

Quillen 複体のホモトピー型について

獨協医科大学基盤教育センター数学・統計学 藤田亮介 (Ryousuke Fujita)

Department of mathematics and statistics, Dokkyo Medical University

1 序

Quillen 複体とは, 有限群 G の基本アーベル p 部分群の集合に, 包含で順序を入れた部分群複体のことである. Quillen 複体のホモトピー性質に関する研究は, 主に組み合わせ論, 有限群論の立場から行われてきた. 特に有限群論研究者のモチベーションは「非可換有限単純群, 特に 26 個の散在群の特徴付け」にある. その意味では純代数なのであるが, 扱う対象が図形であるだけに, トポロジ的な立場から有限群を眺めたいという思いが筆者にはある.

本稿では, Quillen 複体のホモトピー型に関する研究を概観するとともに, 現時点での最新の結果を紹介することを目的としたい.

2 順序複体のトポロジー

順序集合 $\mathcal{P}$ に対して, 集合

$$\Delta(\mathcal{P}) =: \{X \subseteq \mathcal{P} \mid X \text{ は } (\mathcal{P}, \leq) \text{ の全順序有限部分集合} \}$$

を考えると, 対 $(\mathcal{P}, \Delta(\mathcal{P}))$ には抽象的単体複体の構造が入る. これを $\mathcal{P}$ から構成される順序複体という. しばしば対 $(\mathcal{P}, \Delta(\mathcal{P}))$ を単に $\Delta(\mathcal{P})$ と省略する. この順序複体に対して, その幾何学的実現を $|\Delta(\mathcal{P})|$ と書くことにすると, 順序集合 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ 間の順序を保つ写像 $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ は, 自然に連続写像 $|f|: |\Delta(\mathcal{P})| \rightarrow |\Delta(\mathcal{Q})|$ を誘導する. また, 2 つの順序を保つ写像 $f, g: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ が, 任意の $x \in \mathcal{P}$ に対して $f(x) \leq g(x)$ ならば, $|f|, |g|$ はホモトピックである. $|f|, |g|$ もしばしば単に f, g と省略する. 幾何学的実現でのトポロジーの用語をそのまま順序集合での用語として使用しよう. 以下, この約束に従う. 最大元あるいは最小元をもつ順序集合は直ちに可縮である. もっと一般に次が成り立つ.

命題 2.1. $\mathcal{P}$ を順序集合とするとき, 順序を保つ自己写像 $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ があって, 全ての元 $x \in \mathcal{P}$ に対して $x \leq f(x) \leq x_0$ となるような $x_0 \in \mathcal{P}$ があれば, $\mathcal{P}$ は可縮である.

順序複体のトポロジーでは、上の可縮を特に**錐的に可縮** (conically contractible) とよんでいる。次に、順序集合 $\mathcal{P}$ の切片を次の記号で書くことにしよう。

$$\mathcal{P}_{\leq x} =: \{y \in \mathcal{P} \mid y \leq x\}$$

$\mathcal{P}_{< x}, \mathcal{P}_{\geq x}, \mathcal{P}_{> x}$ 等も同様に定義される。この記号の下で、述べられる次の定理は順序複体の理論で基礎となるものである。

命題 2.2. $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ を順序集合とする。順序を保つ写像 $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ があって、任意の元 $y \in \mathcal{Q}$ に対して $f^{-1}(\mathcal{Q}_{\leq y})$ (あるいは $f^{-1}(\mathcal{Q}_{\geq y})$) が可縮ならば、 f はホモトピー同値である。

この定理は Quillen によって発見され、“Fibre Lemma” と称されている ([8])。証明は「Acyclic Carrier Theorem」を使ってなされる。この命題の直接の応用として、次の定理が知られている。

定理 2.3. 有限順序集合 $\mathcal{P}$ に対して、 $\mathcal{P}^< =: \{x \in \mathcal{P} \mid \mathcal{P}_{< x} \text{ は可縮ではない}\}$ とおく。そのとき、 $\mathcal{P}^< \subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ を満たす任意の $\mathcal{P}$ の部分順序集合 $\mathcal{Q}$ と $\mathcal{P}$ はホモトピー同値である。包含写像がホモトピー同値写像を誘導する。

証明. $\mathcal{P}$ は有限順序集合であるから、 $\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$ には極大元が存在するが、そのうちの1つを x とし、 $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P} \setminus \{x\}$ とおく。包含写像 $\iota: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}$ の各ファイバー $\iota^{-1}(\mathcal{P}_{\leq y}) = (\mathcal{P}_1)_{\leq y}$ を考察する。ここで、(i) $y = x$, (ii) $y \neq x$ に場合分けする。まず、(i) の場合であるが、 $(\mathcal{P}_1)_{\leq y} = (\mathcal{P}_1)_{\leq x} = \mathcal{P}_{< x}$ となる。実際、 $s \in \mathcal{P}_{< x}$ を取ると、 $s \neq x$ であるから $\mathcal{P}_1$ の定義より $s \in (\mathcal{P}_1)_{\leq x}$ である。よって、 $(\mathcal{P}_1)_{\leq x} \supseteq \mathcal{P}_{< x}$ 。逆の包含は明らかである。一方、 x の選び方から $x \notin \mathcal{Q}$ である。よって、 $x \notin \mathcal{P}^<$ 。ゆえに、 $\mathcal{P}_{< x}$ は可縮である。(ii) の場合は $y \in \mathcal{P}_1$ であるから、 $(\mathcal{P}_1)_{\leq y}$ は最大元 y をもつ。よって、 $(\mathcal{P}_1)_{\leq y}$ は可縮である。(i), (ii) いずれの場合にも、Fibre Lemma により、 $\iota: \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}$ はホモトピー同値である。次に、 $\mathcal{P}_1 \setminus \mathcal{Q}$ の極大元を x_1 とし、 $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 \setminus \{x_1\}$ とおく。上と同じ議論により、 $\mathcal{P}_2$ と $\mathcal{P}_1$ はホモトピー同値である。この操作をさらに続けるが、 $\mathcal{P}$ の有限性から高々有限回で $\mathcal{Q}$ に到達する。□

3 Brown 複体と Quillen 複体

前節で見たように、順序集合 $\mathcal{P}$ に応じて様々な順序複体を考えることができ、そのホモトピー同値性を調べることが可能である。

特に, 有限群 G の部分群のある種の族を対象に, 包含を順序として定義するとき, その順序複体を「部分群複体」という. 以下, 考察対象とするのは Brown 複体, Quillen 複体とよばれる部分群複体である.

有限群 G とその位数を割る素数 p を 1 つ固定したとき,

$$S_p(G) =: \{G \text{ の非自明な } p \text{ 部分群} \}$$

$$A_p(G) =: \{G \text{ の非自明な基本アーベル } p \text{ 部分群} \}$$

をそれぞれ Brown 複体, Quillen 複体という. これらの部分群複体が注目されたのは, 1970 年代に K.S.Brown による次の “ホモロジカルなシローの定理” による.

定理 3.1. $S_p(G)$ のオイラー標数は, シロー p 部分群の位数を法として 1 と合同である.

また, $S_p(G)$ と $A_p(G)$ のホモトピー的關係については次の定理が答える.

定理 3.2. Quillen 複体は Brown 複体にホモトピー同値である.

この定理は最初に Quillen により発見された ([9]) もので, 包含写像 $\iota: A_p(G) \rightarrow S_p(G)$ に対して, $S_p(G)$ に属する任意の p 部分群 P のファイバー $\iota^{-1}(S_p(G)_{\leq P})$ に Fibre Lemma を使って直接示される. 一方, 次の命題が成り立つ.

命題 3.3. $A_p(G) = S_p(G)^{<}$

$S_p(G)^{<}$ は前節の定理 2.3 で用いられた記号であり, 再述すると

$$S_p(G)^{<} = \{P \in S_p(G) \mid S_p(G)_{<P} \text{ は非可縮} \}$$

である. 証明を与えておこう.

証明. $P \in S_p(G)$ が非基本 p 部分群であれば, 非自明なフラッティニ部分群 $\Phi(P)$ が存在する. そこで, 写像 $f: S_p(G)_{<P} \rightarrow S_p(G)_{<P}; Q \mapsto Q\Phi(P)$ と定義すれば, well-defined である. さらに, $Q \subseteq Q\Phi(P) \supseteq \Phi(P)$ であるので, 命題 2.1 より $S_p(G)_{<P}$ は可縮である. よって, $A_p(G) \supseteq S_p(G)^{<}$ を得る. 逆の包含を示すには, $P \in S_p(G)$ が基本 p 部分群であると仮定する. 基本 p 部分群 P は $\mathbb{Z}_p$ 上のベクトル空間と思えるが, $S_p(G)_{<P} = S_p(P)_{<P}$ であることに注意すると, この集合はベクトル空間 P の真部分空間族の束である. ゆえに, Solomon-Tits の定理より, $S_p(G)_{<P}$ はいくつかの球面のブーケあるいは空集合にホモトピー同値であることがわかる. いずれにしても, 非可縮である. よって, $A_p(G) \subseteq S_p(G)^{<}$ である. $\square$

再度, 命題 3.3 を見直そう. 言うまでもなく, 「Quillen 複体 $\mathcal{A}_p(G)$ は Brown 複体 $\mathcal{S}_p(G)$ の中で, “可縮” というホモトピーの言葉で特徴付けされる」のである. そこで, 自然に次の様な問題が提起される.

問題 3.4. 他の部分群複体で, このようなものがあるのか?

この問題に関しては, いくつかは知られている. 例えば, Bouc による次の部分群複体がある.

$$\mathcal{B}_p(G) =: \{P \in \mathcal{S}_p(G) \mid P = O_p(N_G(P))\}$$

ここで, 記号 $O_p(N_G(P))$ は P の G における正規化群 $N_G(P)$ の最大正規 p 部分群を表す. この部分群複体は p -radical 複体, あるいは Bouc 複体とよばれている. その定義からわかるように, 有限群 G のシロー p 部分群の集合 $\text{Syl}_p(G)$ を含む族であり, $\mathcal{S}_p(G)$, 従って, $\mathcal{A}_p(G)$ とホモトピー同値であることがわかる. さて, P の G における中心化群を $C_G(P)$ とするとき, p -centric 複体とよばれる次の部分群複体

$$\mathcal{C}_p(G) =: \{P \in \mathcal{S}_p(G) \mid C_G(P) \text{ の } p \text{ 元は } P \text{ に属する}\}$$

と $\mathcal{B}_p(G)$ との交わりを Sawabe 複体という. これを $\mathcal{B}_p^{\text{cen}}(G)$ とかく. すなわち,

$$\mathcal{B}_p^{\text{cen}}(G) =: \mathcal{B}_p(G) \cap \mathcal{C}_p(G)$$

である. Sawabe 複体 $\mathcal{B}_p^{\text{cen}}(G)$ は p -centric 複体 $\mathcal{C}_p(G)$ とホモトピー同値であるが, 一般には $\mathcal{B}_p(G)$ とはホモトピー同値にはならない. Sawabe の結果 [11] は次の定理である.

定理 3.5. V を $\mathcal{B}_p(G) \setminus \mathcal{B}_p^{\text{cen}}(G)$ に属する最大位数の元とし, その位数を p^d とおく. また, G のシロー p 部分群の位数を p^n とする. そのとき, $\mathcal{B}_p^{\text{cen}}(G)$ のオイラー標数は p^{n-d} を法として 1 と合同である.

変換群論的には次の問題も自然に提起される.

問題 3.6. 同変版の順序複体, 特に部分群複体の理論は?

部分群複体の理論を同変カテゴリーで考えるためには, 共役作用を考えるのが自然であり, その下で部分群複体は G 複体になる. 一般に, 前節の命題 2.2 にあたる次の命題 [14] が知られている.

命題 3.7. $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ を G 順序集合とする. 順序を保つ G 写像 $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ があって, 任意の元 $y \in \mathcal{Q}$ に対して $f^{-1}(\mathcal{Q}_{\leq y})$ (あるいは $f^{-1}(\mathcal{Q}_{\geq y})$) が G_y 可縮ならば, f は G ホモトピー同値である.

この命題を基礎として, 既述の命題, 定理は同変版に拡張することができる.

4 Quillen 複体のホモトピー型

この節では, Quillen 複体のホモトピー型を考える. そもそも, Brown 複体や Quillen 複体は p 部分群の全順序列を, その単体とするものであり, 位数が低い群を除いて, 一般に直接描写することは不可能である. 筆者が非常に興味をそそられたのは次の Quillen の定理 [9] である.

定理 4.1. 有限可解群 G について, $O_p(G)$ が非自明であるための必要十分条件は Brown 複体 $S_p(G)$ が可縮になることである.

この定理は, 可縮というホモトピーの言葉で, 群 G の特徴付けを見事に主張している. そこで, 次の問題を提起した.

問題 4.2. Brown 複体 $S_p(G)$ (あるいは Quillen 複体 $A_p(G)$) が球面にホモトピー同値になるか? またそのときの特徴付けはどうなるのか?

これに対する筆者の解答は以下の定理である.

定理 4.3. どのような有限群 G に対しても, Quillen 複体 $A_p(G)$ は球面にホモトピー同値にならない.

証明. $A_p(G)$ が n 次元球面 S^n にホモトピー同値であるとする. オイラー標数 $\chi(A_p(G)) = 1 + (-1)^n$ である. 一方, ホモロジカルなシローの定理により, $\chi(A_p(G)) = 1 + kp^m$ (ここで $m \geq 1, k$ は適当な整数). よって, $kp^m = (-1)^n$ である. これは矛盾である. $\square$

それでは, Quillen 複体 $A_p(G)$ のホモトピー型の正体は何なのか? これに対する 1 つの解答は 2005 年の Francesco の次の定理 [3] である.

定理 4.4. G を有限可解群, p を G の位数の奇素因数とする. そのとき, Quillen 複体 $A_p(G)$ はいくつかの球面のブーケにホモトピー同値である.

なお, この定理で述べている各球面については次元の相違性を許すが, 筆者は次元の精緻化を主張する次の定理を得た.

定理 4.5. m, n は偶奇性が一致する自然数とする. そのとき, Quillen 複体 $A_p(G)$ は S^m と S^n のブーケにホモトピー同値にはならない. 特に, その Quillen 複体 $A_p(G)$ が S^m と S^n のブーケにホモトピー同値になるような有限可解群は存在しない.

証明. $A_p(G)$ が m 次元球面 S^m と n 次元球面 S^n のブーケにホモトピー同値であるとする. オイラー標数を計算しよう. ここで, $\tilde{\chi}(A_p(G)) = \chi(A_p(G)) - 1$

とおくと, $\tilde{\chi}(\mathcal{A}_p(G)) = (-1)^m + (-1)^n$ である. m, n の偶奇性の条件から, この値は 2 あるいは -2 . ホモロジカルなシローの定理により, G のシロー部分群は位数 2 の巡回群に限定される. そのとき, Quillen 複体 $\mathcal{A}_p(G)$ はいくつかの点からなる 0 次元複体であるが, これは矛盾である. $\square$

さらに, これを一般化すれば次の系を得る.

系 4.6. q を素数とする. そのとき, Quillen 複体 $\mathcal{A}_p(G)$ は n 次元球面の q 個の S^n のブーケにホモトピー同値にはならない. 特に, その Quillen 複体 $\mathcal{A}_p(G)$ が q 個の S^n のブーケにホモトピー同値になるような有限可解群は存在しない.

最後に非可解群の場合を触れておこう. 例えば, G が 5 次交代群 A_5 の場合, Quillen 複体 $\mathcal{A}_p(A_5)$ は $p = 2, 3, 5$ のいずれの場合も可縮ではない ([4]). 対称群に関しては Ksontini による次の結果 [5, 6] が知られている.

定理 4.7. n 次対称群 S_n の Quillen 複体 $\mathcal{A}_p(S_n)$ について, p が奇素数であるとき, 単連結であるための必要十分条件は, $3p + 2 \leq n < p^2$ あるいは $n \geq p^2 + p$ を満すことである. また, $p = 2$ のとき, 単連結であるための必要十分条件は, $n = 4$ または $n \geq 7$ となることである.

これとは別に, Shareshian は「GAP」を使って, Quillen 複体 $\mathcal{A}_3(S_{13})$ のホモロジー群を計算し, トーシヨン・フリー加群ではないことを示した ([10]). これは Quillen 複体 $\mathcal{A}_3(S_{13})$ が球面のブーケにホモトピー同値ではないことを意味している.

参考文献

- [1] Björner A., *Homotopy type of posets and lattice complementation*, J. Combinatorial Theory, Series A. **30**(1981), 90–100.
- [2] Björner A and Walker J.W., *A homotopy complementation formula for partially ordered sets*, Europ. J. Combinatorics. **4**(1983), 11–19.
- [3] F. Francesco., *On the homotopy type of the Quillen complex of finite soluble groups*, J. Algebra. **283**(2005), 639–654.
- [4] Fujita F., *On the homotopy equivalence of the subgroup complex (Japanese)*, RIMS Kokyuroku. **1575**(2008), 22–39.
- [5] Ksontini R., *Simple connectivity of the Quillen complex of the symmetric group*, J. Combinatorial Theory, Series A. **103**(2003), 257–279.

- [6] Ksontini R., *The fundamental group of the Quillen complex of the symmetric group*, J. Algebra. **282**(2004), 33–57.
- [7] Pulkus J and Welker V., *On the homotopy type of the p -subgroup complex for finite solvable groups*, J. Austral. Math. Soc, Series A. **69**(2000), 212–228.
- [8] Quillen D., *Higher algebraic K-theory I*, Lecture Notes in Mathematics., vol.**341**, Springer-Verlag, Berlin, 1973, pp.85–147.
- [9] Quillen D., *Homotopy properties of the poset of nontrivial p -subgroups of a group*, Advances in Math. **28**(1978), 101–128.
- [10] Shareshian J., *Hypergraph matching complexes and Quillen complexes of symmetric groups*, J. Combinatorial Theory, Series A. **106**(2004), 299–314.
- [11] Sawabe M., *On the reduced Lefschetz module and the centric p -radical subgroups*, Tokyo J. Math. **28**(2005), 79–90.
- [12] Symonds P., *The orbit space of the p -subgroup complex is contractible*, Comment. Math. Helv. **73**(1998), 400–405.
- [13] Thévenaz J., *Permutation Representations Arising from Simplicial Complexes*, J. Combinatorial Theory, Series A. **46**(1987), 121–155.
- [14] Thévenaz J and Webb P.J., *Homotopy Equivalence of Posets with a Group Action*, J. Combinatorial Theory, Series A. **56**(1991), 173–181.
- [15] Walker J.W., *Homotopy type and Euler characteristic of partially ordered set*, Europ. J. Combinatorics. **2**(1981), 373–384.
- [16] Webb P.J., *Subgroup complexes*, Proc. Symp. in Pure Math. **47**(1987), the Arcata Conf. in Representation of Finite Groups, Vol , 349–365.
- [17] Welker V., *The Poset of Conjugacy Classes of Subgroups in a Finite Solvable Group*, J. Algebra. **148**(1992), 203–218.