

Generalized Markov triples and toric surface singularities

Yusuke Sato

1 序文

本稿は、城崎代数幾何学シンポジウム 2024(京都開催)での著者による講演に基づく報告集原稿である。論文 [3] で得られた結果のうち代数幾何に関する内容を中心に紹介する。詳しい内容は [3] を参照して欲しい。

k -一般化マルコフ方程式とは 2022 年に行田, 松下 ([2]) によって導入された以下の方程式のことである。

$$x^2 + y^2 + z^2 + k(xy + yz + xz) = (3 + 3k)xyz$$

この方程式の正の整数解を k -一般化マルコフトリプルといい、 k -一般化マルコフトリプルに現れる整数を k -一般化マルコフ数という。 k が 0 のときはそれぞれ単にマルコフ方程式、マルコフトリプルといい、整数論における古典的な研究対象である。本稿の目的は k -一般化マルコフトリプルから定まる商特異点を定義しその性質について紹介することである。

2 k -GM ツリーとファレイツリー

以下、簡単のため k -一般化マルコフ数を k -GM 数と表し、 k -一般化マルコフトリプルを k -GM トリプルと表記する。まず k -GM トリプルを頂点に持つツリーを定義する。

Definition 2.1. 次のルールによって帰納的に定まる二分木を $\text{MT}(k)$ と表し、 k -GM ツリーと呼ぶ。

- (1) 最初の頂点を $(1, k+2, 1)$ とする。
- (2) 各頂点 (a, b, c) は次の 2 つの子ノード

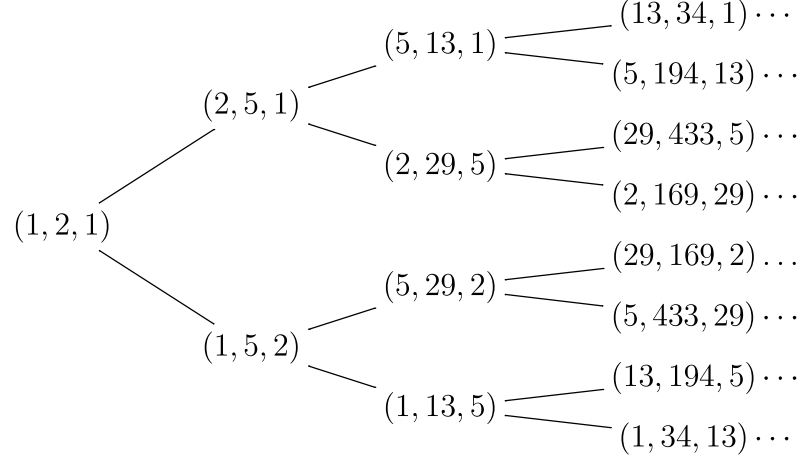
$$\left(a, \frac{a^2 + kab + b^2}{c}, b\right) \text{ と } \left(b, \frac{b^2 + kbc + c^2}{a}, c\right)$$

を持つ。

ある k -GM トリプル (a, b, c) に対して、 $\frac{b^2 + kbc + c^2}{a}$, $\frac{a^2 + kac + c^2}{b}$ はともに整数になる。実際、 k -GM 方程式から以下が得られるため整数であることがわかる；

$$\begin{aligned} \frac{b^2 + kbc + c^2}{a} &= (3 + 3k)bc - a - kc - kb, \\ \frac{a^2 + kac + c^2}{b} &= (3 + 3k)ac - b - kc - ka. \end{aligned}$$

Example 2.2. $k = 0$ のとき, マルコフツリー MT^k は以下ようになる.



Theorem 2.3 ([2]). 全ての頂点は第2成分が真に最も大きい k -GMトリプルである. 逆に第2成分が真に最も大きい k -GMトリプルは全て k -GMツリーに含まれる. さらに, それらの解 (順番違いは区別する) はこのツリーにそれぞれちょうど1個ずつ含まれる.

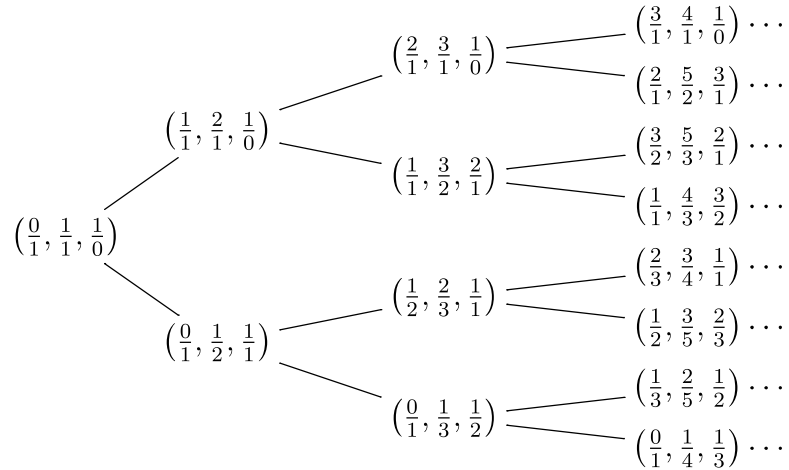
次に既約分数のツリーを導入する.

Definition 2.4. 次のルールで帰納的に定まるツリーをファレイツリー FT という.

- (i) 最初の頂点は $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}\right)$.
- (ii) 各頂点 $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right)$ は2つの子ノード $\left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right)$ と $\left(\frac{c}{d}, \frac{c+e}{d+f}, \frac{e}{f}\right)$ を持つ.

ファレイツリー FT の各頂点に現れる分数の組 $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right)$ をファレイトリプルという.

Example 2.5. ファレイツリー FT は以下ようになる.



全ての正の既約分数に対して、その分数を第2成分にもつファレイツリー FT の頂点が一意的に存在することが知られている。つまりファレイツリーは既約分数を効率よく全列挙することができるツリーであると言える。また、子ノードに関するルールを見ると k -GM ツリーと同じように新しい値が第2成分に入り、もともと第2成分だった値が右か左にずれている。このことからファレイツリー FT の成分と k -GM ツリー MT(k) の1対1対応を構成できる。まず、MT(k) の最初の頂点 $(1, k+2, 1)$ に対して MT(k) の最初の頂点は $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}\right)$

だから k -GM 数 1 に対して既約分数 $\frac{0}{1}$ と $\frac{1}{0}$ を対応させ、 $k+2$ には既約分数 $\frac{1}{1}$ を対応させる。次に子ノードのルールに対応して現れる新しい k -GM 数に新しい既約分数を順番に対応させる。例えば MT(k) の最初の頂点の子の一つは $(1, 2k^2+6k+5, k+2)$ であり、これと FT の最初の頂点の子 $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right)$ を対応させる。つまり k -GM 数 $2k^2+6k+5$ に対して、既約分数 $\frac{1}{2}$ を対応させる。このとき第1成分と第3成分については既出の数のため既に対応ができていることに注意する。この操作を続けていくことで、既約分数に k -GM 数が対応する。既約分数 t に対応する k -GM 数を $m_{k,t}$ と表す。例えば $m_{k,\frac{0}{1}} = 1$, $m_{k,\frac{1}{1}} = k+2$, $m_{k,\frac{1}{2}} = k^2+6k+5$ である。2つのツリーの子ノードのルールから既約分数 $\frac{a}{b}$ と $\frac{b}{a}$ は同じ k -GM 数に対応することがわかる。つまり既約分数 t を $[0, 1]$ 区間にとればファレイツリーを経由することで全ての k -GM トリプルを表現することができる。以下、既約分数 t に対してその t を第2成分に持つファレイトリプル (r, t, s) に対応する k -GM トリプル $(m_{k,r}, m_{k,t}, m_{k,s})$ を考える。この k -GM トリプルは既約分数 t に対して一意に決まることに注意しておく。

ファレイトリプル (r, t, s) が $r < t < s$ を満たすとする。次の x についての方程式を考える；

$$\begin{aligned} m_{k,r}x &\equiv m_{k,s} \pmod{m_{k,t}}, \\ m_{k,r}x &\equiv -m_{k,s} \pmod{m_{k,t}}, \\ m_{k,s}x &\equiv m_{k,r} \pmod{m_{k,t}}, \\ m_{k,s}x &\equiv -m_{k,r} \pmod{m_{k,t}}. \end{aligned}$$

これらの方程式の各解は $(0, m_t)$ の範囲で一意に定まる。これらの各解のことを特性数 (characteristic numbers) といい、それぞれ $u_{k,t}^+, u_{k,t}^-, v_{k,t}^+, v_{k,t}^-$ と表記する。これらの数 $u_{k,t}^+, u_{k,t}^-, v_{k,t}^+, v_{k,t}^-$ は k とファレイトリプル (r, t, s) に依存しているように見えるが、実際は既約分数 t から $r < t < s$ を満たすファレイトリプル (r, t, s) は一意に決まるため、単に k と t のみに依存している。

また、本稿では扱わないが [3] では既約分数 t から正型の連分数 $\frac{m_{k,t}}{u_{k,t}}$ を構成している。

3 k -GM トリプルと商特異点

この章では k -GM トリプルから定まる商特異点について説明する。群 G を行列 $\begin{pmatrix} \varepsilon^a & 0 \\ 0 & \varepsilon^b \end{pmatrix}$ で生成される巡回群とする、ここで a, b, r は正の整数とし、 ε は1の原始 r 乗根とする。以

下このような行列を $\frac{1}{r}(a, b)$ と略記する. このとき, 巡回群 G は $\mathbb{C}^2$ に $(x, y) \mapsto (\varepsilon^a x, \varepsilon^b y)$ と作用し, この作用による商空間 $\mathbb{C}^2/G$ を考える. この商空間は特異点を持ち $\frac{1}{r}(a, b)$ タイプの巡回商特異点と呼ぶ.

Definition 3.1. 非負整数 k とファレイトリプル (r, t, s) から決まる k -GM トリプル $(m_{k,r}, m_{k,t}, m_{k,s})$ に対し, k -GM 群 $G_{m_{k,t}}$ を行列 $\frac{1}{m_{k,t}}(m_{k,r}, m_{k,s})$ で生成される巡回群と定義する. また, 商特異点 $\mathbb{C}^2/G_{m_t}$ を k -GM 商特異点と呼ぶ.

Proposition 3.2 ([3]). k -GM トリプル $(m_{k,r}, m_{k,t}, m_{k,s})$ と $m_{k,t}$ の特性数 $u_{k,t}^+$ と $v_{k,t}^+$ に対し, 次が成り立つ.

$$G_{m_{k,t}} = \left\langle \frac{1}{m_{k,t}}(1, u_{k,t}^+) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{m_{k,t}}(v_{k,t}^+, 1) \right\rangle.$$

特に, $v_{k,t}^+ = m_{k,t} - u_{k,t}^+ - k$ である.

Proof. 前章の特性数の定義より従う. □

k -GM 商特異点の性質を紹介する前に 2 次元巡回商特異点と連分数の関係について確認しておく. G を $\frac{1}{r}(1, a)$ で生成される巡回群とする, ただし r と a は互いに素とする. このとき次の負型の連分数

$$\frac{r}{a} = [[b_1, \dots, b_\ell]] = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{b_{\ell-1} - \frac{1}{b_\ell}}}}$$

を Hirzebruch-Jung 連分数 (以下, HJ 連分数と表記する) という, ここで $b_1, \dots, b_\ell$ は 2 以上の整数である. このとき $-b_1, \dots, -b_\ell$ は商特異点 $\mathbb{C}^2/G$ の極小特異点解消における ℓ 個の例外曲線 $E_1, \dots, E_\ell$ のそれぞれの自己交点数を与える. したがって HJ 連分数の特徴付けは対応する巡回商特異点の特徴付けになる. そこで HJ 連分数の特別なクラスとして次の k -ウォールチェーンを導入する.

Definition 3.3. 非負整数 k に対し, k -ウォールチェーン (k -Wahl chain) を次のように定義する.

- (i) $[[k+2]]$ は k -ウォールチェーンである.
- (ii) もし $[[b_1, \dots, b_\ell]]$ が k -ウォールチェーンなら $[[b_1+1, b_2, \dots, b_\ell, 2]]$ と $[[2, b_1, \dots, b_{\ell-1}, b_\ell+1]]$ も k -ウォールチェーンである.

Example 3.4. $k=0$ のとき, $[[2]], [[32]], [[422]], [[233]]$ は 0-ウォールチェーンである. また, 定義より $[[b_1, \dots, b_\ell]]$ が k -ウォールチェーンならば $[[b_\ell, \dots, b_1]]$ もまた k -ウォールチェーンである.

次の定理は k -GM 商特異点から定まる HJ 連分数の性質について述べている.

Theorem 3.5. ([3]) 既約分数 $t \in (0, 1)$ によって定まる k -GM 数を $m_{k,t}$ とする, また $u_{k,t}^+$ をその特性数とする. このとき HJ 連分数 $\frac{m_{k,t}}{u_{k,t}^+}$ は k -ウォールチェーンである.

この定理を証明するためにはプレ蛇グラフというものをを用いて既約分数 t から $\frac{m_{k,t}}{u_{k,t}^+}$ の正型の連分数展開を構成する必要があるが, 簡単のためここでは構成した結果だけを述べておく (詳しい証明は [3] を参照せよ).

正型の連分数を次のように表記する.

$$[b_1, \dots, b_\ell] = b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_{\ell-1} + \frac{1}{b_\ell}}}}$$

このとき, 既約分数 $\frac{m_{k,t}}{u_{k,t}^+}$ の正型の連分数展開は以下のようになる;

$$\frac{m_{k,t}}{u_{k,t}^+} = [a_1, \dots, a_{\frac{\ell}{2}}, a_{\frac{\ell}{2}} + k, a_{\frac{\ell}{2}-1}, \dots, a_1] \text{ or } [a_1, \dots, a_{\frac{\ell}{2}}, a_{\frac{\ell}{2}} - k, a_{\frac{\ell}{2}-1}, \dots, a_1],$$

ただし ℓ は偶数である.

Lemma 3.6. ℓ を偶数とする. 正の整数 a_i ($i = 1, \dots, \ell$) に対して,

$$[a_1, \dots, a_\ell] = [[a_1 + 1, (2)^{a_2-1}, a_3 + 2, (2)^{a_4-1}, \dots, a_{\ell-1} + 2, (2)^{a_\ell-1}]]$$

が成り立つ. ここで $(2)^a$ は 2 を a 個並べたものである.

先ほど得た $\frac{m_{k,t}}{u_{k,t}^+}$ の正型の連分数を Lemma 3.6 を用いて HJ 連分数に変換すると,

$$\frac{m_{k,t}}{u_{k,t}^+} = [[a_1 + 1, (2)^{a_2-1}, a_3 + 2, \dots, a_{\frac{\ell}{2}-1} + 2, (2)^{\frac{a_\ell}{2}-1}, a_{\frac{\ell}{2}} + k + 2, (2)^{\frac{a_\ell}{2}-1-1}, \dots, a_2 + 2, (2)^{a_1-1}]],$$

という対称性のある HJ 連分数が得られる.

右側の端の 2 の個数 ($a_1 - 1$ 個) の分だけ左側の数を引いて得られる HJ 連分数

$$[[(2)^{a_2}, a_3 + 2, \dots, a_{\frac{\ell}{2}-1} + 2, (2)^{\frac{a_\ell}{2}-1}, a_{\frac{\ell}{2}} + k + 2, (2)^{\frac{a_\ell}{2}-1-1}, \dots, a_2 + 2]],$$

が k -ウォールチェーンであることと, 元の HJ 連分数が k -ウォールチェーンであることは同値である. これを繰り返すことで $\frac{m_{k,t}}{u_{k,t}^+}$ が k -ウォールチェーンであることが示される.

k -ウォールチェーンは元々, Wahl([9]) や Koller, Shepherd-Barron([5]) によって $k = 2$ の場合のみ定義された概念である. 特に 2-ウォールチェーンを与える既約分数は $\frac{m^2}{am-1}$ という形であることが知られている, ここで m と a は互いに素である. この 2-ウォールチェーンから定まる巡回商特異点はウォール特異点と呼ばれミルナー数が 0 の $\mathbb{Q}$ -Gorenstein smoothing を持ち, 曲面の変形理論において重要なクラスである T -特異点に属している.

Definition 3.7 ([5]). 二次元商特異点が T -特異点であるとは、それが $\mathbb{Q}$ -Gorenstein smoothing を持つことと定義する。

Proposition 3.8 ([5]). 商特異点が T -特異点ならば、それは有理二重点であるか $\frac{1}{dm^2}(1, adm-1)$ タイプの巡回商特異点である、ここで a と m は互いに素であり $m > 1$ とする。

この T -特異点のうち、有理二重点でない巡回群で $d = 1$ の場合をウォール特異点という。ウォール特異点とマルコフ方程式 (つまり 0-GM 方程式) の関係は Hacking と Prokhorov ([4]) や Perling ([6])、Urzua と Zuniga([8]) らによって研究されてきた。これらの先行研究は通常のマルコフトリプル、つまり 0-GM トリプル (a, b, c) に対して重み付き射影曲面 $\mathbb{P}(a^2, b^2, c^2)$ を扱っており、この重み付き射影曲面はウォール特異点のみを持つことが知られている。一方、定理 3.5 は 2-GM 商特異点がウォール特異点になることを主張しているが、これは次の定理が示すように 0-GM トリプルの二乗と 2-GM トリプルは一致するためである。

Theorem 3.9 ([2]). (a, b, c) が 0-GM トリプルのとき、 (a^2, b^2, c^2) は 2-GM トリプルである。逆に (A, B, C) が 2-GM トリプルのとき、 $(\sqrt{A}, \sqrt{B}, \sqrt{C})$ は 0-GM トリプルである。

また、 k -GM 商特異点は k -ウォールチェインになるが、その逆は成り立たない。実際、HJ 連分数 $\frac{10}{3} = [[4, 2, 2]]$ は 0-ウォールチェインだが、10 は 0-GM 数ではない。

4 k -ウォールチェインと連長圧縮

ここからは k -ウォールチェインから定まる商特異点の特徴づけを行う。前章の結果より k -GM 商特異点の特徴付けでもある。まず k -ウォールチェインに関して次が成り立つ。これは命題 3.2 の一般化である。

Proposition 4.1. もし HJ 連分数 $\frac{r}{a} = [[b_1, \dots, b_s]]$ がある k に対して k -ウォールチェインであるならば、 $\frac{r}{r-a-k} = [[b_s, \dots, b_1]]$ が成り立つ。つまり、 $a(r-a-k) \equiv 1 \pmod{r}$ が成り立つ。

Proof.

HJ 連分数の長さに関する帰納法で示す。まず $\frac{k+2}{1} = [[k+2]]$ について、 $k+2-1-k=1$ より明らかに主張は成り立つ。次に $\frac{r}{a} = [[b_1, \dots, b_s]]$ のとき、 $\frac{r}{r-a-k} = [[b_1, \dots, b_s]]$ が成り立つと仮定する。このとき、 $[[b_1+1, b_2, \dots, b_s, 2]]$ と $[[2, b_s, \dots, b_2, b_1+1]]$ について考える。

帰納法の仮定より $[[2, b_s, \dots, b_1]] = 2 - \frac{r-a-k}{r} = \frac{r+a+k}{r}$ であるから、

$$[[b_1, \dots, b_s, 2]] = \frac{r+a+k}{r'}$$

を得る. ここで r' は $r' \cdot r \equiv 1 \pmod{r+a+k}$ を満たす正の整数である. これより,

$$\begin{aligned} [[b_1 + 1, b_2, \dots, b_s, 2]] &= 1 + [[b_1, \dots, b_s, 2]] \\ &= 1 + \frac{r+a+k}{r'} \\ &= \frac{r' + r + a + k}{r'} \end{aligned}$$

が成り立つ. 一方, $[[1 + b_1, b_2, \dots, b_s]] = 1 + \frac{r}{a} = \frac{r+a}{a}$ だから, $a' \cdot a \equiv 1 \pmod{r+a}$ となる a' を用いて, $[[b_s, \dots, b_2, b_1 + 1]] = \frac{r+a}{a'}$ である. よって,

$$\begin{aligned} [[2, b_s, \dots, b_2, b_1 + 1]] &= \frac{a'}{r+a} \\ &= \frac{2r + 2a - a'}{r+a} \end{aligned}$$

を得る. ここで HJ 連分数の性質から $2r + 2a - a' = r' + r + a + k$ が成り立つ. 示したいことは分母が $(r' + r + a + k) - r' - k$ となることであり, これは直接計算で成り立つ. したがって題意は示された. $\square$

4.1 Special representation

以下 G を有限巡回群 $G = \frac{1}{r}(1, a)$ とし, その元 $g = \frac{1}{r}(1, a)$ に対し G の指標を $\chi_i : g \mapsto \varepsilon^i$ と定義する. その指標に付随する一次表現を ρ_i とする. G がアーベル群であるから, すべての既約表現は一次表現である. この既約表現のうち次のスペシャル表現を定義する. スペシャル表現は $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ の小型の有限部分群に対して定義される ([7], [10]) がここでは有限巡回群に対してのみ定義しておく.

Definition 4.2. 巡回群 G とその一次表現 ρ に対して, $(\mathbb{C}[x, y] \otimes V_\rho)^G$ が $\mathbb{C}[x, y]^G$ 上の加群として2元で生成されるとき, ρ を G のスペシャル表現と呼ぶ.

スペシャル表現と商特異点 $\mathbb{C}^2/G$ の極小特異点解消の例外曲線との間には1対1対応があり, スペシャルマッケイ対応と呼ばれる ([11]).

Definition 4.3. 巡回群 G のスペシャル表現を $\rho_{a_1}, \dots, \rho_{a_s}$ とする. ここで $r > a_1 > a_2 > \dots > a_s > 0$ とする. このとき $i = 1, \dots, s-1$ に対して b_i を $b_i = a_i - a_{i+1}$ と定義する. さらに, G のスペシャル表現の連長圧縮 (*length encoding*) とは数列 $b_2, \dots, b_s$ において連続して現れる数字を繰り返し現れた回数を表す値に置き換えたものと定義する. 特にスペシャル表現が1つのみの場合の連長圧縮は空集合 $\emptyset$ と定義する.

Example 4.4. $G = \frac{1}{29}(1, 12)$ とする. このときスペシャル表現は $\rho_{12}, \rho_7, \rho_2, \rho_1$ の4つである. これらのスペシャル表現はそれぞれ $x^{12} : y, x^7 : y^3, x^2 : y^5, x : y^{17}$ という単項式の比から定まる $\mathbb{C}^2/G$ の極小特異点解消の例外曲線 $\mathbb{P}^1$ と対応する. また, $b_1 = 5, b_2 = 5, b_3 = 1$ であるから, スペシャル表現の連長圧縮は $(2, 1)$ である.

4.2 Length encoding of k -Wahl chain

Definition 4.5. k -ウォールチェーンに対して連長圧縮 (*length encoding*) を次のように定義する.

(i) 連分数 $[[k+2]]$ を空集合 $\emptyset$ とする.

(ii) 列 $(c_1, \dots, c_m)$ が $[[a_1, \dots, a_s]]$ という k -ウォールチェーンに対応すると仮定する, ただし $a_1 \neq 2$ とする. このとき $c_{m+1} > 0$ に対して, 列 $(c_1, \dots, c_{m+1})$ を

$$[[2^{c_{m+1}}, a_1, \dots, a_{s-1}, a_s + c_{m+1}]],$$

という k -ウォールチェーンの連長圧縮を表し, 列 $(c_1, \dots, c_{m-1}, c_m + d)$ は

$$[[a_1 + d, \dots, a_{s-1}, a_s, (2)^d]],$$

の連長圧縮を表すと定義する.

(iii) 同様に列 $(c_1, \dots, c_m)$ が $[[a_1, \dots, a_s]]$ という k -ウォールチェーンに対応するとする, ただし $a_s \neq 2$ とする. このとき $c_{m+1} > 0$ に対して, 列 $(c_1, \dots, c_{m+1})$ は $[[a_1 + c_{m+1}, a_2, \dots, a_s, 2^{c_{m+1}}]]$ という k -ウォールチェーンを表し, 列 $(c_1, \dots, c_{m-1}, c_m + d)$ は

$$[[(2)^d, a_1, \dots, a_{s-1}, a_s + d]],$$

の連長圧縮を表すと定義する.

つまり k -ウォールチェーンの連長圧縮とは, $[[k+2]]$ を基準に左と右のどちらに連続して2を加えたかを表すものである. また, $[[b_1, \dots, b_s]]$ と $[[b_s, \dots, b_1]]$ の連長圧縮は一致するがこれはどちらも同じ商特異点に対応するため問題ない.

Example 4.6. 0-ウォールチェーン $[[4, 2, 2]]$ の連長圧縮は (2) であり, $[[2, 4, 2, 3]]$ の連長圧縮は $(2, 1)$, $[[3, 2, 4, 2, 4, 2]]$ の連長圧縮は $(2, 2, 1)$ である.

Theorem 4.7. G を $\frac{1}{r}(1, a)$ で生成される巡回群とする, ここで r と a は互いに素とする. HJ 連分数 $\frac{r}{a}$ が k -ウォールチェーンのとき, その連長圧縮は群 G のスペシャル表現の連長圧縮と一致する.

この定理は連長圧縮の長さ, つまり $(c_1, \dots, c_m)$ の m に関する帰納法で示すことができる.

Example 4.8. 群 G を $\frac{1}{29}(1, 12)$ で生成される巡回群とする. ここで $\frac{29}{12} = [[3, 2, 4, 2]]$ であるからこれは0-ウォールチェーンであり, その連長圧縮は $(2, 1)$ である. 一方, 例 4.4 より, G のスペシャル表現の連長圧縮は $(2, 1)$ であるため確かに一致する.

謝辞

代数幾何学シンポジウム 2024 において講演の機会をくださいました世話人の先生方にこの場を借りて感謝申し上げます.

References

- [1] D. A. Cox, J. B. Little, and H. K. Schenck, *Toric varieties*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 124, Amer. Math. Soc., 2011.
- [2] Y. Gyoda and K. Matsushita, *Generalization of Markov Diophantine equation via generalized cluster algebra*, Electron. J. Combin., (2023), 4-10
- [3] Y. Gyoda, S. Maruyama and Y. Sato, *$SL(2, \mathbb{Z})$ -matrixizations of Generalized Markov numbers*, arXiv: 2407.08203, 2024.
- [4] P. Hacking and Y. Prokhorov, *Smoothable del Pezzo surfaces with quotient singularities*, Compos. Math. 146 (2010), 169–192.
- [5] J. Kollar and N. I. Shepherd-Barron, *Threefolds and deformations of surface singularities*, Invent. Math. 91 (1988), 299–338.
- [6] M. Perling, *Unfocused notes on the Markoff equation and T-Singularities*, 2022. preprint, arXiv:2210.12982, 2022.
- [7] O. Riemenschneider, *Characterization and application of special reflexive modules on rational surface singularities*, Institute Mittag-Leffler Report No.3 (1987).
- [8] G. Urzúa and J. P. Zúñiga, *The birational geometry of Markov numbers*, arXiv:2310.17957, 2023.
- [9] J. Wahl, *Smoothings of normal surface singularities*, Topology, 20(3):219–246, 1981.
- [10] J. Wunram, *Reflexive modules on cyclic quotient surface singularities*, in *Singularities, Representations of Algebras, and Vector Bundles*. Greuel, Trautmann (eds.) Lect. Notes math. 1273. Springer (1987).
- [11] J. Wunram, *Reflexive modules on quotient surface singularities*, Math Ann. 279 (1988), 583–598.