

On toric vanishing theorems

トーリック多様体上の消滅定理について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

藤野 修*

概要

In this note, I will explain the vanishing theorems for toric varieties obtained in my paper: Multiplication maps and vanishing theorems for toric varieties. I will also explain the main idea of my proof and give many historical comments on toric vanishing theorems.

目次

1	歴史	2
2	トーリック多様体上の消滅定理	4
3	消滅定理の証明のアイデア	6
4	使用例	8
5	関連する論文について	9
6	思い出話	11
7	今後の課題	12

*〒 464-8602 名古屋市千種区不老町, e-mail: fujino@math.nagoya-u.ac.jp

このノートでは私の論文: Multiplication maps and vanishing theorems for toric varieties で得られたトーリック多様体上の消滅定理について説明する。また、証明のアイデアを説明し、トーリック多様体上の消滅定理へたくさんの歴史的コメントを与える。

1 歴史

トーリック多様体の理論は、Mumford 達による仕事と小田達による仕事であつという間に基礎理論が確立してしまった印象がある。Demazure の先駆的な仕事からトーリック多様体の基礎理論の完成まではほんの数年だったようである。実際のところはよく分からないが、[KKMS] と [O1] を見るとそういう気がする。Mumford 達はトーリック多様体そのものの研究というよりは、トロイダル埋め込み、つまり、局所的にトーリック多様体とみなせる多様体に興味を持っていたようである。[KKMS] や [AMRT] を見ると納得していただけたと思う。そこでは、半安定還元定理や、トロイダルコンパクト化の理論が展開されている。ものすごく興味深い話であるし、現在の log 幾何学につながる話でもある。一方、[O1] を見ると、トロイダル埋め込みというよりは、もう少しトーリック多様体そのものに主眼がおかれているように見える。完備だが射影的でない非特異トーリック多様体の例や小田予想など、面白い話題がつまっている。こちらの方が現在のトーリック多様体の理論の元ネタという気がする。ただ、Mumford 達も小田達もトーラス作用から出発してトーリック多様体を扱っている点は同じである。隅広の定理を使うことにより、扇のデータとトーリック多様体が一対一に対応しているということの証明が出発点になっている。現在スタンダードな教科書になっている Fulton の本 [F1] などでは、扇のデータから構成される多様体としてトーリック多様体を導入している。この方が今や自然な気もする。[O2] でもこの態度が取られている。私も扇から始めるという態度を取ることにする。小田や Mumford 達による先駆的な仕事の後、トーリック多様体そのものを深く調べようという試みは数多くあったと思われるが、[D] もそのひとつであろう。そこでも、トーラス作用云々というより、扇から構成される多様体としてトーリック多様体を導入している。さらに、様々な面白い試みがなされている。トーリック多様体のホッジ理論や交差理論なども扱っている。個人

的にはお気に入りの論文である。この論文のなかにある厄介な主張が今回のお話の出発点である。ここに再録しておく。

The next proposition¹, which we give without proof, generalizes a well-known theorem of Bott:

7.5.2. THEOREM. *Let Σ be a complete fan, and let $\mathcal{E}$ be an invertible sheaf such that $\text{ord}(\mathcal{E})$ is strictly convex² with respect to Σ . Then the sheaves $\Omega_X^p \otimes \mathcal{E}$ are acyclic³, that is, $H^i(X, \Omega_X^p \otimes \mathcal{E}) = 0$ for $i > 0$.*

この無責任(?) な記述が後の人々を苦しめることになるのである! ? この主張は思ったより証明が難しかったのか、[O2] でも証明を放棄している。[O2] では、We leave the proof of it as well as Danilov [D1, Theorem 7.5.2] to the reader, ... と述べている。くどいようだが、日本語版では「Danilov [D₁, 定理 7.5.2] と同様に証明は読者に委ねよう。」となっている。結局この定理が初めて証明されたのは [BTLM] においてであろう。結構な年月がかかってしまったのである。ここらで節をあらためて、トーリック多様体上の消滅定理の最新の結果について述べてみたい。

その前にこのノートの構成を軽く概観しておこう。2 章でトーリック多様体上の消滅定理について述べる。[F2] で得られた結果である。3 章では証明のアイデアを丁寧に説明する。特殊な場合しか扱わないが、これで十分であろう。詳しい証明や一般化は [F2] を見ていただきたい。消滅定理の使用例として、射影空間上のコホモロジー群を計算してみる。これが 4 章である。5 章では [F2] 出現以前の先行結果について意見を述べてみる。みなさんの勉強、研究の助けになれば幸いである。6 章は個人的な思ひ出話である。最後の 7 章で今後の課題や未解決問題について言及する。8 章は後に書き足した部分である。この報告書の成立ちとその後の発展の幾つかを解説してある。

¹明らかにタイプミスと思われる。proposition ではなくて theorem であろう。Danilov の論文のロシア語から英語への翻訳は M. Reid 氏による。この論文の英訳の際に雑誌編集者の意見にしたがって toric という言葉を採用したのが toric 多様体の名前の起源だそうである。小田先生の「トーリック幾何のはじまり」(数学セミナー 2004 年 3 月号に収録) による豆知識である。

²この条件は結局のところ、 $\mathcal{E}$ が豊富な直線束であると言っている。

³ここでの Ω_X^p は通常 $\tilde{\Omega}_X^p$ と書かれるものである。詳しくは下の定義 2.2 を見ろ。

2 トーリック多様体上の消滅定理

この章では [F2] で得られたトーリック多様体上の様々な消滅定理について解説する。次の定理は [F2] の主定理のひとつである。もう一度注意しておく、扇のデータから構成される多様体をトーリック多様体とする。また、基礎体 k は任意の体とする。標数は任意でよいし、代数的閉体とも仮定しない。

定理 2.1 (主定理 I) X を体 k 上のトーリック多様体とし、 B を X 上のトーラス不変な被約なヴェイユ因子とする。 L を X 上の直線束とする。もし、 $H^i(X, \tilde{\Omega}_X^a(\log B) \otimes L^l) = 0$ がある正の整数 l について成立するならば、 $H^i(X, \tilde{\Omega}_X^a(\log B) \otimes L) = 0$ である。特に、 X が射影的で L が豊富なならば、 $H^i(X, \tilde{\Omega}_X^a(\log B) \otimes L) = 0$ が任意の $i > 0$ に対して成立する。

後半の主張は Serre の消滅定理より明らかである。ここで $\tilde{\Omega}_X^a(\log B)$ の定義を復習しておこう。

定義 2.2 W を X のザリスキ開集合で、 W は非特異、 $X \setminus W$ の X 内での余次元は 2 以上となるものとする。このとき、 B は被約なトーラス不変なヴェイユ因子だったので、 W 上 B は単純正規交差因子である。したがって、 $\Omega_W^a(\log B)$ は W 上 well-defined な局所自由層である。ここで、 $\iota: W \hookrightarrow X$ を自然な開埋め込みとする。 $\tilde{\Omega}_X^a(\log B) = \iota_* \Omega_W^a(\log B)$ とおくと、 $\tilde{\Omega}_X^a(\log B)$ は X 上 well-defined な反射的層になる。 $B = 0$ のときは、 $\tilde{\Omega}_X^a = \tilde{\Omega}_X^a(\log B)$ と書くこととする。

主定理 I はかなり強力である。使いやすい形を系として述べておく。ひとつめは懸案の Danilov の主張である。すでに注意したように、Danilov の主張自身は [BTLM] で証明されていた。特殊な場合はいろいろな人が扱っていたと思うので、結局誰の定理かはよく分からない。主定理 I の後半で $B = 0$ と置くだけである。

系 2.3 (Bott, Danilov, ...) X を体 k 上の射影的トーリック多様体とし、 L を X 上の豊富な直線束とする。このとき、 $H^i(X, \tilde{\Omega}_X^a \otimes L) = 0$ が任意の $i > 0$ に対して成立する。

次の系は Mustața による。我々の立場で考えると、主定理 I の後半で $a = \dim X$ としただけである。 X が非特異で体 k の標数が零のときは、

Norimatsu の消滅定理として知られている。Kodaira の消滅定理を使えばすぐに示せる定理である。この Mustařă の結果を簡単に証明したいというのが私の最初の動機であった。

系 2.4 (Norimatsu, Mustařă, ...) X を体 k 上のトーリック多様体とし、 B を X 上のトーラス不変な被約なヴェイユ因子とする。 L を X 上の豊富な直線束とする。このとき、 $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + B) \otimes L) = 0$ が任意の $i > 0$ に対して成立する。

最後の系は Kodaira の消滅定理のトーリック多様体版である。この系も見た目より証明は難しいような気がする。トーリック多様体 X の特異点については何の条件も課していないし、体の標数も一般である。我々の場合は、系 2.3 で $a = \dim X$ 、もしくは系 2.4 で $B = 0$ と置くとよい。

系 2.5 (Kodaira, ...) X を体 k 上のトーリック多様体とし、 L を X 上の豊富な直線束とする。このとき、 $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X) \otimes L) = 0$ が任意の $i > 0$ に対して成立する。

次に主定理 II に行こう。主定理 I と同じ形の定理である。実は証明も全く同じと言って良い。ひとつの定理として述べられなかったので二つの主張に分けたと思っていたきたい。

定理 2.6 (主定理 II) X を体 k 上のトーリック多様体とし、 D を X 上のトーラス不変な $\mathbb{Q}$ -ヴェイユ因子とする。正の整数 l が存在し、 lD はヴェイユ因子とする。もし、 $H^i(X, \mathcal{O}_X(lD)) = 0$ (または $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + lD)) = 0$) なら、 $H^i(X, \mathcal{O}_X(\lfloor D \rfloor)) = 0$ (または $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + \lceil D \rceil)) = 0$) が成立する。

主定理 II を使うと次の系はほぼ明らかである。トーリック多様体上に対してよく知られたテクニックをつかうことにより、主定理 II からすぐに示せる。新しい議論はほとんど必要ない。

系 2.7 (Kawamata–Viehweg, Mustařă, ...) X を体 k 上完備なトーリック多様体とし、 D は X 上の数値的正な $\mathbb{Q}$ -カルティエなトーラス不変な $\mathbb{Q}$ -ヴェイユ因子とする。ただし、 D の飯高次元を $\kappa(X, D) = \kappa$ とおく。このとき、 $H^i(X, \mathcal{O}_X(\lfloor D \rfloor)) = 0$ が任意の $i > 0$ に対し、 $H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + \lceil D \rceil)) = 0$ が $i \neq n - \kappa$ に対して成立する。ただし、 $n = \dim X$ である。

この系の非常に特殊な場合は Mustăţă によって得られていたが、微妙に変な条件のついた不思議な定理であった。今回完全に一般化できたのである。[F2] の最大の貢献は、非常に初等的な方法で上記消滅定理を一網打尽にした点であろう。

次の章で主定理の証明のアイデアを解説する。アイデアはもの凄く簡単である。実際私の論文 [F2] での上記主定理 I と II の証明は 2 ページ弱である。上で述べた形以外の消滅定理や相対化、ベクトル束についての消滅定理（それはまだ十分な形ではない）など、同じテクニックで証明出来る上記結果の様々な亜種は、[F2] を見ていただきたい。というより、[F2] で導入した議論を身につければ、必要な消滅定理を必要なときに自分で証明出来るようになると思う。

3 消滅定理の証明のアイデア

この章では消滅定理を特殊な場合に証明してみる。記号の設定等が面倒なのと、アイデアを明確にするために問題を特殊化する。この特殊な場合の証明が理解出来れば、一般のときを理解するのにはなんの障害もないであろう。

3.1 (トーリック多様体の l 倍写像) $N \simeq \mathbb{Z}^n$ を階数 n の格子とし、 $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ を双対格子とする。いつものトーリック多様体の記号である。 Δ を $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 内の扇とし、それに付随するトーリック多様体を $X = X(\Delta)$ と書く。ここで新たに格子 $N' = \frac{1}{l}N$ を導入する。 l は任意の正の整数とする。 $M' = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N', \mathbb{Z})$ は N' の双対格子である。 $M' = lM$ と $N'_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}$ に注意する。よって Δ は $N'_{\mathbb{R}}$ 内の扇とみなせる。 Δ を $N'_{\mathbb{R}}$ 内の扇と見たときは、 Δ と区別するために Δ' と書くことにする。 Δ' に付随するトーリック多様体を $X' = X(\Delta')$ と書く。もちろんトーリック多様体としては X と X' は同型である。次に格子間の自然な単射 $\varphi: N \rightarrow N'$ を考える。この φ は有限全射なトーリック射 $F: X \rightarrow X'$ を導く。この射を X の l 倍写像と名付けることにする。

3.2 X の中の稠密なトーラスを T 、対応する X' 内のトーラスを T' とする。すると、 $\mathcal{O}_T$ は $k[M]$ 、 $\mathcal{O}_{T'}$ は $k[M']$ に他ならない。したがって、 $F_*\mathcal{O}_T$ は $k[M']$ -加群とみた $k[M]$ である。 $\mathcal{O}_{T'} \rightarrow F_*\mathcal{O}_T$ は $k[M']$ -加群としての自然な準同型 $k[M'] \rightarrow k[M]$ である。ただし、 $x^m \mapsto x^{lm}$ という対応から導かれる準同型である。 $M' = lM$ であったことも思い出しておこう。次

に $k[M']$ -加群の準同型 $k[M] \rightarrow k[M']$ を以下で定義する。もし $m_\alpha = lm_\beta$ と書けるなら $x^{m_\alpha} \mapsto x^{m_\beta}$ 、そうでないときは $x^{m_\alpha} \mapsto 0$ とする。結局この準同型によって $\mathcal{O}_{T'} \rightarrow F_*\mathcal{O}_T$ は分裂する単射準同型であることが分かる。 X の各トーラス不変なアフィン開集合上で考えるとすぐにわかることだが、 $\mathcal{O}_{T'} \rightarrow F_*\mathcal{O}_T$ は分裂準同型 $\mathcal{O}_{X'} \rightarrow F_*\mathcal{O}_X$ を自然に導く。まとめると以下の定理が示せたことになる。

定理 3.3 自然な射 $\mathcal{O}_{X'} \rightarrow F_*\mathcal{O}_X$ は分裂準同型である。

3.4 この定理 3.3 をもう少し詳しく見てみよう。以下簡単のため、 $k = \mathbb{C}$ と仮定する。この定理の証明には余次元 2 以上の閉部分集合を取り除いても問題ないので、 X は非特異と仮定してよい。必要ならさらに X を縮めて、 X は有限枚の $\mathbb{C} \times (\mathbb{C}^\times)^{n-1}$ で覆われているとして良い。 $n = \dim X$ である。この開集合 $V = \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^\times)^{n-1} \subset X$ 上で F をみると、 $F: V = \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^\times)^{n-1} \rightarrow V' = \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^\times)^{n-1}: (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1^l, x_2^l, \dots, x_n^l)$ となっている。座標ごとにみると、単なる l 乗するという写像である。 V には $G = (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^n$ が自然に作用する。各座標ごとに l 次巡回群を積で作用させるのである。自然な準同型 $\mathcal{O}_{V'} \rightarrow F_*\mathcal{O}_V$ が分裂するのは、 $(F_*\mathcal{O}_V)^G \simeq \mathcal{O}_{V'}$ より明らかである。ここで、 $(F_*\mathcal{O}_V)^G$ は $F_*\mathcal{O}_V$ の G -不変部分である。この対応がまさしく上で与えた対応になっている。体 k が一般のときは、 k に 1 の l 乗根が含まれるかどうか分からないので、群作用を考えるという記述はそのままでは使えない。この点は注意が必要である。

3.5 ここまでくると後はほとんど明らかである。 L を X 上の直線束とすると、 $F^*L' \simeq L^l$ が成立する。ただし、 L' は $X' \simeq X$ 上の L を表す。区別のために $'$ をつけるのはいつも通りのルールである。これらの結果をあわせると次を得る。

$$\begin{aligned} H^i(X, L) &\simeq H^i(X', L') \simeq H^i(X', \mathcal{O}_{X'} \otimes L') \\ &\subset H^i(X', F_*\mathcal{O}_X \otimes L') \simeq H^i(X, L^l) \end{aligned}$$

最初の同型は単なる言い換えである。 X も X' もトーリック多様体としては同型である。次の同型は当たり前の同型である。その次の $\subset$ が分かりやすいように書いただけである。 $\subset$ は上の分裂準同型の存在からわかる。最後の同型は射影公式である。以上で主定理 I の $a = 0$ の場合が証明出来た。

3.6 一般のときの証明の注意を与えてこの章を終わることにする。主定理 I については以下の定理を示せば十分である。

定理 3.7 $\tilde{\Omega}_{X'}^a(\log B') \rightarrow F_* \tilde{\Omega}_X^a(\log B)$ は任意の $a \geq 0$ に対し、分裂準同型である。

この証明は $a = 0$ のときと同様で、全然難しくない。注意すべきことは、対応 $M \otimes_{\mathbb{Z}} k[M] \rightarrow H^0(T, \Omega_T^1) : m \otimes x^{\tilde{m}} \mapsto \frac{dx^m}{x^m} \cdot x^{\tilde{m}}$ で $M \otimes_{\mathbb{Z}} k[M]$ と $H^0(T, \Omega_T^1)$ の間の同型が存在することである。詳しくは [F2] を見ていただきたい。主定理 II の証明については、以下の定理を証明すれば十分である。

定理 3.8 $\mathcal{O}_{X'}(\lfloor D' \rfloor) \rightarrow F_* \mathcal{O}_X(lD)$ と $\mathcal{O}_{X'}(K_{X'} + \lceil D' \rceil) \rightarrow F_* \mathcal{O}_X(K_X + lD)$ は分裂準同型である。

こちらの証明は結局のところ、Kawamata–Viehweg 消滅定理の証明でおこなう被覆の局所的な計算と同じである。分岐被覆をとって $\mathbb{Q}$ -因子の分数部分を消し去るというテクニックである。3.4 の記述を見るとほぼ明らかであろう。

4 使用例

ひとつだけ消滅定理の使用例を書いておく。よく知られている結果であるが、面倒なのでついつい確認を怠ってしまう例である。

例 4.1 (射影空間のコホモロジー) 以下の等式が成り立つ。

$$\dim H^q(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(k)) = \begin{cases} \binom{k+n-p}{k} \binom{k-1}{p} & \text{for } q = 0, 0 \leq p \leq n, k > p \\ 1 & \text{for } k = 0, 0 \leq p = q \leq n \\ \binom{-k+p}{-k} \binom{-k-1}{n-p} & \text{for } q = n, 0 \leq p \leq n, k < p - n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ただし、 $\Omega_{\mathbb{P}^n}^p(k) = \Omega_{\mathbb{P}^n}^p \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ である。

証明 4.2 この証明中では断りなしに消滅定理を使うことにする。完全系列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus n+1} \rightarrow T_{\mathbb{P}^n} \rightarrow 0$$

を考える。双対をとって適当に外積をとり、必要なだけ直線束をテンソルすると、

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(p) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus \binom{n+1}{p}} \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^{p-1}(p) \rightarrow 0$$

を得る。 $p = 0$ の場合はさすがに well-known とする。これはどの教科書にも載っている話だと思う。次に p が小さいときは成り立つことを認めて、 p のときを考える。帰納法である。完全系列

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(k) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k-p)^{\oplus \binom{n+1}{p}} \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^{p-1}(k) \rightarrow 0$$

を考えると良い。結局、等式

$$\binom{n+1}{p} \binom{k-p+n}{k-p} - \binom{k+n-p+1}{k} \binom{k-1}{p-1} = \binom{k+n-p}{k} \binom{k-1}{p}$$

から $q = 0$ の場合は従う。Serre の双対定理により、 $H^n(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(k))$ と $H^0(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^{n-p}(-k))$ は双対である。従って $q = 0$ と n のときは証明が完成した。以下 $q \neq 0, n$ とする。やはり Serre の双対定理をつかうと、コホモロジー群 $H^q(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^p(k))$ と $H^{n-q}(\mathbb{P}^n, \Omega_{\mathbb{P}^n}^{n-p}(-k))$ は双対である。よってコホモロジーが生き残る可能性があるのは $k = 0$ の場合のみである。これは

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^p \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-p)^{\oplus \binom{n+1}{p}} \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}^{p-1} \rightarrow 0$$

を使って p が小さい方から確認していける。以上で目的の等式が得られた。

5 関連する論文について

この章では先行結果のいくつかについて簡単にコメントをつけてみたい。コメントに客観性は全くないことをお断りしておく。

5.1 [BC] について述べてみる。この論文は基本的にホッジ理論の話である。複素数体上で定義された、高々商特異点しか持たない完備なトーリック多様体に対して Danilov の主張をチェックしている。混合ホッジ構造に付随した重みフィルトレーションを考慮にいった消滅定理も扱っている。ただし、消滅定理そのものを知りたいという立場から見ると、あまり面白くない論文である。射影空間内の超曲面のホッジ構造を調べた Griffiths の結果、それを重み付き射影空間に一般化した Dolgachev の話、Steenbrink による商特異点を許した所でのホッジ理論などを、高々商特異点しかもたないトーリック多様体上の超曲面へ一般化したという感じの論文である。詳しくは読んでいない。もちろん、ミラー対称性などの立場からは非常に重要な論文だと思われる。自分達の理論に必要なだから、必要な程度の消滅定理を手持ちのテクニックで証明しておきました、という感じであろうか？ 実際、消滅定理に裂かれたページ数は少ない。

5.2 次に [BTLM] を見てみよう。この論文はタイトルのとおり、トーリック多様体上のフロベニウス写像を調べている。その結果、Bott 型の消滅定理を得ている。つまり、Danilov の主張を初めて確認した論文になっている。体 k を標数 $p > 0$ の完全体とし、 $l = p$ と選んで l 倍写像を考えると、それはまさしく相対フロベニウス写像に他ならない。分裂射を作る射はカルティエ作用素である。よって、[F2] の証明と [BTLM] の証明は基本的に全く同じものである。ただし、任意の l 倍写像を考えられると気付いた点が [F2] の重要な点である。これによって、Kawamata–Viehweg や Mustața 型の消滅定理（定理 2.6 や系 2.7 である）への道が開けた。フロベニウスだけでは到達不能なタイプの消滅定理である。著者の名前を見れば分かるが、論文 [BTLM] はトーリック多様体の消滅定理に興味があるというよりは、フロベニウス写像そのもののの方に重点が置かれているような気がする。

5.3 論文 [Mu] は非常に有名である。トーリック多様体上の消滅定理を本格的に扱った初めての論文だと思われる。タイトルはそのものズバリである。ジェットやアークで有名になる前の Mustața 氏の論文である。Cox の斉次座標環の理論をつかい、様々な消滅定理を得ている。 $\mathbb{P}^n$ は $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ を $\mathbb{C}^\times$ で割ったものとみなせる。この描写は一般のトーリック多様体に対しても成立する。それが Cox の斉次座標環の理論である。トーリック多様体 X の斉次座標環を S とする。このとき、 X 上の任意の連接層 $\mathcal{F}$ に対し、有限生成な次数付き S -加群 P が存在し、 $\mathcal{F}$ は P に付随する層として書ける。非常に大雑把に言うと、一般の射影的スキームのときにやることと同様のことが成立するのである。このようにして、 X と $\mathcal{F}$ の話を S と P の話に焼き直す。そして、この次数付き環とその上の加群の世界で消滅定理を示す。 $\mathbb{P}^n$ 上のコホモロジーを $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点に台をもつ局所コホモロジーの計算に持っていく話と同じ戦略である。ただし、この Mustața の方法だと、多様体と層の世界と次数付き環と加群の世界との翻訳作業が必要になるので、ギリギリの条件まで考えるのはかなり大変だと思われる。新しい消滅定理を多数生み出したが、[F2] のせいで微妙に中途半端な結果になってしまったかもしれない。

以上 3 つが主な先行結果である。幾つか補足的なコメントを付け加えておく。

5.4 系 2.5、つまり Kodaira 型の消滅定理に関しては、[L] の Theorem 4.1 に比較的簡単そうな証明が載っている。トーリック幾何学的には一番由

緒正しい証明かもしれない。この論文はタイトルから分かるように、組み合わせ論的な記述を好んで用いている。

5.5 主定理 II の半分の特殊な場合は Mustăță 氏による。見た目がかなり異なるので同じ主張であることがすぐには分からないかもしれない。詳しくは [F2] を見ていただきたい。この部分に関しては、Payne 君も全く異なる方法（これはこれでかなりエレガントな初等的方法である）で別証明を与えていた。残念ながら未公表である⁴。

6 思い出話

この章は私の思い出話である。適当に読み流していただきたい。

6.1 (遭遇) そもそも私が最初にトーリック多様体の研究に手を染めたのは [F1] である。そこではトーリック多様体上で因子と曲線の交点数を計算することにより、様々な結果を得ている。トーリック多様体の端射線の長さの評価がもっとも重要な貢献だと思う。その応用としてトーリック多様体上で藤田予想の一般化を解決している。この論文を書いた後、類似の結果が知られているかどうか佐藤拓さん（当時東北大の院生）にたずねたところ、[Mu] を教えてもらった。そこでは消滅定理の応用として藤田予想の一般化を扱っていた。ただ、私の方が藤田予想に関してははるかにシャープな結果を得ていたし、トーリック多様体上の消滅定理の有用性は全く分からなかった。その後私は一貫してトーリック多様体上では消滅定理などは必要なく、交点数の計算をつかう方が有効だという態度で論文を書いてきた。ただ、あるとき、すぐに示せそうな系 2.4 が手持ちのテクニックでは歯が立たないと気付いたのである。で、トーリック多様体上でも少し消滅定理を考えてみようかな？と思ったのである。それと、トーリック多様体とは限らない一般の多様体についての消滅定理は、おそらく私の専門のひとつである。簡単に示せそうな消滅定理が示せないのは凄く気分が悪かったのである。それから紆余曲折を経て [F2] の誕生である。

6.2 (反響) 論文 [F2] をアーカイブに出したところ、その日のうちに Arapura 氏と Payne 君からメールが届いた。反響があるのは嬉しいことであ

⁴かなりキチンと書かれたノートが存在するのだが、[F2] が先に世に出てしまったので出せなくなってしまったかも知れない。

る。おそらく二人とも、「しまった！こんなに簡単に出来たのか！！」と思ったのではないだろうか？ちなみに、Arapura 氏は一時期消滅定理の証明を専門としていた人である。Payne 君はかつて私と共著論文を書いたこともある若い人である。でも会ったことはない。Fulton の学生だった人で、たぶん現在はクレイから大金をもらって(?) 研究しているアメリカの若手のホープと思われる。彼はトーリック幾何学にメチャクチャ強い人である。

6.3 (越後湯沢にて) 2006 年の 12 月に越後湯沢で Mustăţă 氏と話した。そのとき彼は私の消滅定理の証明をさして、「お前は正しい方法を見つけた。」と言ってくれた。ちょっと嬉しかった。たとえお世辞であっても嬉しいものである。

6.4 (台湾にて) 2007 年の 3 月に台湾で Lin さんと会った。論文 [L] の著者である。女性数学者である。彼女は私のことをトーリック多様体の専門家と認識しているようで、「あなたの学生のうち何人がトーリック幾何学を勉強しているの？」とたずねてきた。「いや、誰もやってないんですが、、、」と答えたのだが信じてもらえなかった。今回の論文もトーリック幾何学の専門家が書いたというよりは、消滅定理の専門家がトーリック多様体の上で頑張ってみたという感じだと私自身は思うのだが、みなさんの印象はどうなんだろうか？

6.5 (宣伝) ちなみに、論文 [L] の Lemma 4.3 (これは Fulton の教科書 [F1] の演習問題からとったようである) に反例を作り、正しい主張と一般次元での証明を以前メールで Lin さんに教えてあげたことがある。それで彼女は私をトーリック多様体論の偉い人と勘違いしているようである。この問題に関してはいずれどこかに発表すると思う。思いのほか簡単に反例が作れるのである。

7 今後の課題

最後に今後の課題や問題をいくつか取り上げる。

7.1 (スフェリカル多様体) 今回の証明の議論はスフェリカル多様体でトロイダルになっているもの（おそらく色無し扇が対応するスフェリカル多様体）に対してもほとんどそのまま適用可能である、というような

ことを 2006 年 12 月に越後湯沢で Alexeev 氏に指摘された。その後少し勉強しようかと思ったのだが、なかなか大変そうで全く勉強が進まない。スフェリカル多様体の専門家で私を助けてくれる人を募集中！連絡待っています！！

7.2 (ベクトル束) Manivel の結果を思い出しておこう。

定理 7.3 X を複素数体上定義された非特異射影的トーリック多様体で $\dim X = n$ とする。 E を X 上の豊富なベクトル束で階数を e とする。このとき、 $H^i(X, \Omega_X^p \otimes \wedge^a E) = 0$ が $i > e - a$ で、 $H^i(X, \Omega_X^p \otimes S^m E) = 0$ が $i \geq e$ で成立する。

論文 [Ma] の 5 章に載っている結果である。Payne 君に共同研究を持ちかけられた問題は、この定理も l 倍写像のテクニックで示せないか？である。少し考えてみたが、単純には無理そうである。フランス語で書かれているので私は Manivel の証明を読んでさえいない。 E を同変ベクトル束と仮定してもよくわからない。 X がトーリック多様体で E が同変ベクトル束であっても、それに付随する $\mathbb{P}_X(E)$ は一般にトーリック多様体でない。したがって、ベクトル束の話直線束の話に帰着させるといういつもの方法は使えないのである。そもそも、一般の体 k 上で Manivel の結果は成立するのだろうか？ X が特異点を持つときはどうなんだろうか？Payne 君も無責任な提案だったのか、その後連絡無しである。お互い別の仕事をしているので何の進展もない。皆さんのコメントをいただけるとありがたい。

8 追記

ここまでの部分は 2007 年の夏に書いた物である。元々は、2007 年 7 月に数理研で行われた「高次元代数多様体とベクトル束」の報告書として書いたのである。ところが、その研究集会の講究録は普通の講究録ではなく、講究録別冊であった。折角日本語で分かりやすい解説記事を書いたのに、英語で書いた物を提出するのが望ましいという雰囲気であった。そこで、頑張って [F2] の結果の幾つかを一般化し、論文 [F3] を書いた。ここで [F3] の結果のいくつかを大雑把に述べておきたい。詳しくは [F3] を見て頂くのが良いと思う。

8.1 (観察) $f: Z \rightarrow X$ をトーリック射とする。 $F^X: X \rightarrow X'$ を X の l 倍写像、 $F^Z: Z \rightarrow Z'$ を Z の l 倍写像とすると、以下の可換図式をえる。

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{F^Z} & Z' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ X & \xrightarrow{F^X} & X' \end{array}$$

$\mathcal{F}$ を Z 上の接続層とし、分裂準同型 $\alpha: \mathcal{F}' \rightarrow F_*^Z \mathcal{F}$ が存在すると仮定する。このとき、全ての j に対し、

$$R^j f'_* \alpha: R^j f'_* \mathcal{F}' \rightarrow F_*^X R^j f_* \mathcal{F}$$

も分裂準同型である。証明はほとんど明らかである。

この簡単な事実から次の定理をえる。

定理 8.2 (Kollár, ...) $f: Z \rightarrow X$ を固有なトーリック射とし、 A と B は Z 上のトーラス不変な被約なヴェイユ因子で、 A と B は共通成分を持たないとする。 $\pi: X \rightarrow S$ を射影的なトーリック射で、 L は X 上の π -豊富な直線束とする。このとき、

$$R^i \pi_*(L \otimes R^j f_* \tilde{\Omega}_Z^a(\log(A+B))(-A)) = 0$$

がすべての $i > 0$ 、 $j \geq 0$ 、 $a \geq 0$ に対して成立する。

注意 8.3 定理 8.2 内の $\tilde{\Omega}_Z^a(\log(A+B))(-A)$ は反射的な層で、 X の非特異部分 U に制限すると $\Omega_U^a(\log(A+B)) \otimes \mathcal{O}_U(-A)$ となるものである。定義 2.2 も見よ。

注意 8.4 定理 8.2 で Z を非特異、 S を一点とする。 $A = B = 0$ かつ $a = \dim Z$ とすると、定理 8.2 は $H^i(X, R^j f_* \mathcal{O}_Z(K_Z) \otimes L) = 0$ が全ての $i > 0$ 、 $j \geq 0$ に対して成立すると主張している。これは、Kollár の消滅定理としてよく知られている定理である。ただし、トーリック多様体に関しては、Kollár の消滅定理は Kodaira の消滅定理 (系 2.5 参照) にすぎないことが簡単にチェック出来る。

この定理の系として以下の系をえる。

系 8.5 (... , Mustață, ...) X は射影的なトーリック多様体で、 Y はトーラス不変な X の被約な閉部分スキームとする。 $\mathcal{I}_Y$ を Y の X 上の定義イデアルとし、 L を X 上の豊富な直線束とする。このとき、 $H^i(X, \mathcal{I}_Y \otimes L) = 0$ が任意の $i > 0$ に対して成立する。特に、制限写像 $H^0(X, L) \rightarrow H^0(Y, L)$ は全射である。

詳しくは [F3] を見て頂きたい。[F3] には上記結果以外にも、色々な結果が載っている。

つぶやき 8.6 [F3] では主にトーリック多様体上のトーラス不変な被約な閉部分スキームを扱っている。これは Ambro の意味での quasi-log variety の例になっている。このような可約な多様体上での消滅定理は、極小モデル理論の観点から見ると、すごく大切である。[F3] の動機は、もちろん極小モデル理論である。[藤] も読んで頂きたい。

つぶやき 8.7 最近 [HMP] なるプレプリントが世に出た。トーリック多様体上のベクトル束に関する消滅定理も扱っていると思う。私は読んでいないので詳しいことは分からない。

謝辞. JSPS から科学研究補助金、若手研究 (A)20684001 を受けている。稲盛財団からも研究費の補助を受けている。また、研究集会の世話役の先生方にも感謝する。

参考文献

- [AMRT] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, Y. Tai, *Smooth compactification of locally symmetric varieties*, Lie Groups: History, Frontiers and Applications, Vol. IV. Math. Sci. Press, Brookline, Mass., 1975. iv+335 pp.
- [BC] V. Batyrev and D. Cox, On the Hodge structure of projective hypersurfaces in toric varieties, *Duke Math. J.* **75** (1994), no. 2, 293–338.
- [BTLM] A. Buch, J. F. Thomsen, N. Lauritzen and V. Mehta, The Frobenius morphism on a toric variety, *Tohoku Math. J.* (2) **49** (1997), no. 3, 355–366.

- [D] V. I. Danilov, The geometry of toric varieties, Russian Math. Surveys **33** (1978), no. 2, 97–154.
- [F1] O. Fujino, Notes on toric varieties from Mori theoretic viewpoint, Tohoku Math. J. (2) **55** (2003), no. 4, 551–564.
- [F2] O. Fujino, Multiplication maps and vanishing theorems for toric varieties, Math. Z. **257** (2007), no. 3, 631–641.
- [F3] O. Fujino, Vanishing theorems for toric polyhedra, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu.
- [藤] 藤野 修, On injectivity, vanishing, and torsion-free theorems (単射性、消滅、捻れ不在定理について) , この講究録に掲載されているはず.
- [Fl] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies, **131**. The William H. Roever Lectures in Geometry. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. xii+157 pp.
- [HMP] M. Hering, M. Mustață, S. Payne, Positivity for toric vector bundles, preprint (2008).
- [KKMS] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings. I*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **339**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973. viii+209 pp.
- [L] H.-W. Lin, Combinatorial method in adjoint linear systems on toric varieties. Michigan Math. J. **51** (2003), no. 3, 491–501.
- [Ma] L. Manivel, Théorèmes d’annulation sur certaines variétés projectives, (French) [Vanishing theorems on some projective varieties] Comment. Math. Helv. **71** (1996), no. 3, 402–425.
- [Mu] M. Mustață, Vanishing theorems on toric varieties, Tohoku Math. J. (2) **54** (2002), no. 3, 451–470.
- [O1] T. Oda, *Torus embeddings and applications*, Based on joint work with Katsuya Miyake. Tata Institute of Fundamental Research

Lectures on Mathematics and Physics, **57**. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978. xi+175 pp.

- [O2] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry*, An introduction to the theory of toric varieties. Translated from the Japanese. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)* [Results in Mathematics and Related Areas (3)], **15**. Springer-Verlag, Berlin, 1988. viii+212 pp.