモードでより安定な波数の周期解に移っていく過程が、区間を限定すれば、上のダイナミクスで理解される。(図 2 の S_m の右側領域。) 一方、2.1 節で見たように、実際には不安定波数域 (Eckhaus 不安定性) はもっと広く $3(1 - k^2)^2 > \nu > (1 - k^2)^2$ である。したがって Eckhaus 不安定性の一部のダイナミクスが上で説明されたといえる。

8 ロールパターンと 6 角パターンの競合

(mSH) や Turing 系 (2.3) を 2 次元領域で考えよう。2 次元の非対称 Swift-Hohenberg 方程式は $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ として、

$$u_t = \{\nu - (1 + \Delta)^2\}u - p|\nabla u|^2 - u^3 \quad (8.1)$$

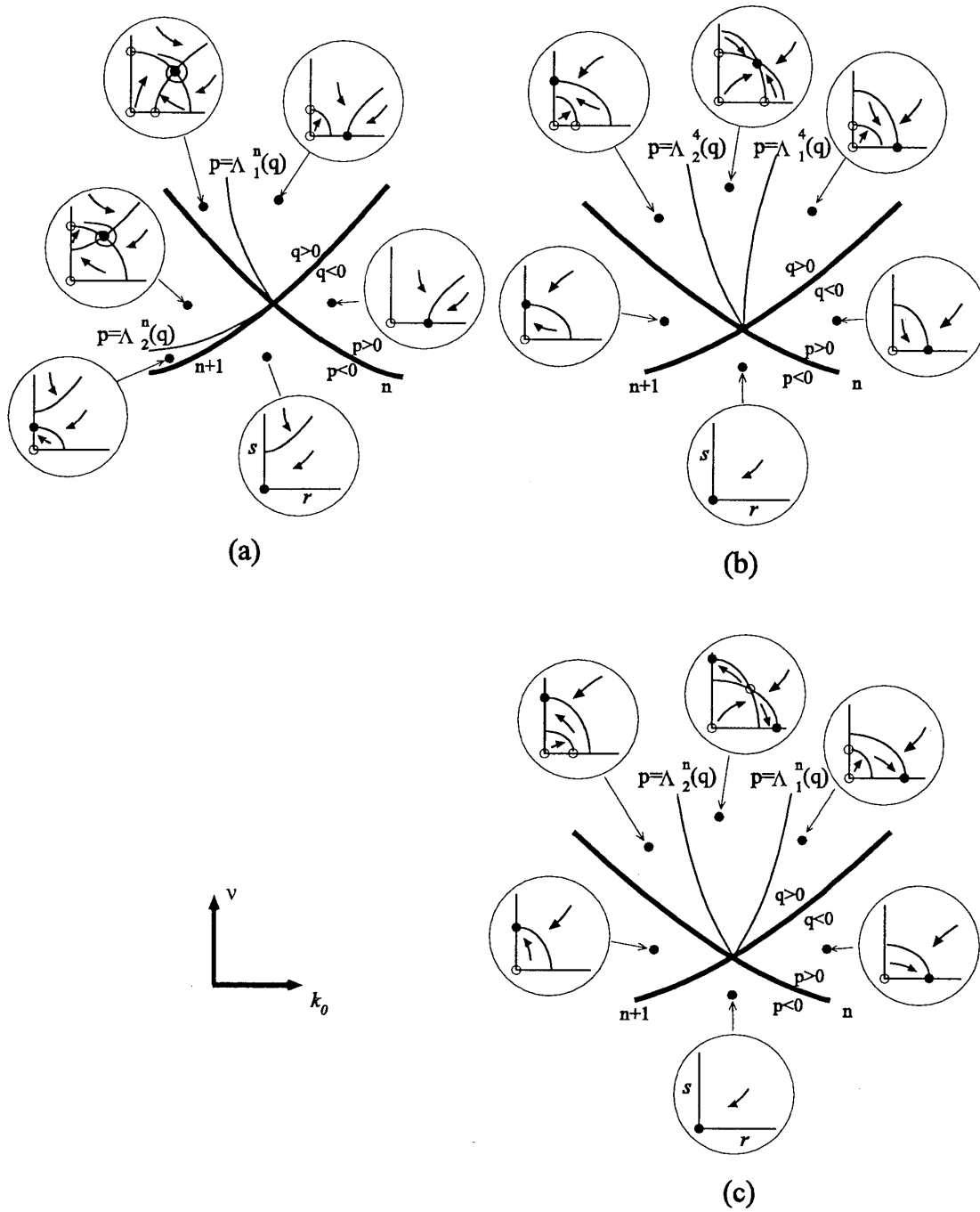


図 3: $n, n+1$ モードの多重臨界点まわりの (KS) の分岐ダイアグラムを (ν, k_0) -パラメータ空間で示す. 相図は 2 つのフーリエモードの振幅のダイナミクスで, 黒丸は安定, 白丸は不安定平衡点を示す. また $p = \lambda_n$, $q = \lambda_{n+1}$ で, (a) $n \leq 4$, (b) $n = 5$, (c) $n \geq 6$ の 3 つに分類される.

で、ほとんど今までの議論が平衡して成立する。Turing 系についても同様である。先ずは $u = e^{\lambda t + i(kx + ly)}$ を代入して分散関係式が次で与えられる：

$$\lambda = \lambda(\nu, k, l) = \nu - (1 - k^2 - l^2)^2.$$

(8.1) を長方形領域 $[0, L_1] \times [0, L_2]$ に周期境界条件付きで考えよう。このとき許容される波数は $(k, l) = (mk_0, nl_0)$, $k_0 = 2\pi/L_1$, $l_0 = 2\pi/L_2$, $(m, n) \in \mathbf{Z}^2$ である。次のことを問題にしよう。「着目するモード (m, n) を固定して、 ν と領域サイズ (k_0, l_0) をコントロールして非自明な複合モードがあるか？」

(m, n) モードの安定性に関する臨界集合を

$$S_{m,n} = \{(\nu, k_0, l_0) | \nu = \nu(k_0, l_0) = (1 - m^2 k_0^2 - n^2 l_0^2)^2\}$$

とおく。ところで $\nu(k_0, l_0)$ は m, n によらずに

$$C_{m,n} = \{(k_0, l_0) | m^2 k_0^2 + n^2 l_0^2 = 1\}$$

上のすべての点で最小値 $\nu = 0$ をとる。互いに異なる $C_{m,n}$ どうしでいくつもの交点があるが、このうち $C_{2,0}, C_{1,1}$ の交点 $(k_0, l_0) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ に着目しよう。

このパラメータの近傍に 6 角パターンが含まれている。フーリエ展開はこの場合以下のようになる：

$$u(t, x) = \sum_{\mathbf{m}=(m,n) \in \mathbf{Z}^2} \alpha_{\mathbf{m}}(t) e^{i(mk_0, nl_0) \cdot (x, y)}$$

まず $p = 0$ で対称のとき $\lambda_{\mathbf{m}} = \lambda(\nu, mk_0, nl_0)$ とおけば

$$\dot{\alpha}_{\mathbf{m}} = \lambda_{\mathbf{m}} \alpha_{\mathbf{m}} - \sum_{\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3 = \mathbf{m}} \alpha_{\mathbf{m}_1} \alpha_{\mathbf{m}_2} \alpha_{\mathbf{m}_3}.$$

さて $(\nu, k_0, l_0) \approx (0, 1/2, \sqrt{3}/2)$ では $S = \{(\pm 2, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)\}$ (複合同順) の 6 モードが臨界で、組み合わせ計算より

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = A_1(\lambda_{(2,0)} - 3|A_1|^2 - 6|A_2|^2 - 6|A_3|^2) \\ \dot{A}_2 = A_2(\lambda_{(1,1)} - 6|A_1|^2 - 3|A_2|^2 - 6|A_3|^2) \\ \dot{A}_3 = A_3(\lambda_{(1,-1)} - 6|A_1|^2 - 6|A_2|^2 - 3|A_3|^2) \end{cases}$$

が得られる。ここで、 $A_1 = \alpha_{(2,0)}$, $A_2 = \alpha_{(-1,-1)}$, $A_3 = \alpha_{(-1,1)}$ である。これは、(7.2) (ひいては図 2) の拡張であり、 $\nu > 0$ のとき不安定ではあるが、複合モード解：

$$u(t, x, y) = e^{ix} + e^{i(x+\sqrt{3}y)/2} + e^{i(x-\sqrt{3}y)/2} + c.c.$$

が存在することがわかる。これは 6 角形状のパターンである。複合モード解は振幅方程式の中で saddle 点なので、初期値の取り方によっては長時間観測される。しかし結局は図 2 に見られるように単一モード解 (ロールパターン) に収束する。このことは Raileigh-Benard 対流、SH 方程式や対称な Turing 系の数値計算結果とも合致する。

次に $p \neq 0$ の非対称のときを考えよう. ここでは, 6 角パターンの resonance が現れる. すなわち $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = ((1, 1), (1, -1)), ((-2, 0), (1, 1)), ((-2, 0), (1, -1))$ の 3 つがそれである. したがってこの場合の中心多様体上の縮約方程式は

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = -p\overline{A_2} \overline{A_3} + A_1(\lambda_{(2,0)} - 3|A_1|^2 - 6|A_2|^2 - 6|A_3|^2) \\ \dot{A}_2 = -p\overline{A_3} \overline{A_1} + A_2(\lambda_{(1,1)} - 6|A_1|^2 - 3|A_2|^2 - 6|A_3|^2) \\ \dot{A}_3 = -p\overline{A_1} \overline{A_2} + A_3(\lambda_{(1,-1)} - 6|A_1|^2 - 6|A_2|^2 - 3|A_3|^2) \end{cases} \quad (8.2)$$

で与えられる. ここで, $A_1 \in \mathbf{R}, A_2 = A_3 = 0$ で (8.2) の定常解を求めると,

$$\partial_t A_1 = \lambda A_1 - 3A_1^3 + O(|A_1|^4)$$

と Pitchfork 的にロールパターンが分岐していることがわかる. 一方 $A_1 = A_2 = A_3 \in \mathbf{R}$ に (8.2) を制限すると,

$$\partial_t A_1 = \lambda A_1 - pA_1^2 - 15A_1^3 + O(|A_1|^4)$$

の定常解で 6 角パターンが得られる. (8.2) での安定性解析を加味することによりロールパターンは線形不安定であるが, 6 角パターンの分岐ブランチがサドル・ノード的に安定性を回復することがわかる. したがって Turing 系を含め非対称な (2 次の項のある) 方程式では臨界点近くで常に安定な 6 角パターンが得られることがわかる.

本稿では局所分岐解析により, 周期的な境界条件を与えその中にはまり込む周期パターン (定常解) を議論したが, 一般に大きな領域で, 何故, ある特定の周期パターンが広範囲で見られるのかという疑問には全く答えていない. 最近 [11] では, 例えば安定な 6 角パターンの領域が如何にロールパターンの領域を浸食していくかという問題のある種の中心多様体縮約によるダイナミクスで, 特殊な場合ではあるが, 説明している. 実はこうした研究は, (mSH) の 2 次元の設定だけでなく Ginzburg-Landau 方程式や Taylor 渦の浸食問題など一連の流れの上にあり, ([11] のリファレンス参照) パターン形成の観点からは今まで説明したような弱非線形解析から一歩進んだ物でこれからの解析の 1 つの指針を与えるものと言える.

参考文献

- [1] 岡本 久, 藤井 宏, 非線形力学, 岩波講座・応用数学 14, 岩波書店 (1995).
- [2] 西浦 廉政, 一様性を破って, 非線形の現象と解析 (数学セミナー増刊), 日本評論社 (1979).
- [3] 西浦 廉政, 非線形問題 1 - パターン形成の数理, 岩波講座・現代数学の展開 5, 岩波書店 (1999).
- [4] 平岡 裕章, 小川 知之, K.MISCHAIKOW, *Swift-Hohenberg* 方程式の定常解大域分岐の Conley 指数を用いた検証, 日本応用数理学会論文誌, 13(2), 2002, pp.191-211.

- [5] 藤坂 博一, 非平衡系の統計力学, 産業図書 (1998).
- [6] 森 肇, 蔵本由紀, 散逸構造とカオス, 岩波講座・現代の物理学 15, 岩波書店 (1994).
- [7] D.ARMSTRUSTER, J.GUCKENHEIMER AND P.HOLMES, *Kuramoto-Sivashinsky dynamics on the center-unstable manifold*, SIAM J. Appl. Math., 49(1989), pp.676-691.
- [8] J.CARR, *Applications of center manifold theory*, Applied Mathematical Sciences 45, Springer, 1981.
- [9] P.CHOSSAT AND G.IOOSS, *The Couette-Taylor Problem*, Applied Mathematical Sciences 102, Springer, 1994.
- [10] M.CROSS AND P.HOHENBERG, *Pattern formation outside of equilibrium*, Reviews of Modern Physics, 65(3), 1993.
- [11] A.DOELMAN, B.SANDSTEDT, A.SCHEEL AND G.SCHNEIDER, *Propagation of hexagonal patterns near onset*, European J. Appl. Math., 14(2003), pp.85-110.
- [12] M.GOLUBITSKY, I.STEWART AND D.SCHAEFFER, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory (Vol.II)*, Applied Mathematical Sciences 69, Springer, 1988.
- [13] D.HENRY, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture notes in mathematics 840, Springer, 1981.
- [14] S.DAY, Y.HIRAOKA, K.MISCHAIKOW AND T.OGAWA, *Rigorous numerical verification for global bifurcations of stationary solutions:existence, uniqueness and non-existence*, preprint.
- [15] G.LIN, H.GAO, J.DUAN AND V.ERVIN, *Asymptotic dynamical difference between the non-local and local Swift-Hohenberg models*, J. Math. Phys., 41(2000), pp.2077-2089.
- [16] A.MIELKE, *Instability and Stability of Rolls in the Swift-Hohenberg Equation*, Commun. Math. Phys., 189(1997), pp.829-853.
- [17] A.VANDERBAUWHED, G.IOOSS, *Center Manifold Theory in Infinite Dimensions*, in Dynamics Reported, Springer, 1991.