

一様分布論からの話題

信州大 理 鹿 野 健

以下の紹介は主として [19] [20] による.

§ 1. 定義と基本定理

実数列 (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) に対し, その小数部分の列 $(\{x_n\})$, $\{x_n\} = x_n - [x_n]$ を考えると, それはすべて区間

$$I: 0 \leq x < 1.$$

に含まれる.

いま, I の部分区間

$$E: a \leq x < b, \quad E \subset I.$$

を取り, この E に含まれる $\{x_i\}$ ($1 \leq i \leq n$) の個数を

$$N_n(a, b) = N_n(E) \quad \text{と表わすことにすると, もしこの}$$

ような任意の E に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(E)}{n} = b - a,$$

が成り立つとき, 数列 (x_n) は一様分布する (*uniformly distributed mod 1.*) という.

また,

$$D = D(x_1, \dots, x_n) = \sup_{E \subset I} |N_n(E) - (b-a)n|$$

を (x_n) の discrepancy とよぶ。

(x_n) が一様分布するための判定条件は, H. Weyl ^[1] によつて次の様に与えられた。

[定理 1] (x_n) が一様分布するための必要十分条件は, 同値な次の 2 つである。

(1) 任意の自然数 k に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{2\pi i k x_j} = 0.$$

(2) I 上定義された任意の Riemann 可積分函数 $f(x)$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j) = \int_0^1 f(x) dx.$$

以上の定義や定理はそのまま多次元の場合に拡張できる。

§ 2. Weyl の原証明は, いわば "定性的" なもので, 収束の速さ, 即ち D (あるいは $\frac{D}{n}$) に対する大きさの評価は与えられていない。これに関して, Turán と Erdős [2] は次の結果を得た。

[定理 2] $1 \leq k \leq m$ なる任意の自然数 k に対して

$$\left| \sum_{j=1}^m e^{2\pi i k x_j} \right| \leq \psi(k).$$

となるならば, ある絶対定数 c が存在して,

$$D(x_1, \dots, x_m) < c \left(\frac{m}{m+1} + \sum_{k=1}^m \frac{\psi(k)}{k} \right).$$

そして, 最近 LeVague [3] は次の定理を証明した。

[定理3] 任意の実数列 (x_n) に対して

$$\frac{D}{n} \leq \left(\frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{2\pi i k x_j} \right|^2}{k^2} \right)^{\frac{1}{3}},$$

が成り立ち, ここで右辺の指数 $\frac{1}{3}$ は best である。

一方, Van Aardenne-Ehrenfest [4] は,

[定理4] 任意の実数の無限列 (x_n) に対して,

$$D(x_1, \dots, x_n) > c \frac{\log \log n}{\log \log \log n}.$$

となる n が無数に存在する。

ことを示したが, Roth [5] によってこれは

[定理5] 任意の実数の無限列 (x_n) に対して,

$$D(x_1, \dots, x_n) > c \sqrt{\log n}.$$

となる n が無数に存在する, と改良された。これは [定理3]

の証明において本質的な役割を果たす。[定理5] の右辺は

$\log n$ より '大きな' 関数では置き換えられないことが知られている [4]。

一様分布する (x_n) の具体例としては,

例 1) 任意の無理数 α に対して, $x_n = n\alpha$.

(Kronecker - Borel - Weyl)

例 2) すべての素数列 p_n ($2 = p_1 < p_2 < \dots < p_n$: n 番目の素数) と任意の無理数 α に対して, $x_n = p_n \alpha$.

(Turán - Vinogradov)

例 3) $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ なる任意の自然数列 (λ_n) と, 殆んどすべての実数 α に対して, $x_n = \lambda_n \alpha$.

(Weyl)

例 4) 殆んどすべての $\theta > 1$ に対して, $x_n = \theta^n$.

(Koksma)

しかし, (θ^n) が一様分布するような具体的な θ の値は
何も分っていない!

Erdős - Koksma [6] と Cassels [7] によれば, 例 3
については次の定理が成り立つ。

[定理 6] $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ なる任意の (λ_n) と
殆んどすべての実数 α に対して, $x_n = \{\lambda_n \alpha\}$ の discre-
pancy について,

$$D(x_1, \dots, x_n) = o\left(n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{\frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon}\right)$$

が 任意の $\varepsilon > 0$ に対して成立する。

(λ_n) が特に lacunary である場合には, 右辺はある正の定数 δ に対して,

$$O\left(n^{\frac{1}{2}}(\log \log n)^{\delta}\right)$$

となることが示されたが未発表であり, 恐らく lacunary でなくとも成り立つだろうと Endô's は述べている.

§ 3: Hincin [8] の予想として次のものがある。

『 I の任意の可測部分集合 E に対して, 点列 $\{\lambda_k \alpha\}$ ($k=1, 2, \dots, n$) のうち E に含まれるものの個数を $f_n(\alpha)$ と表わせば, 任意の E と殆んどすべての実数 α に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(\alpha)}{n} = m(E).$$

が成り立つであろう。』

これを一般化すれば次のような問題を得る。

『 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ なる自然数の無限列 (λ_n) と,

I 上定義された Lebesgue 可積分函数 $f(x)$ を考える。

すると, (λ_n) と $f(x)$ に更にいかなる条件があれば, 殆んどすべての実数 α に対して

$$(A) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\{\lambda_k \alpha\}) = \int_0^1 f(x) dx.$$

となるか? 』

Raikov [9], F. Riesz [10] によって, $\lambda_n = a^n$ ($a > 1$: 自然数) については, (A) が任意の $f \in L$ に対して成り立つ事が示された。また, その収束の速さについても, Fortet [11], Kac [12], Mukhtidinov [13], Postnikov [14] etc. の研究がある。

一オ Erdős は次のような一連の結果を得ている [15]。

[定理 7] $\{\lambda_n\}$ が lacunary で $f \in L^2$ のとき, $f(x)$ の Fourier 展開の部分和を $S_n(x)$ とすると, もし

$$(B) \quad \int_0^1 |f(x) - S_n(x)|^2 dx = O\left(\frac{1}{(\log \log n)^{2+\varepsilon}}\right),$$

ならば (A) が成立する。

[定理 8] (B) を除いてしまって無条件では (A) は成立しない。即ち, lacunary sequence (λ_n) と $f \in L^p$ ($\forall p \geq 1$) が存在して, 殆んどすべての α に対して

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\{\lambda_k \alpha\}) = +\infty.$$

詳しくは, $\forall \varepsilon > 0$ に対して,

$$(c) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\log \log n)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}} \sum_{k=1}^n f(\{\lambda_k \alpha\}) = +\infty,$$

が成り立つ。

所が一方

[定理9] 任意の lacunary sequence $\{\lambda_n\}$ と, $f \in L^2$ について,

$$(D) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n (\log n)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}} \sum_{k=1}^n f(\{\lambda_k \alpha\}) = 0,$$

が殆んどすべての α と $\forall \varepsilon > 0$ に対して成り立つ。

Koksma は次の結果を証明した [16]。

[定理10] $f \in L^2$ とし, その Fourier 係数を (c_n) とする。もし

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|c_n|^2 \sum_{d|n} \frac{1}{d}) < +\infty,$$

ならば, 殆んどすべての α に対して,

$$(E) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\{k\alpha\}) = \int_0^1 f(x) dx.$$

$\sum_{n=2}^{\infty} |c_n|^2 \log \log n < +\infty$ ならばこれは成立している。

Hinčin [17] によれば,

[定理11] 任意の無理数 α と $f \in L$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\alpha k + \theta) = \int_0^1 f(x) dx$$

が殆んどすべての θ について成り立つ。

これを一般化すれば次のような問題が考えられる。

『 (x_n) が一様分布するとき, $f \in L$ に対して

$$(F) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k + \theta) = \int_0^1 f(x) dx.$$

が殆んどすべての θ について成立するための条件 (f と (x_n) に関する) は何か? 』

Salem は Erdős の方法によって, (F) の成立には何らかの条件が必要であることを示し [18], 更に次の結果を得た。

[定理 12] 任意の一様分布列 (x_n) に対して, $f \in L^2$ が周期 1 をもち,

$$\int_0^1 f(x) dx = 0,$$

であるならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n f(t + x_k) \right|^2 dt = 0.$$

[文 献]

- [1] H. Weyl : Math. Ann. 77 (1916) p.313 ~ 352.
- [2] P. Turán - P. Erdős : Indag. Math. 10 (1948)
p. 370 ~ 378 and p. 406 ~ 413.
- [3] W.J. LeVeque : Proc. of Symposia in Pure Math. vol. VIII.
(AMS) (1965) p. 22 ~ 30.
- [4] T. van Aardenne-Ehrenfest : Indag. Math. 11 (1949)
p. 264 ~ 269.

- [5] K. F. Roth : *Mathematika*, 1 (1954) p. 73 ~ 79.
- [6] Erdős, J. F. Koksma : *Indag. Math.* 11 (1949)
p. 299 ~ 302.
- [7] J. W. S. Cassels : *Proc. Camb. Phil. Soc.* 46 (1950)
p. 209 ~ 218.
- [8] A. Ya. Hinčin : *Math. Zeit.* 18 (1923), p. 289 ~ 306.
- [9] D. A. Raikov : *Mat. Sbor.* 1 (1936), p. 377 ~ 384.
- [10] F. Riesz : *Math. Helv.* 17 (1945), p. 227 ~ 239.
- [11] R. Fortet : *Studia Math.* 9 (1940), p. 54 ~ 70.
- [12] M. Kac : *Ann. of Math.* (2) 47 (1946) p. 33 ~ 49.
- [13] R. H. Muhutdinov : *Dokl. Akad.* 142 (1962) p. 36 ~ 37.
- [14] A. G. Postnikov : *Proc. Steklov Inst. Math.* no. 82
(1966). *AMS Translation* (1967).
- [15] P. Erdős : *Trans. A.M.S.* 67 (1949) p. 51 ~ 56.
- [16] J. F. Koksma : *Bull. Soc. Math. Belg.* 6 (1953 ~ 54)
p. 4 ~ 13.
- [17] A. Ya. Hinčin : *Recueil Math.*, Moscou 41 (1934)
p. 11 ~ 13.
- [18] R. Salem : *Acta Sci. Math. Pzged* 12 (1950)
p. 87 ~ 96. *Oeuvres Math.* p. 455 (Hermann) - ^{1967.}

[19] Kohama et al. : *Comp. Math.* 16 (1964) p. 1 ~ 203

[20] Zigler - Idelmberg : *Jahr. der D. M. V.* 64 (1961) p. 1 ~ 50