

On some convexity of a weakly unitarily invariant norm and λ - Aluthge transformation

北海道教育大学札幌校 大久保 和義

1. はじめに

M_n を $n \times n$ complex matrix 全体の集合とする。

$T \in M_n$ として, $T = UP$ を T の polar decomposition とする (ただし, P : positive semi-definite, U : unitary とする。).

$0 < \lambda < 1$ に対して T の λ -Aluthge transformation を $P^\lambda U P^{1-\lambda}$ で定義する ($T_{1/2} = \tilde{T}$; Aluthge transformation([A])).

$||| \cdot |||$ が M_n 上の weakly unitarily invariant norm とは $|||UXU^*||| = |||X|||$ ($U \in M_n$: unitary, $X \in M_n$) が成り立つとする。また, $||| \cdot |||$ が M_n 上の unitarily invariant norm とは $|||UXV||| = |||X|||$ ($U, V \in M_n$: unitary, $X \in M_n$ が成り立つとする。

$W(T) := \{(Tx, x) \mid \|x\| = 1\}$ (numerical range of T)

$w(T) = \sup\{|z| : z \in W(T)\}$ (numerical radius of T) とする。

$\rho > 0$ に対して $T \in M_n$ がある Hilbert space $\mathcal{K} \supset \mathbb{C}^n$ と $\mathcal{K}$ 上の unitary operator V があって, $T^k = \rho Q V^k|_{\mathbb{C}^n}$ ($k = 1, 2, \dots$) を満たすとき, ρ -contraction とよぶ (Nagy and Foias([N-F]) 参照)。ただし, Q は $\mathcal{K}$ から $\mathbb{C}^n$ への orthogonal projection である。 ρ -contraction に対して, T の ρ -radius $w_\rho(T)$ が, $w_\rho(T) \equiv \inf\{r > 0 : \frac{1}{r}T \text{ is a } \rho\text{-contraction}\}$ で定義される (Holbrook([H])). $w_\rho(T)$ に関しては, $0 < \rho < \infty$ に対して,

$$w_\rho(T + S) \leq \max(1, \frac{\rho}{2})\{w_\rho(T) + w_\rho(S)\}$$

が成り立つことが知られている。即ち, $0 < \rho \leq 2$ に対して $w_\rho(\cdot)$ は M_n 上のノルムとなり, $2 < \rho < \infty$ に対しては,

$$w_\rho(T + S) \leq \frac{\rho}{2}\{w_\rho(T) + w_\rho(S)\}$$

を満たす quasi-norm となる。また, $0 < \rho < \infty$ に対して, $w_\rho(\cdot)$ は weakly unitarily invariant となる。

さらに, $w_1(T) = \|T\|$ (spectral norm of T), $w_2(T) = w(T)$,

$$w_\infty(T) := \lim_{\rho \rightarrow \infty} w_\rho(T) = r(T) \quad (r(\cdot) : \text{spectral radius})$$

がいえ。

Yamazaki([Y]), Wu([W]) により, T がヒルベルト空間上の有界線形作用素のとき,

$$\overline{W(\tilde{T})} \subset \overline{W(T)} \quad (1)$$

となることが知られている。

2. Convexity of $[0, 1] \ni \lambda \mapsto w_\rho(T_\lambda)$.

次のことがいえる。

Theorem 1. Let $A, M \in M_n$. Then the following assertions (i) and (ii) are equivalent;

- (i) $W(f(A)) \subset W(f(B))$ for all polynomials f .
(ii) $w_\rho(f(A)) \leq w_\rho(f(B))$ for all polynomials f and $0 < \rho \leq 2$.

実際, Ito, Nakazato, Okubo and Yamazaki ([I-N-O-Y]) で (i) が (ii) において $\rho = 1$, $\rho = 2$ の場合と同値であることを示した。また, $1 \leq \rho$ に対して, $w_\rho(X) \leq 1 \iff r(X) \leq 1$ であり,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho-1)^k |z|^{k-1}}{\rho^k} X^k \right\| \leq \rho-1 \text{ for } |z| \leq 1 \quad (2)$$

であること, また, $1 < \rho \leq 2$ に対して

$$W(T) = \left\{ \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \lambda| \leq w_\rho(T - \lambda I)\} \right\} \quad (3)$$

であるから, Theorem 1 は証明できる。

$||| \cdot |||$ を M_n 上の unitarily invariant norm とする。

$$g(\lambda) \equiv |||P^\lambda U P^{1-\lambda}||| \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

とするとき,

Proposition 2. $[0, 1] \ni \lambda \mapsto g(\lambda)$ is convex.

実際, $A, B, X \in M_n$ と unitarily invariant norm $||| \cdot |||$ に対して

$$|||A^* X B|||^2 \leq |||A A^* X||| \cdot |||X B B^*|||$$

が成り立つ (Bhatia ([B])). 従って, $T = UP$ (polar decomposition), $0 \leq \alpha, \lambda, \mu \leq 1$ にこの不等式を使うと

$$|||P^{\alpha\lambda+(1-\alpha)\mu} U P^{1-(\alpha\lambda+(1-\alpha)\mu)}||| \leq |||P^\lambda U P^{1-\lambda}|||^\alpha \cdot |||P^\mu U P^{1-\mu}|||^{1-\alpha}$$

がいえる。

$0 \leq \lambda \leq 1$ に対して $F(\lambda) \equiv W(P^\lambda U P^{1-\lambda})$ とする。

f をその極が $\sigma(T)$ の外にある rational function として, $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ とする。 $A, S \in M_n$ で S が positive invertible とするとき,

$$\|A\| \leq \frac{1}{2} \|SAS^{-1} + S^{-1}AS\| \quad (4)$$

がいえることが知られているので, これを使って

$$\|f(T_{\frac{\lambda+\mu}{2}})\| \leq \frac{1}{2} \{\|f(T_\lambda) + f(T_\mu)\|\}$$

が成り立ち, (3) を用いて次がいえる。

Theorem 3. [Patel and Yamazaki([P-Y])] $[0, 1] \ni \lambda \mapsto F(\lambda)$ is convex, that is,

$$F(\alpha\lambda + (1-\alpha)\mu) \subset \alpha F(\lambda) + (1-\alpha)F(\mu)$$

$$(0 \leq \alpha, \lambda, \mu \leq 1)$$

このことから, $h(\lambda) := w(P^\lambda U P^{1-\lambda})$ とおくと, $[0, 1] \ni \lambda \mapsto h(\lambda)$ が convex になること, 即ち,

$$w(P^{\alpha\lambda + (1-\alpha)\mu} U P^{1-(\alpha\lambda + (1-\alpha)\mu)}) \leq \alpha w(P^\lambda U P^{1-\lambda}) + (1-\alpha)w(P^\mu U P^{1-\mu})$$

が示される。

Lemma 4. [Mathias and Okubo([M-O])] Let $A \in M_n$. then for $0 < \rho \leq 2$,

$$w_\rho(A) = \frac{2}{\rho} w \left(\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\rho(2-\rho)}A \\ 0 & (1-\rho)A \end{pmatrix} \right).$$

Proposition 5. Let $S \in M_n$ be a positive and $A \in M_n$. Then for $0 < \rho \leq 2$, we have

$$w_\rho(A) \leq \frac{1}{2} w_\rho(SAS^{-1} + S^{-1}AS).$$

実際, (*) によって, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$\|A - \lambda I\| \leq \left\| \frac{SAS^{-1} + S^{-1}AS}{2} - \lambda I \right\|$$

である。従って, (3) から

$$W(A) \subset W \left(\frac{SAS^{-1} + S^{-1}AS}{2} \right)$$

がいえる。このことから, positive matrix S に対して

$$w(A) \leq \frac{1}{2} w(SAS^{-1} + S^{-1}AS)$$

が成り立つ。このことを使うと,

$$\begin{aligned} & w \left(\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\rho(2-\rho)}A \\ 0 & (1-\rho)A \end{pmatrix} \right) \\ & \leq \frac{1}{2} w \left(\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\rho(2-\rho)}A \\ 0 & (1-\rho)A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\rho(2-\rho)}A \\ 0 & (1-\rho)A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \right) \\ & = \frac{1}{2} w \left(\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\rho(2-\rho)}(SAS^{-1} + S^{-1}AS) \\ 0 & (1-\rho)(SAS^{-1} + S^{-1}AS) \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

がいえ。Lemma 4 から、このことは

$$w_\rho(A) \leq \frac{1}{2}w_\rho(SAS^{-1} + S^{-1}AS)$$

を意味する。

T の polar decomposition を $T = UP$ として、 $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ に対して $A = P^{\frac{\lambda+\mu}{2}}UP^{1-\frac{\lambda+\mu}{2}}$ とすると

$$w_\rho(P^{\frac{\lambda+\mu}{2}}UP^{1-\frac{\lambda+\mu}{2}}) \leq \frac{1}{2}w_\rho(SP^{\frac{\lambda+\mu}{2}}UP^{1-\frac{\lambda+\mu}{2}}S^{-1} + S^{-1}P^{\frac{\lambda+\mu}{2}}UP^{1-\frac{\lambda+\mu}{2}}S)$$

がいえ。このとき、 $S = (P + \epsilon I)^{\frac{\lambda-\mu}{2}}$ と $\epsilon \rightarrow 0$ を考えると次の corollary がいえ。

Corollary 6. $T = UP \in M_n$ と $0 < \rho \leq 2$ に対して、

$$(0, 1) \ni \lambda \mapsto w_\rho(P^\lambda UP^{1-\lambda})$$

は convex である。

実際、 $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ に対して

$$w_\rho(P^{\frac{\lambda+\mu}{2}}UP^{1-\frac{\lambda+\mu}{2}}) \leq \frac{1}{2}\{w_\rho(P^\lambda UP^{1-\lambda} + P^\mu UP^{1-\mu})\} \leq \frac{1}{2}\{w_\rho(P^\lambda UP^{1-\lambda}) + w_\rho(P^\mu UP^{1-\mu})\}$$

となる。

3. $W(T_\lambda)$, $w_\rho(T_\lambda)$ の対称性, 最小性

この問題の発展として、 $0 \leq \lambda \leq 1$ に対する $W(T_\lambda)$, $w_\rho(T_\lambda)$ の対称性, $w_\rho(T_\lambda)$ の最小性に関する問題が考えられる。このことに関するいくつかの結果を示す。

Proposition 7. For $T \in M_2$ and $0 < \rho$, we have

(i) $\min_{0 \leq \lambda \leq 1} w_\rho(T_\lambda) = w_\rho(\tilde{T})$.

In particular,

$$\min_{0 \leq \lambda \leq 1} \|T_\lambda\| = \|\tilde{T}\| \text{ and}$$

$$\min_{0 \leq \lambda \leq 1} w(T_\lambda) = w(\tilde{T}).$$

(ii) $\min_{0 \leq \lambda \leq 1} W(T_\lambda) = W(\tilde{T})$.

実際、 $0 < a \leq 1$ に対して $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ (unitary matrix) とおく。このとき、

$$B_\lambda \equiv P^\lambda UP^{1-\lambda} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12}a^{1-\lambda} \\ u_{21}a^\lambda & u_{22}a \end{pmatrix}$$

とすると、

$$B_\lambda^* B_\lambda = \begin{pmatrix} |u_{11}|^2 + (1 - |u_{11}|^2)a^{2\lambda} & u_{12}\overline{u_{11}}(a^{1-\lambda} - a^{1+\lambda}) \\ \overline{u_{12}}u_{11}(a^{1-\lambda} - a^{1+\lambda}) & |u_{11}|^2a^2 + (1 - |u_{11}|^2)a^{2(1-\lambda)} \end{pmatrix}$$

で, $B_\lambda^* B_\lambda$ の characteristic polynomial $f_\lambda(x)$ は

$$f_\lambda(x) = x^2 - (|u_{11}|^2 + (1 - |u_{11}|^2)a^{2\lambda} \\ + |u_{11}|^2 a^2 + (1 - |u_{11}|^2)a^{2(1-\lambda)})x + a^2 = f_{1-\lambda}(x)$$

即ち, $\|T_\lambda\| = \|T_{1-\lambda}\|$ となる。 $[0, 1] \ni \lambda \mapsto g(\lambda)$ が convex だから,

$$\min_{0 \leq \lambda \leq 1} \|T_\lambda\| = \|\tilde{T}\|$$

となる。

$0 \leq \lambda \leq 1$ に対して $\sigma(T) = \sigma(T_\lambda) = \{\alpha, \beta\}$ とする。 T が matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ に unitarily similar として, T_λ が matrix $\begin{pmatrix} \alpha & \delta_\lambda \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ に unitarily similar とする。 $\|T_\lambda\| = \|T_{1-\lambda}\|$ だから, $\min_{0 \leq \lambda \leq 1} \|T_\lambda\| = \|\tilde{T}\|$ となり, $|\delta_{1/2}| \leq |\delta_\lambda| = |\delta_{1-\lambda}| (0 \leq \lambda \leq 1)$ がいえる。 T_λ の numerical range は焦点を α, β として短径が $|\delta_\lambda|$ の楕円だから $W(T_\lambda) = W(T_{1-\lambda})$ がいえる。即ち, (ii) が成り立つ。また, $\min_{0 \leq \lambda \leq 1} w(T_\lambda) = w(\tilde{T})$ もいえる。

f を any polynomial とする。このとき,

$$f(\tilde{T}) = \begin{pmatrix} f(\alpha) & \delta_{1/2} \cdot \gamma \\ 0 & f(\beta) \end{pmatrix} \quad f(T_\lambda) = \begin{pmatrix} f(\alpha) & \delta_\lambda \cdot \gamma \\ 0 & f(\beta) \end{pmatrix} \quad \text{となり, } |\delta_{1/2} \cdot \gamma| \leq |\delta_\lambda \cdot \gamma| \text{ だから,} \\ \|f(\tilde{T})\| \leq \|f(T_\lambda)\| \text{ となる。従って, (2) から (i) がいえる。}$$

Corollary 8. Let $T \in M_2$. For $0 < \lambda < 1$ and for any polynomial f

$$W(f(T_\lambda)) = W(f(T_{1-\lambda})).$$

Moreover, for $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \frac{1}{2}$ and for any polynomial f

$$W(f(T_{\lambda_2})) \subset W(f(T_{\lambda_1})).$$

Remark. Proposition 4 is not true for the case of $n \geq 3$.

Example 9.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \\ U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

とおくと, $g(1/2) = 2.798077$, $g(2/5) = 2.795949$ and $g(3/5) = 2.813729$ となる。

次の結果は, Rose and Spitkovsky によって得られた。

Theorem 10. [Rose and Spitkovsky] Let $T = UP \in M_3$ where P has at most two distinct eigenvalues. Then for $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$, $|\lambda_2 - \frac{1}{2}| \leq |\lambda_1 - \frac{1}{2}|$ implies that $W(T_{\lambda_2}) \subset W(T_{\lambda_1})$, in particular

$$W(T_\lambda) = W(T_{1-\lambda})$$

for all $\lambda \in (0, 1)$.

In this case, $\min_{0 \leq \lambda \leq 1} w(T_\lambda) = w(\tilde{T})$.

4. Normaloid, spectraloid and convexoid matrix の特徴付け

$T \in M_n$ is normaloid とは $\|T\| = r(T)$ をみたすこと。

$T \in M_n$ is spectraloid とは $w(T) = r(T)$ をみたすこと。

Proposition 11. Let $T \in M_2$. Then the followings conditions are equivalent :

i) T is normaloid.

ii) $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.

iii) $\|T\| = \|T_\lambda\|$ for some $\lambda \in (0, 1)$.

iv) $\|T\| = \|T_\lambda\|$ for all $\lambda \in [0, 1]$.

v) T is normal.

iv) $\Rightarrow$ v) を示そう。 T を Proposition 7 のようにおき, $\lambda = \frac{1}{2}$ とすると, $f_{1/2}(x) = 0$ の解は

$$x = \frac{1}{2} \{ (1-a)^2 |u_{11}|^2 + 2a \pm (1-a) |u_{11}| \sqrt{(1-a)^2 |u_{11}|^2 + 4a} \}$$

となり,

$$\|\tilde{T}\| = 1 = \|T\| \iff |u_{11}| = 1$$

であるから $u_{12} = u_{21} = 0$ となり T は normal となる。

$3 \leq n$ に対しては ii) $\Rightarrow$ i) は真ではない。

Example 12. $0 < \lambda < 1$ とする。

$$P \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad U \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと, $P > 0$, U unitary, $\|UP\| = 1$, $r(UP) = \lambda^{\frac{1}{2}}$ となる。

一方で

$$P^{\frac{1}{2}} U P^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\lambda} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} & 0 \end{bmatrix}$$

だから, $\|P^{\frac{1}{2}} U P^{\frac{1}{2}}\| = 1 = \|UP\|$, but $r(UP) < \|UP\|$ となる。

Proposition 11 の一般化として次のことがいえる。

Proposition 13. Let $T \in M_2$ and $0 < \rho \leq 2$. Then the followings conditions are equivalent :

i) $w_\rho(T) = r(T)$.

ii) $w_\rho(T) = w_\rho(\tilde{T})$.

iii) $w_\rho(T) = w_\rho(T_\lambda)$ for some $\lambda \in (0, 1)$.

iv) $w_\rho(T) = w_\rho(T_\lambda)$ for all $\lambda \in [0, 1]$.

v) T is normal.

Proposition 7 の証明のように, $T = \begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in M_2$ とおく。このとき, Nakazi and Okubo ([N-O]) から, $w_\rho(T) \leq 1$ であるための必要十分条件は $|\alpha|, |\beta| \leq 1$ そして

$$|\delta|^2 + |\alpha - \beta|^2 \leq \inf_{\zeta \in \mathbb{C}} \left| \frac{(\rho + (1-\rho)\bar{\alpha}\zeta)(\rho + (1-\rho)\beta\zeta) - \bar{\alpha}\beta|\zeta|^2}{\rho\zeta} \right|^2 \quad (5)$$

が成り立つことである。従って, $S = \begin{pmatrix} \alpha & \delta' \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ and $|\delta| \leq |\delta'|$ とするとき $w_\rho(T) \leq w_\rho(S)$ であることが容易に分かる。特に, もし $|\delta| < |\delta'|$ であれば $w_\rho(T) < w_\rho(S)$ となる。また, Proposition 7 から $[0, 1/2] \ni \lambda \mapsto w_\rho(T_\lambda)$ が減少関数で, $w_\rho(T) \geq r(T)$ だから, i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) が示される。

iii) が成り立つときは上の議論から, ある λ_0 で $|\delta| = |\delta_{\lambda_0}|$ が成り立つ。従って, $\|T\| = \|T_{\lambda_0}\|$ となり, Proposition 11 から, $|\delta| = |\delta_\lambda|$ for all $0 \leq \lambda \leq 1$ であることがわかり, T は normal となる。

Corollary 14. For $T \in M_2$,
 T is normaloid $\iff T$ is spectraloid.

Proposition 15. [Yamazaki([Y])]

A bounded linear operator T on Hilbert space is normaloid $\iff \|T\| = \|\tilde{T}_k\|$ for all k , where $\tilde{T}_k$ is k -th Aluthge transformation.

$\tilde{T}_k$ は次で定義される。

$$\tilde{T}_k = (T_{k-1}^\sim) \text{ for } k = 1, 2, \dots.$$

また, $T \in M_n$ に対して, Ptak によって次が知られている ;

$$\|T\| = 1 > r(T) \implies \|T^m\| < 1$$

Ando は $T \in M_n$ に対して次のことを示した。

$$\|T\| = 1 > r(T) \implies \|\tilde{T}_{n-1}\| < 1.$$

このとき, 次のことはいえる。

Proposition 16. Let $T \in M_n$.

T is normaloid $\iff \|T\| = \|\tilde{T}_{n-1}\|$.

$T \in M_n$ is convexoid とは $\text{conv}(\sigma(T)) = W(T)$ where $\text{conv}(\cdot)$ denotes the convex hull で定義される。このとき, Ando は Aluthge 変換を用いて, 次のことを示した。

Theorem 17. [Ando([An])] For $T \in M_n$,

T is convexoid if and only if $W(\tilde{T}) = W(T)$.

関連する話題として, Spectraloid に関して Patel and Yamazaki によって次の Conjecture があげられている。

Conjecture [Patel and Yamazaki([P-Y])] For $T \in M_n$,
 T is spectraloid if and only if $w(T) = w(\tilde{T})$.

参考文献

- [Al] A. Aluthge: On p -hyponormal operators for $0 < p < 1$, *Integral Equations Operator Theory*, **13** (1990), pp. 307-315.
- [An] T. Ando: Aluthge transforms and the convex hull of the spectrum of a Hilbert space operator, *Operator Theory; Adv. Appl.*, **160** (2005), pp. 21-39.
- [B] R. Bhatia: *Matrix Analysis*, Springer, 1997.
- [H] J. A .R. Holbrook: On the power-bounded operators of Sz.-Nagy and Foiaş, *Acta. Scie. Math.(Szeged)*, **29** (1968), pp. 297-310.
- [I-N-O-Y] M. Ito, H. Nakazato, K. Okubo and T. Yamazaki: On generalized numerical range of the Aluthge transformation, *Linear Algebra Appl.* **370** (2003), pp. 147-161.
- [N-F] Sz.-Nagy and C. Foiaş: *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North-Holland Publishing Company, 1970
- [M-O] R. Mathias and K. Okubo: The induced norm of the Schur multiplication operator with respect to the operator radius, *Linear and Multilinear Algebra*, **37** (1994), pp. 111-124.
- [N-O] T. Nakazi and K. Okubo: p -contraction and 2×2 matrix, *Linear Algebra Appl.* **283** (1998), pp.165-169.
- [O] K. Okubo: On Weakly Unitarily Invariant Norm and the λ - Aluthge Transformation for Invertible Operator, *Linear Algebra and its Appl.*, **419** (2006), pp.48-52.
- [P-Y] S. M. Patel and T. Yamazaki: On comparisons of norms and the numerical ranges of an operator with its generalized Aluthge transformation, *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, e-2005 (2005), pp.317-329.
- [Y] T. Yamazaki: On numerical range of the Aluthge transformation, *Linear Algebra Appl.*, **341** (2002), pp. 111-117.
- [W] P. Y. Wu: Numerical range of Aluthge transform of operator, *Linear Algebra Appl.*, **357** (2002), pp. 295-298.