

余随伴軌道法による指標公式(Schmid-Vilonen et al) について

筑波大数学系 竹内 潔 (Kiyoshi Takeuchi)

近年の代数解析的手法の発達により無限次元表現の純代数的な研究が可能になった。特に相原によるプログラム ([13], [14] etc.) は表現と旗多様体上の ($G_{\mathbb{R}}$ -同変) 構成可能層と結びつけるもので、古来からの様々な表現の構成と統一している。この理論の枠組みを利用して最近表現論の重要な問題のいくつかが解かれた ([16], [23] ~ [25])。本小論説では、Schmid-Vilonen による 2 つ指標公式 [23] (Lie 環上の余随伴軌道による積分公式 type と、Atiyah-Bott 型の Lefschetz 不動点公式 type のもの) について筆者なりの解説を試みる。また Guillelmon ([8], [7]) による無限次元 index theorem への一般化についても少し言及したい。

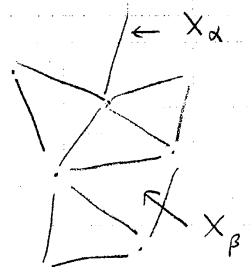
§1. 特性サイクルとその functorial property

この節ではまず旗多様体上の構成可能層を研究するための基礎的な用語を解説する。 X は以下実解析的多様体とし、 $D^b(X)$ により X 上の $\mathbb{C}_X$ -加群の層の複体のなす圏 (derived category) を表す。

Def (柏原 - Schapira [15])

$F^\bullet \in D^b(X)$ が $\mathbb{R}$ -constructible

$\Leftrightarrow$ $\exists$ X の stratification: $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$
(三角形分割)



($X_\alpha \subset X$ は実解析部分多様体) s.t.

$H^i(F^\bullet)|_{X_\alpha}$ は locally const sheaf of finite rank
 for $\forall i \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in A$

圏 $D^b(X)$ の元で $\mathbb{R}$ -constructible な元全体のなす
 充満部分圏を $D_{\mathbb{R}\text{-c}}^b(X) \subset D^b(X)$ で記す。 $F^\bullet \in$
 $D_{\mathbb{R}\text{-c}}^b(X)$ は定義により X のある stratification $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$
 X_α の各 stratum X_α 上コホモロジーが locally const た
 が、 $F^\bullet$ のマイクロ台 $SS(F^\bullet) \subset T^*X$ (defined in
 [15]) について次が成り立つ。

$$\Lambda := SS(F^\bullet) \subset \bigsqcup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X$$

こゝに $T_{X_\alpha}^* X$ は X_α の X における余法ベクトル

ル束である。このとき Λ の open dense subset Λ_0 であって

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \Lambda_0 \text{ は } T^*X \text{ の (subanalytic) submanifold} \\ \text{(ii)} \quad \Lambda_0 = \bigsqcup_{\beta \in B} \Lambda_\beta \quad \Sigma \text{ conn. component への分解} \\ \text{かつ} \quad \forall \beta \in B \text{ に対して } \exists \alpha \in A \text{ s.t.} \\ \Lambda_\beta \subset \underset{\text{open}}{T^*_{x_\alpha} X}, \end{array} \right.$$

とみたすものが存在する。以下各 Λ_β ($\beta \in B$) に整数 $m_\beta \in \mathbb{Z}$ を与えて、 $F \in D^b_{R-c}(X)$ の「特性サイクル」(characteristic cycle)

$$cc(F) = \sum_{\beta \in B} m_\beta [\Lambda_\beta]$$

を定義しよう。各 Λ_β に対して F の Λ_β での multiplicity m_β を

$$m_\beta := \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \dim^{\mathbb{C}} \left[\mathcal{H}^i_{[\phi \geq 0]}(F) \right]_x \quad \leftarrow \begin{array}{l} x \text{ の} \\ \text{stalk} \end{array}$$

で定める。ここには $p \in \Lambda_\beta \subset T^*_{x_\alpha} X$ を勝手な点として、 $x = \pi(p)$ ($\pi: T^*X \rightarrow X$)、 $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ は次とみたす実解析関数である。

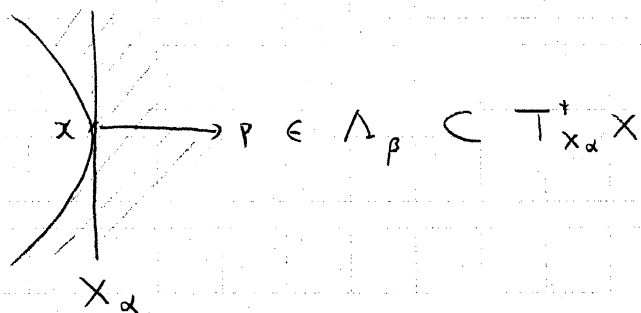
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{① } \phi(x) = 0 \\ \text{② } \Lambda_\phi = \{ (x, d\phi(x)) \mid x \in X \} \subset T^*X \text{ は} \\ T^*_{x_\alpha} X \text{ と } p \text{ と transversal に交わる。} \end{array} \right.$$

③ $\text{Hess}(\phi|_{X_\alpha})$ は $x \in X_\alpha$ で正定値

$P \in T_{X_\alpha}^+ X$ が以下の図のような場合

0

X



は $\{\phi \geq 0\} \subset X$ が斜線部になるようにとれる
よ。

[Def (柏原 [12]) $F \in D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ の 特性 cycle を形式和

$$CC(F) := \sum_{\beta \in B} m_\beta [\Lambda_\beta]$$
 で定義す。

これは (Borel-Moore homology の意味で) サイクル
 (Lagrangian cycle) であり、柏原 - Schapira [15] によ
 るより functorial な構成から サイクル になってい
 ることは自動的に従う。 $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ の distinguished
 triangle $F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow +1$ に対し

$$CC(F) = CC(F') + CC(F'')$$

が成り立つので $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ の Grothendieck 群を
 $K(D_{\mathbb{R}-c}^b(X))$ とおく。 $CC(*)$ は T^+X 内の
 Lagrangian cycle のなす群 $\mathcal{L}(X)$ への群準同型:

$$CC(*) : K(D_{\mathbb{R}-c}^b(X)) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$$

を induce する. [15] により 実際これは同型である。さて多様体の射 $f: Y \rightarrow X$ について

$$\begin{cases} f^{-1}: D_{\mathbb{R}-c}^b(X) \longrightarrow D_{\mathbb{R}-c}^b(Y) \\ \mathbb{R}f_!: D_{\mathbb{R}-c}^b(Y) \longrightarrow D_{\mathbb{R}-c}^b(X) \end{cases}$$

が $\mathcal{L}$ の sheaf の level での operation があるが、これが $CC(*)$ をとおいて、Lagrangian cycle の方へ移った場合に $\mathcal{L}$ 上の operation に対応するが考えよう。例えば $f: Y \rightarrow X$ が smooth の場合は

例 $f: Y \rightarrow X$ が smooth のとき、自然な射

$$T^*Y \xleftarrow{\quad \tau \quad} Y \times_X T^*X \xrightarrow{\quad \tau \quad} T^*X \quad \text{について}$$

$$CC(f^{-1}F) = \tau_* \tau^{-1} [CC(F)]$$

$$\text{for } \forall F \in D_{\mathbb{R}-c}^b(X).$$

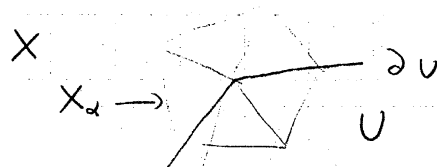
となる。 $f: Y \rightarrow X$ が $F \in D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ に対して非特異な場合は 柏原-Schapira によりよく解っていたが、一般の射 $f: Y \rightarrow X$ に対する $CC(*)$ の functorial property は長らく未解明であった。最近 Schmid-Vilonen [22] はこの問題を解決した:

Schmid - Vilonen の open embedding theorem

$U \hookrightarrow X$: open (subanalytic) subset とする. $F' \in D_{\mathbb{R}-c}^b(U)$
 に対し $\exists X$ の stratification $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ (locally finite) s.t.
 {その一部の union が U かつ ∂U に なり

F' に適合している }

とせよ. このとき $Rj_*(U) \in D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ である
 が.



Theorem (S-V [22])

$$CC[Rj_*(F')] = \lim_{s \rightarrow +0} \left[CC(F') + s \underbrace{d \log f}_{\text{"} df/f \text{"}} \right]$$

in T^*X . ここで $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ は

$f|_{\partial U} = 0$, $f|_U > 0$ をみたす 連続関数.

この定理は $\mathcal{D}$ -module の 特性サイクル についての
 Ginsburg [7] の結果 ($\mathbb{C}$ -constructible sheaf につい
 てのもの) を $\mathbb{R}$ -constructible にまで一般化したも
 のである. 証明は $Rj_*(F') \in D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ の 超局
 所的な multiplicity $m_p (SS(Rj_*(F')) \supset \Lambda_0 =$
 $\bigsqcup_{p \in B} \Lambda_p)$ along Λ_p を 定義より 局所コホモロジー
 の言葉で記述し, stratified Morse theory (または
 柏原-Schapira の マイクロ台の理論) を用いて

変形する = 2 2 なせる。以下のような応用
が得られる。

応用例

- ① $f: Y \rightarrow X$: 任意の morph. のとき, $\forall F' \in D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ について, $CC(f^{-1}F')$, $CC(f^!F')$ が $CC(F')$ を用いて記述できる。

(すなわち, 柏原-Schapira の「非特異性」の仮定がおとせる。)

- ② $Y \xrightarrow[p]{} X$: smooth non-proper map として,

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \text{ コンパクト化: } \overline{Y} \xleftarrow[\text{open}]{\hookrightarrow} Y \\ \exists f: \overline{Y} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ s.t. } \partial Y = \{f=0\} \\ f|_Y > 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow CC(\mathbb{R}P_*(F'))$$

$$= \lim_{s \rightarrow +0} \tau_* \mathcal{L}^{-1} [CC(F') + s d \log f]$$

$$\text{for } \forall F' \in D_{\mathbb{R}-c}^b(Y).$$

ここで,

$$T^*Y \xleftarrow{\mathcal{L}} Y \times_X T^*X \xrightarrow{\tau} T^*X.$$

すなわち, proper ではない射についての direct image の $CC(*)$ のふるまいが明らかになった。

§2. twisted モーメント写像と Weyl 群の作用

この節では前節の結果を用いて X が旗多様体の場合に同型

$$CC(*) : K(D_{\mathbb{R}-c}^b(X)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(X)$$

が W -同変 (W は Weyl 群) であることを示す。

ここでは Schmid-Vilonen [22] の後半にしたがうが、

最近 Božičević [5] という人も簡明な別証を得て

いるようである。まず指標公式の紹介のための

準備もかねて Rossmann [20] による twisted モーメント

写像を復習する。以下

$$\begin{cases} G : \text{複素半単純 Lie 群} \\ H : \text{Cartan} \subset B : \text{Borel} \subset G \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{対応する Lie algebras} \\ \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g} \end{array} \right)$$

として、

$$X = G/B : \text{flag mfd とする。} \quad \text{特に}$$

$$\begin{cases} W := \{ \mathfrak{g} \text{ の } \mathfrak{h} \text{ にかんする Weyl 群} \} \supset \mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^* \\ \Delta := \{ \quad \quad \quad \text{root 系} \} \subset \mathfrak{h}^* \\ \Delta^+ := \{ \quad \quad \quad \text{正 root 系} \} \subset \Delta \end{cases}$$

とする。ただし $\Delta^- = \Delta \setminus \Delta^+$ の root space の直和

と $\mathfrak{h}$ の和が $\mathfrak{g}$ となるように Δ^+ を定めた。 $\forall x \in X$

の isotropy subalgebra $\mathfrak{h}_x$ について同型

$$\mathfrak{h}_x / [\mathfrak{h}_x, \mathfrak{h}_x] \simeq \mathfrak{h} / [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \leftarrow \mathfrak{h}$$

が成立することに注意しよう。その意味で $S-V(22)$ は $\mathfrak{h}$ を "universal Cartan" と呼んでいい。

X 上の vector bundle $\mathfrak{g} \times X$ の部分束として。

$$\tilde{\mathfrak{h}} := \{ (\mathfrak{z}, x) \mid x \in X, \mathfrak{z} \in \mathfrak{h}_x := [\mathfrak{h}_x, \mathfrak{h}_x] \}$$

を考えたとき、完全列

$$0 \rightarrow \mathfrak{h} \times X \rightarrow (\mathfrak{g} \times X) / \tilde{\mathfrak{h}} \rightarrow TX \rightarrow 0$$

が得られる ($\because T_x X \simeq \mathfrak{g} / \mathfrak{h}_x$ for $\forall x \in X$)。この双対をとれば、

$$0 \rightarrow T^*X \rightarrow [(\mathfrak{g} \times X) / \tilde{\mathfrak{h}}]^* \rightarrow \mathfrak{h}^* \times X \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccccc} & & & \text{1-st projection} & \\ & & & \downarrow & \\ & & & \mathfrak{h}^* & \\ \nearrow \exists p & & \searrow \exists q & & \\ \mathfrak{g}^* & & & & \end{array}$$

$\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} / \mathfrak{h}_x$ の dual により

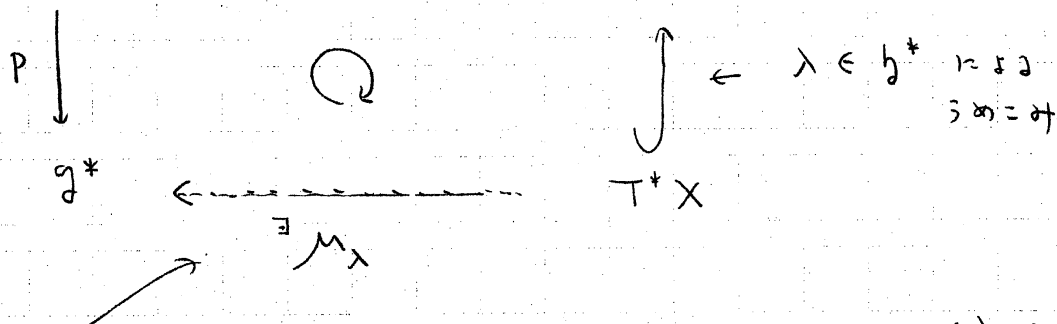
次の図式が得られる。

$$\left[\text{Def} \quad \lambda \in \mathfrak{h}^* \text{ に対し } \Omega_\lambda := \underset{\text{def}}{p \circ q^{-1}}(\lambda) \subset \mathfrak{g}^* \text{ に対し} \right]$$

λ が regular ならば Ω_λ は $\mathfrak{g}^*$ 内の regular semisimple

coadjoint G -orbit. 一方 $\lambda = 0$ の場合は Ω_λ は

$$[\mathfrak{g} \times X / \tilde{h}]^* \xleftarrow{\sim} T^*X \oplus (\mathfrak{h}^* \times X)$$



この twisted エ-メント写像 が定まる. ($\lambda = 0$ のときは 通常のエ-メント map)

- 性質 ① $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対し, $\mu_\lambda(T^*X) = \Omega_\lambda$
- ② $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ が regular ならば $\mu_\lambda: T^*X \xrightarrow{\sim} \Omega_\lambda$
同型

以下に Weyl 群 W の $CC(*): K(D_{\mathbb{R}-c}^b(X)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(X)$ の両辺への作用を考えよう.

W の $K(D_{\mathbb{R}-c}^b(X))$ への作用 (Beilinson-Bernstein [3])

Def $x, y \in X$ について, 「 y が x に対して relative position $w \in W$ にある」

$$\Leftrightarrow \text{def} \quad \mathfrak{h}_x / [\mathfrak{h}_x, \mathfrak{h}_x] \simeq \mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}_y / [\mathfrak{h}_y, \mathfrak{h}_y]$$

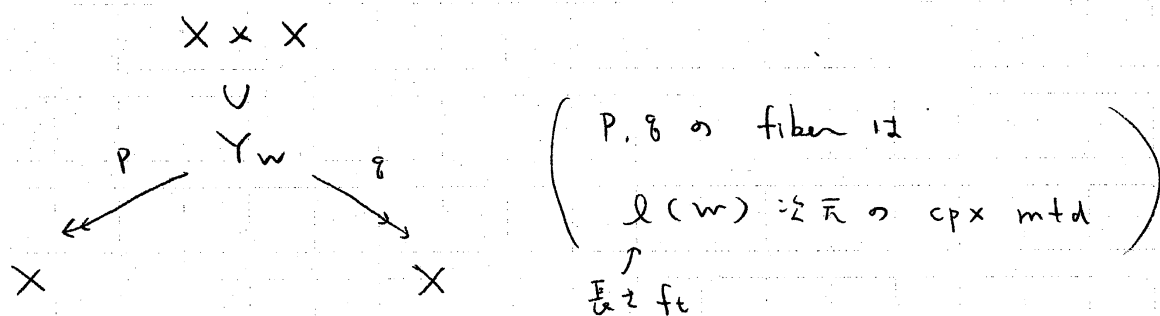
$$\cup \quad \cup$$

$$\Delta_x^+ \quad \Delta_y^+$$

$$\mathfrak{h} \text{ の中で } w(\Delta_x^+) = \Delta_y^+ \quad \leftarrow \text{対応する positive roots}$$

$$Y_w := \{ (x, y) \in X \times Y \mid y \text{ は } x \text{ に対して rel. pos } w \}$$

$\subset X \times X$ を考え X 上の smooth fibrations



Σ 作用 W . $w \in W$ による作用 Σ

$$I_w : K(D_{\mathbb{R}-c}^b(X)) \longrightarrow K(D_{\mathbb{R}-c}^b(X))$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$F \longmapsto Rq_* p^{-1}(F) [l(w)]$$

のように sheaf の “積分変換” で定義できる。

W の Lagrangian cycle $\mathcal{L}(X)$ への作用 (by Rossmann)

まず h^+ の中への curve : $\lambda : [0, 1) \rightarrow h^+$ を

$$\begin{cases} \lambda(0) = 0 \\ \lambda(s) \text{ は regular for } \forall s > 0 \end{cases}$$

をみたすもの Σ である。 $w \in W$ に対して, $s > 0$ かつ

$$T^*X \xrightarrow[\mu_{\lambda(s)}]{\sim} \Omega_{\lambda(s)} = \Omega_{w(\lambda(s))} \xleftarrow[\mu_{w(\lambda(s))}]{\sim} T^*X.$$

はすべて同型である。

よって Lagrangian cycle $C \in \mathcal{L}(X)$ ($C \subset T^*X$)

に対して

$$J_w(C) := \lim_{s \rightarrow +0} [\mu_{w(\lambda(s))}]^{-1} \mu_{\lambda(s)}(C)$$

$\in \mathcal{L}(X)$ である。 二枚も作用 $W \ni \mathcal{L}(X)$ になる。
 J_*

Theorem (S-V '96 [22])

$$CC(*) : K(D_{\mathbb{R}-c}^b(X)) \xrightarrow{\sim} L(X)$$

は W -同変である。

この定理は complex case ($\mathcal{D}$ -加群の場合) の
柏原 - 谷崎 [17] による結果の一般化である。

証明の概略

$F' \in D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ $\geq$ simple root $\alpha \in \Delta$ による鏡写
 $S_\alpha \in W$ について

$$CC(I_{S_\alpha}(F')) = J_{S_\alpha} CC(F')$$

を示せばよい。ここに

$$X \xleftarrow{p} Y_{S_\alpha} \xrightarrow{q} X$$

は $\mathbb{C}$ -fibration で $I_{S_\alpha}(*) = Rq_* p^{-1}(*) [1]$

の Rq_* の部分は non-proper direct image である。

従ってこの部分に S-V [22] の open embedding

theorem の系としてみた「応用例②」を用いられ

ばよい。



§3. 余随伴軌道による指標公式 (S-V '98 [1])

さて以上の多少長々しい準備の上で、Schmid -
Vilonen [23] による指標公式の1つを紹介しよう。

これはいわゆる「Kirillov の軌道法」を一般化するもので、表現論の世界の夢の一つであったと聞く。Schmid-Vilonen は実 Lie 群 $G_{\mathbb{R}}$ の表現が旗多様体 X 上の構成可能層 $F' \in D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ と結びつけられたことを利用して、cycle $CC(F')$ $\subset T^*X$ の twisted モーメント map $\mu_\lambda: T^*X \rightarrow \mathfrak{g}^*$ による像 $\mu_\lambda(CC(F'))$ 上の積分を用いて表現の指標公式を得ることに成功した。実の Lie 環 $i\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^* \subset \mathfrak{g}^*$ の中では十分に多くの $G_{\mathbb{R}}$ -orbit がない欠点を、複素 Lie 環 $\mathfrak{g}^*$ 上へ出て、さらに $CC(F')$ のように multiplicity を許した cycle を考えることで従来の困難を克服している。

さて $G \supset B \supset H$ は §2 のとおりとして、

$$\left\{ \begin{array}{l} G \supset G_{\mathbb{R}} : G \text{ の 1 つの実形} \\ G_{\mathbb{R}} \supset K_{\mathbb{R}} : \text{極大コンパクト群の 1 つ.} \\ K : K_{\mathbb{R}} \text{ の } G \text{ 内での複素化} \end{array} \right. \quad \text{とする.}$$

以下では実単純 Lie 群 $G_{\mathbb{R}}$ の無限次元表現

$\rho: G_{\mathbb{R}} \times E \rightarrow E$ を admissible なもの ($H C(E) := \{E \text{ の } K_{\mathbb{R}}\text{-finite vectors}\}$ の各 $K_{\mathbb{R}}$ -representation の isotypic component が有限次元となる) のみを考察する

(ユ=タリ-表現は admissible). Harish-Chandra 準同型

$$\gamma: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \simeq S(\mathfrak{h})$$

をその image が $\mathfrak{h}^*$ 上の 0 を中心とする W -作用で不変な多項式環 $S(\mathfrak{h})^W$ と同じようにとり、環準同型 $\chi_\lambda: \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C}$ ($\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ は $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の center) を $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ における evaluation

$$\begin{array}{ccc} \chi_\lambda: \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Z} & \longmapsto & \gamma(\mathcal{Z})(\lambda) \end{array}$$

で定める.

Def $G_{\mathbb{R}}$ の admissible rep (ρ, E) が中心指標 χ_λ をもつ $\iff$ $\forall \mathcal{Z} \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ に対して $\mathcal{Z}$ は E へ
def
 スカラー倍 $\chi_\lambda(\mathcal{Z})$ で作用す.

Schur の Lemma により $G_{\mathbb{R}}$ の $\forall$ 既約表現は ある $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ について中心指標 χ_λ をもつ. また

$$\lambda = \rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha \quad (\text{正ルートの和の半分})$$

のとき χ_ρ を自明な中心指標と呼ぶ.

構成可能層による表現の構成 (柏原-Schmid [16])

ではこれより $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対する (flag mtd X 上の constructible sheaf F を用いた) $G_{\mathbb{R}}$ の中心指標 χ_λ をもつ表現の

構成 (by [16]) に よって述べてよう。 まず $N := [B, B]$ とし, Beilinson - Bernstein に よる enhanced flag mtd $\hat{X}$

$$\hat{X} := X/N \xrightarrow{\tau} G/B = X$$

Σ flag mtd X 上に なる, これは H -主束 $G_{\mathbb{R}} \times H$ の作用 Σ ともう。

Def $\hat{X}$ 上の 層 F が $F \in Sh_{\lambda-\rho}$ ($\lambda \in \mathfrak{h}^*$)
 $\Leftrightarrow$ F は $\tau: \hat{X} \rightarrow X$ の 各 fiber $\simeq H$
 上に $e^{\lambda-\rho}$ と同じモノドロミ Σ ともう。

Σ による forgetful functor: $D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{\lambda} \rightarrow D^b(Sh_{\lambda-\rho})$
 Σ ともう 「twist $\lambda-\rho$ Σ ともう $G_{\mathbb{R}}$ -equivariant derived category」 $D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{\lambda}$ Σ ともう (cf. B-L [4]).
 同様に,

$$\mathcal{O}_X(\lambda) = \{ f \in \mathcal{O}_{\hat{X}} \mid f \text{ は } \tau \text{ の 各 fiber } \simeq H \\ \text{ 上に } \text{const} \times e^{\lambda-\rho} \} \subset \mathcal{O}_{\hat{X}}.$$

Σ ともう. $\mathcal{O}_X(\lambda) \in Sh_{\lambda-\rho}$ Σ ともう.

Σ ともう $F' \in D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{-\lambda}$ に対して, その Verdier 双対 $\mathbb{D}(F')$ は $D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{\lambda}$ の π Σ ともう.

$$\begin{aligned} & \mathbb{R} \text{Hom}(\mathbb{D}(F'), \mathcal{O}_X(\lambda)) \\ &= \mathbb{R}P(X; \mathbb{R} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{D}(F'), \mathcal{O}_X(\lambda))) \end{aligned}$$

の各コホモロジーは $G_{\mathbb{R}}$ の表現となる。 $G_{\mathbb{R}}$ の表現 (ρ, E) に対して、その指標超関数 $\in \mathcal{D}'(G_{\mathbb{R}})$ を $\mathbb{H}(E)$ とかく。 $F' \in D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{-\lambda}$ の vertical character $\in \mathcal{D}'(G_{\mathbb{R}})$ ($G_{\mathbb{R}}$ 上の distribution) を

$$\mathbb{H}(F') := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i \mathbb{H} \left[H^i R\mathrm{Hom}(\mathbb{D}(F'), \mathcal{O}_X(\lambda)) \right]$$

とおく。我々の目標は $\mathbb{H}(F')$ を F' の幾何学的な invariant $CC(F') \in \mathcal{L}(X)$ で記述することである。

$G_{\mathbb{R}}$ の表現から $F' \in D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{-\lambda}$ への逆対応

今度は逆に $G_{\mathbb{R}}$ の中に指標 χ_{λ} をもつ表現 (ρ, E) より出発して $F' \in D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{-\lambda}$ を再構成する道筋を述べよう。 $\lambda - \rho$ が integrable な場合は、表現 $e^{\lambda - \rho}: H \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ (とその延長 $e^{\lambda - \rho}: B \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$) より associated line bundle

$$L_{\lambda - \rho} \longrightarrow X = G/B$$

が得られる。この line bdl の正則切断のなす可逆層 $\mathcal{L}_{\lambda - \rho}$ は先述の $\mathcal{O}_X(-\lambda + 2\rho)$ と一致する。

この G -同変ベクトル束 $\mathcal{L}_{\lambda - \rho}$ へ作用する twisted differential operators の層 $\mathcal{D}_{\lambda - \rho}$ を

$$\mathcal{D}_{\lambda-\rho} := \mathcal{L}_{\lambda-\rho} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_{\lambda-\rho}^{\otimes -1}$$

で定義する。

直接

$\lambda-\rho$ が integrable でない場合も $\mathcal{D}_{\lambda-\rho}$ は構成することができて、以下の対応が成立する。

$$\{ \text{中心指標 } \chi_\lambda \text{ をもつ } G_{\mathbb{R}}\text{-rep} \} \ni (\rho, E)$$

↓

$$\{ \text{" } (\mathfrak{g}, k)\text{-加群} \} \ni HC(E)$$

↓

$$\int \text{Beilinson-Bernstein 対応} \\ ([2])$$

↓

$$\{ X \text{ 上の } \mathcal{D}_{\lambda-\rho}\text{-加群} \} \ni \mathcal{M}_{\lambda-\rho}$$

$$\int \text{Riemann-Hilbert 対応} \\ (\text{相原, Mebkhout})$$

↓

$$D_K^b(X)_{-\lambda} \ni DR(\mathcal{M}_{\lambda-\rho}) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\lambda-\rho}}(\mathcal{L}_{\lambda-\rho}, \mathcal{M}_{\lambda-\rho})$$

$$\int \text{Mirković-Uzawa-Vilonen} \\ [18] \text{ の 松本対応} \\ \text{for sheaves}$$

$$D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{-\lambda}$$

$$\ni F^\bullet$$

↙

このように $G_{\mathbb{R}}\text{-rep } (\rho, E)$ から $F^\bullet \in D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{-\lambda}$ が復元されて、このとき

$$H^i R\mathcal{H}om(\mathbb{D}(F^\bullet), \mathcal{O}_X(\lambda)) = 0 \quad \text{for } i \neq 0$$

が成立する。

S-V '98 [23] の指標公式の 1つ

さて、いよいよ Schmid-Vilonen [23] による 余随伴軌道積分型の指標公式を述べよう。指数写像

$$\exp : \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$$

により $G_{\mathbb{R}}$ 上の distribution Σ pull back して, Lie algebra

character $\theta(F) \stackrel{\text{def}}{:=} \sqrt{\det(\exp_*)} \exp^*(\mathbb{H}(F))$

Σ 代わりに考えよう。大雑把にいうと、彼らの結果は『 $\theta(F)$ は $\mu_{\lambda}(CC(F)) \subset \mathfrak{g}^*$ に台をもつ

δ -関数の Fourier 変換にな、という』という

ものである。

Def $\phi \in C_0^\infty(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ の Fourier 変換 $\hat{\phi}$ ($\mathfrak{g}^*$ 上の正則関数) Σ . $\mathfrak{g} \in \mathfrak{g}^*$ に対して次で定義する。

$$\hat{\phi}(\mathfrak{g}) := \int_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} e^{\mathfrak{g}(x)} \phi(x) dx$$

Hörmander の定理
より $i\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^* \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ の制限は急減少関数

このとき、次が成り立つ。

Theorem (S-V '98 [23]) $\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*, \forall F \in D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{-\lambda}$

に対して,

$$\int_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} \theta(F) \phi dx = \frac{1}{(2\pi i)^n n!} \int_{CC(F)} \mu_{\lambda}^*(\hat{\phi}) (-\overleftarrow{\sigma} + \pi^* \tau_{\lambda})^{\otimes n}$$

T^*X の symplectic 2-form
 $\dim^{\mathbb{C}} X$

ここで $\pi: T^*X \rightarrow X$, τ_{λ} は X 上のある 2-form.

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ が regular ならば, G -coadjoint orbit $\Omega_\lambda \subset \mathfrak{g}^*$ の canonical symplectic form σ_λ について

$$\mu_\lambda^* \sigma_\lambda = (-\sigma + \pi^* \tau_\lambda)$$

$$(\mu_\lambda: T^*X \xrightarrow[\text{同型}]{} \Omega_\lambda \subset \mathfrak{g}^*)$$

が成立するので, 上の公式は次のように非常に簡明な形になる.

Corollary $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ が regular ならば, $\forall F' \in D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{-\lambda}$ および $\phi \in C_0^\infty(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ に対して,

$$\int_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} \theta(F') \phi dx = \frac{1}{(2\pi i)^n n!} \int_{\mu_\lambda(CC(F'))} \hat{\phi} \sigma_\lambda^n$$

証明の概略 $F' \in D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{-\lambda}$ を distinguished triangle $F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow +1$ により簡単なものに分解する. flag mfd X の各 $G_{\mathbb{R}}$ -orbit に associate した次の "standard sheaf" $\in D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{-\lambda}$ について等式を示せばよいことになる.

Def $G_{\mathbb{R}}$ -orbit $S \subset X$ 上の $G_{\mathbb{R}}$ -同変局所系 F with twist $-\lambda - \rho$ に対して

$$Rj_*(F) \in D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{-\lambda} \quad (j: S \hookrightarrow X)$$

[それが] $\mathcal{E}$ の standard sheaf である。

Step 1 open orbit $S \subset X$ について $\mathcal{E}$ は standard sheaf
は $Rj_*(\mathbb{C}_S) \in D_{G_R}^b(X)_{-\lambda}$ を考えればよく、

$$\begin{aligned} & \textcircled{H} (Rj_*(\mathbb{C}_S)) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i \textcircled{H} [H^i R\text{Hom}(\mathbb{D}(Rj_*\mathbb{C}_S), \mathcal{O}_X(\lambda))] \\ &\simeq \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \textcircled{H} [H^i(S; \mathcal{O}_X(\lambda))] \end{aligned}$$

のように古典的な discrete series の結果に帰着する。この場合の指標の積分公式は、Rossmann [20] の公式を open embedding theorem を用いて書きかえたものになり、その課程で Schmid の学位論文 [21] の結果が使われている。

Step 2 Step 1 の結果を放物誘導の手法を用いて、maximally real orbits $S \subset X$ の場合へ一般化している。この部分はかなり専門的で私にはよく解らなかった。maximally real orbit とは G_R -orbit である種のルート系の数 $c(S)$ が 0 であるものである。

Step 3 一般の G_R -orbit $S \subset X$ について $c(S) \geq 0$ について induction で Step 2 に帰着する。

$S_0 \subset X$: $G_{\mathbb{R}}$ -orbit に對し $c(S_0) > 0$ とす。
 S_0 に付随した standard sheaf $F_0 \in D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{-\lambda}$ による指標公式を示そう。

このとき $\exists S_1 \subset X$: 別の $G_{\mathbb{R}}$ -orbit s.t.
 $c(S_1) = c(S_0) - 1$, $\exists F_1$: S_1 に付随した standard sheaf s.t.

$$I_{S_\alpha}(F_1) = F_0[1] \text{ for a simple root } \alpha \in \Delta^+.$$

これは $\mathbb{Q}$ -fibrations $X \xleftarrow{p} Y_{S_\alpha} \xrightarrow{q} X$ による

$$I_{S_\alpha}(F_1) = Rq_* p^{-1}(F_0)[1]$$

である。§2 の最後の結果より

$$CC(F_0) = CC(I_{S_\alpha}(F_1)[-1])$$

$$= -J_{S_\alpha}[CC(F_1)] \text{ である。}$$

よって

$$\int_{CC(F_0)} \mathcal{M}_\lambda^*(\hat{\phi}) (-\sigma + \pi^* \tau_\lambda)^n$$

$$= - \int_{J_{S_\alpha}[CC(F_1)]} \mathcal{M}_\lambda^*(\hat{\phi}) (-\sigma + \pi^* \tau_\lambda)^n$$

$$\parallel \leftarrow J_{S_\alpha}[CC(F_1)] = \lim_{t \rightarrow +0} [\mathcal{M}_{t\lambda}^{-1} \circ \mathcal{M}_{tS_\alpha(\lambda)}](CC(F_1))$$

$$\int_{\mathcal{M}_\lambda^{-1} \circ \mathcal{M}_{S_\alpha(\lambda)}(CC(F_1))} \mathcal{M}_\lambda^*(\hat{\phi}) (-\sigma + \pi^* \tau_\lambda)^n$$

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ is regular and so. 図式

$$T^*X \xrightarrow{\mu_\lambda} \Omega_\lambda = \Omega_{s_\alpha(\lambda)} \xleftarrow{\mu_{s_\alpha(\lambda)}} T^*X$$

および $\mu_\lambda^* \Omega_\lambda = (-\sigma + \pi^* \tau_\lambda)$ を用いる。

$$= - \int_{CC(F_1)} \mu_{s_\alpha(\lambda)}^* (\hat{\phi}) (-\sigma + \pi^* \tau_{s_\alpha(\lambda)})^n$$

λ が regular でない所は 等式の両辺が $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ について正則な $\pm$ ([23] の Prop 3.7) を用いて、一致の定理で示す。

← induction の仮定 ($c(s_1) < c(s_0)$)

$$= - (2\pi i)^n n! \int_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} \theta(F_1) \phi dx$$

$$= (2\pi i)^n n! \int_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} \theta(F_0) \phi dx$$

↑ H-M-S-W [10]

の結果 ($\theta(F_1) = -\theta(F_0)$)

□

以上が証明のあらましであらう。だが、S-V [22] の open embedding theorem は [24] において公表された後の結果においても本質的な役割を果たしている。そしてこれは [18] による層の松本対応 (non-proper direct image が関係する) による特性サイクル

CC(*) のふるまいの解明により、柏原 [14] による予想の 1 つが解かれていた。実際、そのためには、open embedding theorem を広中の subanalytic subset よりも広い集合族を基礎とした constructible sheaf の圏へ拡張しておく必要があるのだが、数学基礎論のモデル理論によりそのような集合族の構成が可能になった (van den Dries-Miller [6])。subanalytic set は多様体の射による順像などの operation について閉じた最も広い概念と今まで考えられ、柏原-Schapira [15] の $\mathbb{R}$ -constructible sheaf の理論もその上に立って築かれていた。しかしながら、モデル理論は逆に、subanalytic category はそうした性質を満たす最小の圏であることを教えてくれた訳である。

§4. Atiyah-Bott-Lefschetz 型の不動点公式

さて Schmid-Vilonen [23] のもう一つの指標公式について述べよう。これは $G_{\mathbb{R}}$ がコンパクト群の場合に表現を Borel-Weil 構成で flag mtd X 上の G -同変ベクトル束のコホモロジーとし

て実現した場合の指標公式を、一気に non-compact 群に拡張する結果である。 $G_{\mathbb{R}}$ がコンパクトの時は、これは Atiyah-Bott [1] の Lefschetz 型不動点公式によって与えられ、いわゆる Weyl の指標公式の幾何学的意味合いを明らかにしたものであった。 柏原 [13] や 柏原-Schmid [16] の理論は、flag mtd X 上の定数層 $\mathbb{C}_X$ を一般の $G_{\mathbb{R}}$ -同変な constructible sheaf $F \in D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{-\lambda}$ で置きかえて、Borel-Weil 構成をはるかに一般化したものである。 そこでこの新しい構成法による表現の指標を F の幾何的な量で記述するという問題が生じてくる。

$G'_{\mathbb{R}}$ を $G_{\mathbb{R}}$ の正則半単純元全体の集合とする。 すると Harish-Chandra の結果により $G_{\mathbb{R}}$ 上の指標超関数 $(H)(F) \in \mathcal{D}'(G_{\mathbb{R}})$ は $G'_{\mathbb{R}}$ 上では実解析関数となり、また実際 $G'_{\mathbb{R}}$ 上での値で完全に決まってしまう。 $\forall g \in G'_{\mathbb{R}}$ に対して g を通る Cartan $T_{\mathbb{R}} \subset G_{\mathbb{R}}$ があるので

$$T'_{\mathbb{R}} := T_{\mathbb{R}} \cap G'_{\mathbb{R}}$$

上での $(H)(F)$ ($F \in D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{-\lambda}$) の値を記述すれ

はよい。以下この $T_{\mathbb{R}}$ を $1 \rightarrow \text{fix}$ する。 $g \in T_{\mathbb{R}}'$ の X での不動点集合を

$$X_g := \{x \in X \mid gx = x\} \subset X$$

とかくと、 $\# X_g = \# W$ が成立して、これは $g \in T_{\mathbb{R}}'$ のとり方によらない。よ、これを X_T と記すことにしよう。各 $x \in X_T$ に対して

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] & \simeq & \mathfrak{h}_x/[\mathfrak{h}_x, \mathfrak{h}_x] \hookrightarrow \mathfrak{t} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lambda & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \lambda_x \end{array} \quad \leftarrow \begin{array}{l} x \in X_T \\ \text{ここは} \\ \text{黒い} \end{array}$$

なる同型が $T_{\mathbb{R}}$ の Lie $\mathfrak{al}_g$ の複素化 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ について成り立つ。以上の記号の下で：

Theorem (Schmid-Vilonen [23], $\lambda = \rho$ の時は落合 [19] も)

$\forall g \in T_{\mathbb{R}}'$ に対して。

$$(H)(F)(g) = \sum_{x \in X_T} \frac{c_{g,x} e^{(\lambda-\rho)_x}(g)}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha_x})(g)}.$$

ここで $c_{g,x} \in \mathbb{C}$ は g の $F \in D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{-\lambda}$ への作用の不動点 $x \in X_T$ における "local contribution" と呼ばれているものである。

上の公式の "local contribution" は相原 [13] にお

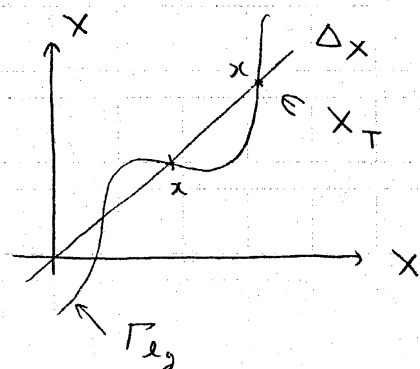
いて導入され、その論文における character cycle $ch(F)$ の $X \times \{g\} \hookrightarrow X \times G$ における「切り口」と一致している。S-V [23] ではやはりこの定理も X の中の各 $G_{\mathbb{R}}$ -orbit に同伴する standard sheaf に分け証明している。但し表現論的設定に余りに深く依存した証明は私には大変難しく感じられた。その意味では落合 [19] の証明の方が、 $(\lambda = \rho$ すなわち trivial な中心指標の場合しか扱っていないかも知れない) ずっと見通しが良いように感じられた。実際、「表現論の設定にこの定理は関係しないであろう」と予想することは次の例をみてみれば、それほど不自然ではない。

例 $G_{\mathbb{R}} = U_{\mathbb{R}}$ (G のコンパクト実形) の場合、 X の $G_{\mathbb{R}}$ -orbit は X 全体で、 $F \in D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{-\lambda}$ は定数層 $F = \mathbb{C}_X$ のみ。よって上の指標公式は

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \operatorname{tr} \left\{ (\ell_g^{-1})^* : H^i(X; \mathcal{O}_X(\lambda)) \rightarrow H^i(X; \mathcal{O}_X(\lambda)) \right\} \\ &= \sum_{g \in T_{\mathbb{R}}'} \frac{\pm e^{(\lambda-\rho)_X(g)}}{\det \left\{ (\operatorname{Id} - (\ell_g)^*) : T_x^* X \rightarrow T_x^* X \right\}} \end{aligned}$$

for $\forall g \in T_{\mathbb{R}}'$ のように、Atiyah-Bott [1] によるものと一致する。($\lambda - \rho$ は integral である)

この例の分子の local contribution $c_g(x) \in \mathbb{C}$ の部分は、 ± 1 だが、これは $g \in T_{\mathbb{R}}'$ による左移動 $l_g: X \rightarrow X$ のグラフ $\Gamma_{l_g} \subset \text{diagonal } \Delta_X \hookrightarrow X \times X$ の $x \in X_T = X_g = \Gamma_{l_g} \cap \Delta_X$ における「交点数」となっている。



local contribution の幾何的意味は Goresky-MacPherson によっても (定数層とは限らない) 一般の F について研究されている。ここで公式の分母が

$$\prod_{x \in X_T} (1 - e^{-\alpha_x}) (g) = \det \{ (\text{Id} - (l_g)^*) : T_x^* X \rightarrow T_x^* X \}$$

のように l_g の不動点のまわりでの作用の固有値が書かれていることに着目しよう。すなわちもう X が flag mtd であることが、 $l_g: X \rightarrow X$ が群作用であることは完全に忘れて、以下のような定理が背景にあることが推察される。

定理 X はコンパクト複素多様体, $l: X \rightarrow X$ は不動点集合 $X_l = \{x \in X \mid lx = x\}$ が discrete

な微分同相とし、 $F' \in D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ に対し、同型

$$\mathcal{L}^* F' \xrightarrow{\sim} F'$$

が与えられていよとせよ。このとき任意の

X 上の正則ベクトル束 $\mathcal{L}$ で $\mathcal{L}^* \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$ な

るもの (G -同変ベクトル束に対応) に対し

て

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i \operatorname{tr} \left\{ \mathcal{L}^* : \operatorname{Ext}^i(F'; \mathcal{L}) \rightarrow \operatorname{Ext}^i(F'; \mathcal{L}) \right\}$$

$$= \sum_{x \in X_{\text{cl}}} \frac{C_x(F') \times \text{const.}}{\det \{ (\operatorname{Id} - \mathcal{L}^*) : T_x^* X \rightarrow T_x^* X \}}.$$

($C_x(F')$ は F' の $\mathcal{L} : X \rightarrow X$ による $x \in X_{\text{cl}}$ での local contribution)

この定理 (予想) は、夏の研究集会の際に「大変面白いが難しいような問題」として講演の最後に話す予定であった。しかし筆者は京都へ着いて Schapira 氏と話をしていた。この問題は Guillermou [9] により解かれたばかりであることを知った。講演の前々日のことであった。その後早速プレプリントを入手して読んでみたが、上の予想を含み、Schmid-Vilonen の結果

も (少なくとも $\lambda - \rho$ が integral weight で X 上に G -同変束の あり場合は) 完全にカバーして いる. Atiyah-Bott [1] の不動点公式と違い, 一般には cohomology $\text{Ext}^i(F; \mathcal{L})$ は無限次元になる, てしまうが, $\ell^*: \text{Ext}^i(F; \mathcal{L}) \rightarrow \text{Ext}^i(F; \mathcal{L})$ は trace class の作用素で trace は有限の値になることが証明されている. [9] の主結果は, その意味で『無限次元版の Atiyah-Bott-Lefschetz 型の不動点公式』といえよう. Guillemin の前の論文 [8] での elliptic pair の条件は, Atiyah の transversal ellipticity のアイデアの導入で不要になり, 今回のような一般性をもつに至った. 証明は見通しのよいものだが, 多くの記号を定義しなくてはならないので, その解説は他日と期したい.

ところで, 指標超函数 $\mathbb{H}(F)$ の属する空間

$$\begin{aligned} & \{ G_{\mathbb{R}} \text{ 上の } X_{\lambda} \text{ に対する invariant eigen-distributions} \} \\ & := \Gamma(G_{\mathbb{R}}; \mathcal{H}_{\text{Hom } \mathcal{D}_G}(m_{X_{\lambda}} \mathcal{D}'_{G_{\mathbb{R}}})) \end{aligned}$$

は 堀田-柏原 [11] の定理により, $F \in D_{G_{\mathbb{R}}}^b(X)_{-\lambda}$ の character cycle の住む空間 $H_d^{\text{inf}}(\widetilde{G}_{\mathbb{R}}; \mathbb{C}_{-\lambda})$ (Borel-Moore

homology, 詳しくは $S-V[\]$ を参照) と同一視されていて、柏原 [13] の予想は表現論の設定を利用して何とか証明されていったが、何故そうした事が成り立つのか、今いって舞台裏がはっきりしない感じがしていた。Guillermou [9] の仕事は、この不思議さを大分解消してくれたようである。

最後に、筆者にこのようなサーベイをする事を勧めて下さった谷崎氏、内藤氏、そして Schmid の学位論文を送り下さった堀田氏に感謝いたします。

References

- [1] M-F. Atiyah and R. Bott, *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes*, Ann. Math., **86** (1967), 374-407.
- [2] A. Beilinson and J. Bernstein, *Localisations de g -modules*, C.R. Acad. Sc. t. 292, Série I (1981), 15-18.
- [3] A. Beilinson and J. Bernstein, *Proof of Jantzen's conjecture*, Adv. Sov. Math., **40** (1993), 1-50.
- [4] J. Bernstein and V. Lunts, *Equivariant sheaves and functors*, L.N. in Math 1578, Springer-Verlag (1994).
- [5] M. Bozicevic, *A comparison of Weyl group actions on Lagrangian cycles*, Indag. Mathem., **9** (1998), 173-181.
- [6] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J., **84** (1996), 497-540.
- [7] V. Ginsburg, *Characteristic varieties and vanishing cycles*, Invent. Math., **84** (1986), 327-402.
- [8] S. Guillermou, *Lefschetz class of elliptic pairs*, Duke Math. J., **85** (1996), 273-314.
- [9] S. Guillermou, *Index of transversally elliptic D -modules*, preprint (1999).

- [10] H. Hecht, D. Milicic, W. Schmid and J. Wolf, *Localization and standard modules for real semisimple Lie groups*, preprint (1999).
- [11] R. Hotta and M. Kashiwara, *The invariant holonomic systems on a semisimple Lie algebra*, Invent. Math., **75** (1984), 327-358.
- [12] M. Kashiwara, *Index theorem for constructible sheaves*, Astérisque, **130** (1985), 193-209.
- [13] M. Kashiwara, *Character, character cycle, fixed point theorem and group representation*, Advanced Studies in Pure Mathematics, **14** (1988), 369-378.
- [14] M. Kashiwara, *D-modules and representation theory of Lie groups*, Ann. Inst. Fourier, **43** (1993), 1597-1618.
- [15] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Math. Wiss. 292, Springer-Verlag (1990).
- [16] M. Kashiwara and W. Schmid, *Quasi-equivariant D-modules, equivariant derived category, and representations of reductive Lie groups*, Progress in Math., **130** (1994), 457-488.
- [17] M. Kashiwara and T. Tanisaki, *The characteristic cycles of holonomic systems on a flag manifold*, Invent. Math., **77** (1984), 185-198.
- [18] I. Mirkovic, T. Uzawa and K. Vilonen, *Matsuki correspondence for sheaves*, Invent. Math., **109** (1992), 231-245.
- [19] H. Ochiai, *Character, character cycles*, J. Math. Soc. Japan, **45** (1993), 583-598.
- [20] W. Rossmann, *Kirillov's character formula for reductive Lie groups*, Invent. Math., **48** (1978), 207-220.
- [21] W. Schmid, *Homogeneous complex manifolds and representations of semisimple Lie groups*, thesis, Berkely (1967).
- [22] W. Schmid and K. Vilonen, *Characteristic cycles of constructible sheaves*, Invent. Math., **124** (1996), 451-502.
- [23] W. Schmid and K. Vilonen, *Two geometric character formulas for reductive Lie groups*, J. Amer. Math. Soc., **11** (1998), 799-867.
- [24] W. Schmid and K. Vilonen, *Characteristic cycles and wave front cycles of representations of reductive Lie groups*, to appear in Ann. Math.
- [25] H-W. Wong, *Cohomological induction in various categories and the maximal globalization conjecture*, Duke Math. J., **96** (1999), 1-27.

Kiyoshi TAKEUCHI
 Institute of Mathematics
 University of Tsukuba
 1-1-1, Tennodai, Tsukuba, Ibaraki, 305-0006, JAPAN
 e-mail: takechan@abel.math.tsukuba.ac.jp