

数概念について

早稲田大学・理工学術院 足立恒雄 (ADACHI Norio)

1 はじめに

ギリシア時代には数と量が峻別された。その思想が中世以降のヨーロッパを支配した。一方、西洋では科学の応用性を重んじる傾向が根底にあって、何世紀もかけて次第に自らの姿を顕現してきた。数に対する把握の仕方の変遷も、応用数学的な思想がギリシア的形而上学の桎梏を脱する過程という流れの中で捉えられるのではないだろうか。

本講演では、ギリシアの「つぶつぶ」的数と連続量という二つの概念がヨーロッパにおいて統一されていく様子を述べ、さらにこれとは異質な数観として、インドの、直線上の対等な点（位置）として数を把握する見方を紹介する。最後に数直線の公理化を述べ、数直線を基礎に置くインド方式が基数を基礎に置く現代数学の方式と論理的には対等であることを示す。

教育上の問題と言うなら、講演者は、現代の数学教育は西洋の数学の歴史的発展段階にとらわれ過ぎていることを指摘し、個数主義にとらわれ過ぎることなく、可能な限り早い時期に数直線を導入することを提唱する。

2 数の背景をなす概念

「数える」という行為が数概念の根底にあることは論を待たないにしても、「数とは何か」という本質論の観点からは序数や基数が数の基礎をなす唯一の概念であると見るのは疑問である。特に、位置関係は普通は数の起源とみなされていないが、数の本質という意味では重要な役割を果たしていることがわかる。

個数 1 個、2 匹、3 人、4 頭、 $\dots \Rightarrow$ 基数

順序 1 番、第二、三日目、4 等、 $\dots \Rightarrow$ 序数

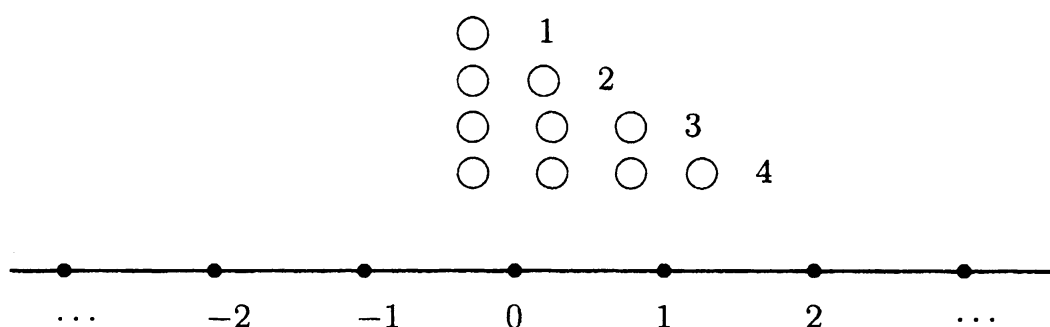
連続量 長さ、面積、体積、 $\dots \Rightarrow$ 正実数、半直線

位置関係 昨日・今日・明日、2 段・初段・1 級、時点、 $\dots \Rightarrow$ 実数、数直線

印欧語族では序数と基数とは歴然と異なった概念であるが、中華文明圏では序数と基数の区別は異なった用語を立てるほどには意識されていない。たとえば、六日間でも、八月六日のように六日目でも、六日と言って区別しない。そもそも序数、基数という言葉自身が翻訳語である。われわれが1, 2, 3, 4, ... と声を出すとき順序を数えているのか個数を数えているのか、そんなことは意識していない。そしてそれだからといって数学をやるのに不自由があるわけではない。つまり、序数と基数の区別は数学における本質的な相違ではないのである。

したがって、数の本質と歴史を考えると、基本的には三つの異なる起源があるとしてもよからう。

- 個数を基本に据える流儀（基数主義：ギリシア的形而上学志向）
- 量（大きさ）を基本に据える流儀（連続量主義：ヨーロッパ的応用志向）
- 位置（座標）を基本に据える流儀（数直線主義：インド起源）



点の並んだ数直線と量を表す半直線はかなり近い概念で、ほんの一步の違いのように思われるだろうが、実際にはまったく異なる概念である。量は単位の大きさ（長さ）を決めれば、それとの比によって実数に対応するが、直線上の点の場合は、そのままでは何の大きさも、表わしていない。ただその位置を占めているだけである。原点ともう一つの（単位を表すのに使われる）点という二つの基準点が定まって初めて実数に対応付けることができる。さらに、量は正数に対応するから、負数は登場し得ない。ただ「無いこと」に対応して0がこじつけられるだけである。

ギリシア以降、ヨーロッパ数学は数理哲学的には基数主義に基づいてきた。あるいは「数は事物の個数である」というギリシア的固定観念に呪縛されて来たとも言える。（パスカルの「0引く4が0であることを理解できない人がいる」という言葉を思い出そう。）

西洋の数学は、数学の基体を物体に置くギリシア的思想に束縛されてきたが、動力学や商業計算、天体観測など応用を重視するヨーロッパ精神が目覚め、次第に発達してきて、応用数学の立場から連続数観が確立していった。

ただし、それぞれの数に個体としての個性を見るタイプの自然数への執着はギリシア文明の特徴で、そのおかげで整数論がある。他の文明では一つの分野になるほど整数論は研究されなかった。

エウクレイデスに代表されるギリシア数学の立場では、数（離散量）と量（連続量）が峻別される。負の数量は最初から問題にされていない。

1. 数とは単位の集まったものである。（数＝ものの個数 (multitude)）
2. 大きさは（連続）量である。（量＝ものの大きさ (magnitude)）
3. 量は同種のものだけが比較できる。

3 現代数学における数の定義

現代数学の数観もギリシア以来の形而上学的志向に従って基数主義に基づいている。たとえばクロネッカー（19世紀）による次のような自然数の定義はその代表的なものだろう。

I, II, III, IIII, ...

不定元を使えば、算術とは異質な概念、たとえば代数的無理数の概念すら捨て去ることができる。負数の概念でさえも -1 という因子の代わりに $x+1$ を法とする合同式で置き換えることができる。たとえば $7-9=3-5$ は

$$7+9x \equiv 3+5x \pmod{x+1}$$

に変換できる。（中略）数学の最も深遠な研究結果は終局的には自然数の性質として単純な形に表現されなければならない。（クロネッカー『数の概念』）

クロネッカーの「自然数だけが神が創った数である」という言葉は有名だが、カントールも「全自然数は全能の神の御許に実在してある」と書いている。こうした言葉はギリシア以来の思想的流れの中で捉える必要がある。ここには個数主義の極限の姿がドイツ精神の装いを纏って表現されていると言えるだろう。（純粹数学は時代を超えて形而上学的である。）

しかしながら、この思想は一度も壊れたことがないのではなく、近世以降徐々にアラビア数字、小数、対数、そして負数の使用が商工業や力学に浸透していくにしたがって、自然数を特別視しない、連続数観が確立されていった。たとえば、20世紀初頭、J. ペリーは数値、小数と座標の考えを重視する教育数学が提唱された。

また、クラインは「近世幾何を始めに教えておいて、後で解析幾何を別に教えるということは、実にばかげた話である。解析幾何というものは、座標の観念さえ早く教えてあれば、きわめてやさしくできるものである」と述べている。しかし、数の基礎を数直線に置くことまでは提唱していない。

本質的にはクロネッカーと同じだが、現代数学では自然数は、もう少し洗練して、次のように定義されている（von Neuman による）：

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \{0\} \\ 2 &= \{0, 1\} \\ 3 &= \{0, 1, 2\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

一般に、自然数 n の次の自然数 n' を

$$n' = \{0, 1, 2, \dots, n\} = n \cup \{n\}$$

によって定義する。

自然数が集合論の中に、とくに 0 が空集合として最初から組み込まれている点が目新しい。これによって 0 は（自然数と同等な）数であることが最終的に認知されたと言える。

自然数に続けて、類別という手法を使って、整数、有理数、実数と定義していくのが現在流通している数概念の把握方法である。

4 基数主義の問題点

本来、ギリシア世界では数は物質的に（すなわち物の個数として）捉えられてきた。従って負数や実数の概念を射程に入れていないので、これらを数概念に含めるのは困難がつきまとい、これらを数体系に取り込むことはヨーロッパにとって重い制約であったギリシア精神の克服を意味するのである。

1. 基数主義では負数を把握するのが困難
2. 基数主義では量の数化が困難

1. について：

負数はデカルト、パスカルの時代（17世紀後半）でも「虚構の数」、「偽りの数」、「発明された数」などと呼ばれていた。これは「数＝個数」に対する執着から生まれた制約である。

デカルトには負の座標はないが、ニュートン(1642-1727)は負の軸まで含めた直交座標系をまったく自由に使っている。しかし、ニュートンも負数を数直線で説明するという認識にまでは進んでいない。

個数に(あるいは、大きさに)基本を置く限り、負数を把握するのには困難があり、また負数の演算を合理的に説明するのは難しい、というのが歴史から得られる教訓である。

2. について:

ディオファントス(AD 3 C 頃)が最初に有理数を数として認識した。

ディオファントスが大数学者であったかどうかは別の問題である。彼の偶発的な重要性は彼がはっきりと新しい数感情を有した最初の人であったという点にある。…ディオファントスには、とくに彼の表現形式には原始的なものがある。この原始的なものは、今まで後期ギリシア的衰退と評価されてきた。これは実は、後期ギリシア的と軽蔑された芸術に関する評価が改められつつあるのと同様に、生まれ出ようとしているアラビア文化のためらいがちな表現であると、理解され、認められるようになるだろう。(シュペングラ『西洋の没落』)

ディオファントスからアラビア世界を経て、近世の西洋では有理数、さらには $5\sqrt{2} + \sqrt{3}$ といった根号で表された数を数とみなすようになっていた。(したがって、近世において連続量と呼んでいても実際に扱うのはこの種の(つまり、冪根で表された、実の)代数的無理数のことである。)数観は徐々に変遷を遂げて、17世紀には数=自然数といった考え方をするとアマチュア的とされて軽蔑の対象であった。

フェルマー(1601-1665)は17世紀当時世界一の数学者であったが、整数論の問題を研究し、称揚したため、当初はギリシアへの復古と捉えられ、アマチュア的とみなされたのである。整数論の問題を掲げて挑戦してきたフェルマーに対するウォリスやブランカーの反応(「こんなものはギリシア時代の豊穡だ、不足だという議論の残滓である」とか、(自然)数の解を求めよというフェルマーの問題を有理数解と誤解したことなど)から、数概念の変遷とともに、整数論が既にアマチュア的な嗜好とみなされるようになっていたことが、逆にわかるだろう。

5 ステヴィン(1548?-1620?)の業績

小数の表現法の工夫と四則演算を明示的に解説したこと(著書『十分の一』:1585年)がステヴィンの主要な業績のように言われているが、数の認識という意味ではさらに重要な貢献をしている。彼は従来技術者であって、いわゆる(形而上学的な)数学者ではなかったことがこうした革新を容易にしたのだと思われる。

ステヴィンは著書『算術』(1585年)において次のことを強調している。

- 「定義 1. 算術は数の学問である。」
- 「定義 2. 数はそれによって物の数量 (quantité) が説明されるものである。」
- 「数は不連続な数量ではない。… 連続的な水が連続的な湿気に対応するように、連続量は連続数に対応する。」
- (数の対等性の認識) 「ばかげた (absurd) 数、不合理 (irrational) な数、不規則 (irregular) な数、不可解 (inexplicable) な数、沈黙の (surd) 数というようなものはない。」しかし、これだけでは、数の全順序性を明確に認識していた証拠としては薄いように思われる。
- 一方では、 a^3 , a^4 等を空間図形的に解釈する試みをしている。
- 負数も扱ってはいるが、ぎこちない。

$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd$$

を $a > b$, $c > d$ なる数の場合や長方形の面積の場合で確認して、

$$(-b)(-d) = bd$$

を「証明」したとしているが、これは当時の流儀であった。後世、オイラーも同様の「証明」を与えている。

6 デカルトの業績

「数には二重の用法がある。というのは、数は、あるときは順序を、またあるときは尺度を述べているからである。(デカルト『精神指導の規則』第 16 規則)」
 ここで「順序」と言っているのは「大きさ」と整合的にするためであろう。言い換えれば、数と量を統一するという方向性がいくらか見えているといえよう。

$$\begin{array}{ccccccc} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{array}$$

- 代数の算法 (四則演算、開冪) を幾何学的に解釈した。しかし一般的に与えられた線分を数と見られるとは述べていないし、さらに進めて、原点を取って直線上の点を数と見ることはまったく考えていない。
- 「 a にそれ自身を掛けたものを a^2 、 a^2 に a を掛けたものを a^3 と書く。これを平方 (= 正方形)、立方 (= 立方体) などと呼びはするが、単なる線分しか考えていないのである。」(『幾何学』)

- 0は数とみなしているが、負数については偽根5とか、「 x が5という量の欠如を示すとき」というように言及している。ごちないながらも文字が負数を表す道を歩んでいることがわかる。

シュペングラーによれば、デカルトは新しい数概念の確立者だという：

デカルトの決定的行為は新しい方法とか直観とかを伝統的な幾何学の領域に導入したことにあるのではなく、新しい数観念の決定的な概念形成にある。…座標系は計量的な大きさを代表したものであるが、デカルトの考察の根底に入ってみると、デカルトはそれを完成したのではなく、その超克である。デカルトの同時代人であるフェルマはギリシア精神最後の模範的代表者であった。(シュペングラー『西洋の没落』)

デカルトは(代数に出てくる)幾何学的連続量をすべて線分として把握することができることを主張したが、数を視覚的な大きさを持った量としてではなく位置を表す点として理解するに至る道程という見方からは、その中ほどに立っているように私には思われる。

デカルトは離散量(数論)と連続量(幾何学)を区別している箇所も多く、数と連続量の統合という考え方に関しても最終的とはいえない。

また、原点を取って、それを基点にして数を表すと言うような考え方(目盛・座標主義)を述べているとはいえない。あくまで、点から点までの距離(大きさ)を数と捉えている。従って、(数学史の本には負数を自在に扱ったようなことが書かれているが)負数を表現する方法は与えていないと断言してよい。

7 数直線概念の完成

西洋における、基点(原点)を定め、直線上の点を数と考えるという数の把握の仕方、簡単に言えば、数直線という概念の導入者はだれなのか、はっきりとはわからないが、公刊された著作という意味ではオイラー(1707-1783)なのではないだろうか。ニュートンが既に負の軸も含めた座標系を自由に使っているが、オイラーはそれを知らなかったと思われる。

『代数学入門』(1770)の冒頭でオイラーは概略次のように述べている：

増加、あるいは減少するものは何であれ、大きさ、あるいは量と呼ばれる。数学は「量」の学問である。どんな量も同種の他の量と比較しなければ測ったり、決定したりできないから、既知の量を一つ選んで、それを「基準」あるいは「単位」として採用する。その上で、測りたい量のこの基準に対する比を決定する。この

比は常に数によって表される。したがって数とは単位に対する量の比以外の何物でもない。

ここで量が数学の扱う中心概念とされているのが注目される。また「数」＝「量の比」ということで数と量が統一されている。

この後オイラーは負数の説明に進むが、古典的な負債の考え方をを使う。これでは、数の把握が一貫されているとはいいがたい。

なお、この「増加、あるいは減少するものは何であれ、量と呼ばれる。数学は量の学問である」という言葉は大変有名になって、この後の時代の多くの教科書に採用され、標準となった。かくして（数学の基本である）数の見方は基数主義（個数主義）からきちないながらも座標主義（位置主義）へと転換したと言える。

大きさ、例えば長さ、を基本とする限り負数の説明は明快性と一貫性を欠くことになる。負数までこめて説明するためには基準点を定めてそれに対する位置を数として把握しなければならない。簡単に言えば、「逆向きの大きさ」は（金銭的な例からもわかるように）原点を定めなければ、登場できないのである。

一方、オイラーは負まで込めた座標軸を導入したことで知られている。『無限解析入門』（1748）の冒頭で数直線が次のように説明されている：

直線の一部 AP が定量を表す。… 直線は双方向に限りなく延びているので、正負の数が表現できる。

ここで A は原点である。おそらくはこれが座標を説明した最初の公にされた文献であろう。同時に、数直線を明確に説明した最初の文献ということになる。ただし、座標によって数を把握するという考え方は表明されていない。数というものが先に存在するもの、あるいは定義されているものと前提されているのである。真に数を直線上の点の座標として定義し、把握する考え方は、さらに後世に生まれた思想のようである。

8 東洋、とくにインドにおける数概念

- ギリシアのように自然数を特別視する思想はない。⇒ 整数論は発達しなかった。
- 数と量との区別もない。また面積と体積といった異なる量概念の間の区別もない。
- 無理、有理というような数の概念的区分がない。ただし、円周率と直径の通約不能性は認識されていた。（『アールヤバティーヤ』（1510年））

- 負数に対する違和感も最初からない。知られる限り古くから、正負の概念があった。
- 中国では最初から 10 進法だった。固定した進法の方が小数の概念が導入しやすい。なお、中国・日本では前後関係で小数点の位置を判断する。

負数を含む演算の規則、たとえば

$$(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd$$

はブラーマグプタ（7 C）が与えたのが最初と見られる。

クリシュナ（16 世紀）はバースカラ II 世（12 世紀）の『リーラーヴァーティー』、『ビージャガニタ』に対する注釈書を刊行した。林隆夫氏が翻訳中であるが、一刻も早い出版が望まれる。

- 「数には物体性、時間性、位置性の三種類がある。」
- 「東西、上下などの一方が正数性を持つと考えれば、他方は負数性を持つ。」
- 負は逆性である。直線上のどちらか一方向を正とすれば、反対方向が負である。数 a に正の数 b を掛けるとは a に a と同じ方向に b の分だけ倍して進めることである。負の数 $-b$ を掛けるとは a とは反対方向に b の分だけ倍して進めることである。

「負数と負数の積が正数となることは牛飼いや羊飼いでも知っている」とクリシュナは述べている。ヨーロッパ世界の負数との悪戦苦闘ぶりを比較するとき、この言葉は鮮烈な驚きを与えないであろうか。

9 1 次元連続体一定義

目標：1 次元連続体を、数体系を前提しないで定義し、実数体の構造を与える。数直線をイメージする。

順序集合 X が 1 次元連続体であるとは、 X が次の性質を持つことを言う：

1. 全順序性
2. 連続性
3. 可分性
4. 非有界性

問題点：この X に実数体の構造を与えるにはあらかじめ存在している実数体 $\mathbb{R}$ を手本にしなければならない。現在のすべての数学は実数体、あるいはその元になる自然数の存在が大前提となって構成されている。したがって、数直線を基礎に据える方式を提唱するためには、1次元連続体の公理を実数体の構造を入れ易い形に変える必要がある。

10 数直線のイメージに基づく連続体の公理系

公理 1. X は全順序集合である。

公理 2. X は連続性公理を満たす。

公理 3. スライド写像の存在： X の任意に固定された点 0 に対して順序自己同型（順序を保つ全単射） $f: X \rightarrow X$ で

$$0 < f(0)$$

を満たすものが存在する。

この公理を使って整数が定義され、次いで整数の間に和と積が定義される。たとえば、

定義 1. 0 は整数である。

2. k を整数とすれば、 $f(k)$, $f^*(k)$ も整数である。

ここに f^* は f の逆写像である。また和や積は

$$n^+ = f(n) \quad (n \text{ の次の整数}), \quad n^- = f^*(n) \quad (n \text{ の前の整数})$$

$$m + n^+ = (m + n)^+, \quad m + n^- = (m + n)^-$$

のように定義される。これによって、整数の全体のなす集合 $\mathbb{Z}$ は可換環をなす。

公理 4. (2倍写像の存在) 順序自己同型 $g: X \rightarrow X$ ですべての整数 n に対して

$$g(n) = 2 \cdot n$$

を満たすものが存在する。

この公理を使って2進有限小数とその演算が定義できる。すなわち、 X の $2^{-n} \cdot m$ ($n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$) の形の元を有限(2進)小数と言い、周知の方法によって有限小数の間に和と積が定義でき、 X は可換環をなす。

公理 5. (アルキメデスの公理) X の任意の元 $\alpha(> 0)$ に対して $2^n \cdot \alpha$ は上に有界ではない。

定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha/2^n = 0$$

以上の5公理を満たす集合 X は容易にわかるように前節で導入した意味での1次元連続体である。さらに、通常の方法で無限級数を定義すれば、1次元連続体 X の元は（無限2進）小数の形に展開される（二通りの展開があり得ることは普通の10進展開の場合と同じである）。逆に任意の（無限2進）小数は X において収束する。無限小数の間に和と積が定義され、 X は体をなす。これが実数体である。以上によって、現在の集合論の公理系内で（自然数、整数、有理数、無理数というルートを通らずに）数直線の定義ができたということになる。

11 「数学は芸術である」（シュペングラー）

シュペングラーの『西洋の没落』は、文明というものの相対性を、それぞれの数学によって特徴づけようと試みた記念碑的な著作である。彼によれば、各文明はそれぞれに異なる数概念を有するのである。

単純な概念は、いつも非常にむずかしいものである。それらは、言葉で言い表しえないというばかりではなく、言葉にする必要もない大量のことから成り立っていて、その仲間の人間には、直観の中に植え付けられているのであるが、外部の人間には、事実上 (ipso facto) まったく近付けないからむずかしいのである。

そのような、単純にして、同時にむずかしい概念として、西洋においてとりわけ独特な内容を持つ「空間」という語が挙げられる。デカルト以来の全数学は、すべて、この偉大にしてまったく宗教的な象徴を、理論的に解釈することに捧げられて来た。ガリレオ以来われらの物理学の目指すところも同じことである。ギリシア・ローマの数学と物理学においては、この「空間」という語の意味内容は単に「知られていなかった」のである。

ここでもまたわれわれがギリシア人の遺産から受け継いで使っている、古典的な名前が事実を覆い隠している。（ギリシアにおいては）幾何学とは（空間に在る物体を）測る術であり、算術とは数える術である。西洋の数学は、この二つの事柄とは何の関係もなくなって久しいのに、それ自身のために新しい名前を宛てなかったのである。—そのためには「解析」という言葉は、どうしようもないほど、不適切である。（『西洋の没落』）