

A Note on Hrushovski's Pseudoplanes

池田宏一郎 (Koichiro Ikeda)

豊田工業高等専門学校

安定な理論 (stable theory) の可算モデルに関する有名な予想として Lachlan 予想が知られているが、安定な理論を単純な理論 (simple theory) に置き換えた次の予想がある：

拡張された Lachlan 予想 可算モデルの数が有限個となる様な単純な理論は存在しない。

この予想は解かれてないが、もし可算モデルの数が有限個となる単純理論が存在するならば、その理論は無限の weight をもつ small な理論でなければならない。ここでは Hrushovski[2], Herwig[1] の方法を用いて、以下の定理を証明することを目指す：

定理 無限の weight をもつ、安定でないが単純かつ small な理論が存在する。更にこの理論の 1-type はひとつしかない。

1 関数 f の定義

- 二項関係 $R_i(*, *) (i < \omega)$ は次の条件を満たしているものとする：
 1. 各 $i < \omega$ に対して $\models \forall x \forall y (R_i(x, y) \rightarrow R_i(y, x))$;
 2. 各 $i < \omega$ に対して $\models \forall x \forall y (R_i(x, y) \rightarrow x \neq y)$;
 3. $i \neq j \rightarrow \models \forall x \forall y (\neg (R_i(x, y) \wedge R_j(x, y)))$
- 言語 $L = \{R_i : i < \omega\}$.
- $A, B, C, \dots$ は有限 L 構造を表す。

- 自然数の増加列 $(s_i)_{i < \omega}, (k_i)_{i < \omega}$, および自然数から実数への関数の列 $(f_i)_{i < \omega}$ を次の様に構成する:

1. $s_0 = 2$;

2. $f_0(x) = \frac{1}{s_0} \log x$;

3. $k_0 = \min\{k < \omega : f_0(k) > 2\}$;

4. s_{n+1} を次の条件を満たすようにとる:

- $s_{i+1} \geq 2s_i$;

- 任意の A に対して、 $|A| \leq 2k_n, \delta_n(A) > f_n(|A|) \Rightarrow \delta_n(A) > f_n(|A|) + \frac{4k_n}{s_{n+1}}$. (但し、 $\delta_n(A) = |A| - \sum_{j=0}^n \frac{1}{s_j} |R_j^A|$);

5. $f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x) & (x \leq k_n) \\ \frac{1}{s_n} \log \frac{x}{k_n} + f_n(k_n) & (k_n < x) \end{cases}$

6. $k_{n+1} = \min\{k < \omega : f_n(k) > n + 2\}$

定義 関数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ を次の様に定義する:

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & (0 \leq x \leq k_0) \\ f_1(x) & (k_0 < x \leq k_1) \\ f_2(x) & (k_1 < x \leq k_2) \\ \dots & \dots \end{cases}$$

定義 A, B を有限 L 構造とする。このとき

- $\delta_i(A) =_{\text{def}} |A| - \sum_{j=0}^i \frac{1}{s_j} |R_j^A|$.

- $\delta(A) =_{\text{def}} \lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i(A)$.

- $\delta(A/B) =_{\text{def}} \delta(AB) - \delta(B)$.

特に $A \subset B$ のとき

- $A \leq B$ (A は B で閉) $\Leftrightarrow_{\text{def}} X \subset B - A$ に対して $\delta(X/A) > 0$.

δ の定義より $\leq$ に関する以下の性質はあきらか。

- 性質 1** (i) $A \subset B \subset C \in K$ かつ $A \leq C$ ならば $A \leq B$.
(ii) すべての $A \in K$ に対して $\emptyset \leq A$
(iii) $A, B \subset C \in K$ とする。このとき $A \leq C$ ならば $A \cap B \leq C$.

注意 2 関数 f は次の性質を満たす：

1. f は上に凸；
2. $k_n < x \leq k_{n+1}$ ならば $f'(x) = \frac{1}{s_n x}$ ；
3. $|A| \leq 2k_n$ かつ $\delta_n(A) > f_n(|A|)$ ならば $\delta(A) > f(|A|)$.

2 K -generic な構造

定義 有限 L 構造のクラス K を以下のように定義する：

$$K =_{\text{def}} \{A : \text{任意の } B \subset A \text{ に対して } \delta(B) > f(|B|)\}.$$

定義 A, B, C を $A = B \cap C$ を満たす有限 L 構造とする。このとき B と C の A 上の free amalgam ($B \otimes_A C$ とかく) とは次の様な L 構造である：

- (i) $|B \otimes_A C| = B \cup C$ ；
- (ii) $R^{B \otimes_A C} = R^B \cup R^C$.

補題 3 (Amalgamation) $A \leq B \in K, A \leq C \in K, D = B \otimes_A C$ ならば $B \leq D, C \leq D, D \in K$.

証明 $B \leq D, C \leq D$ はほぼあきらか。 $D \in K$ を示す。 $|C| \leq |B|$ と仮定してもよい。 $k_n < |B| \leq k_{n+1}$ とする。 $A \leq B$ より

$$\frac{\delta_n(B) - \delta_n(A)}{|B - A|} \geq \frac{1}{s_n |B|}.$$

注意 2.2 より

$$\frac{\delta_n(B) - \delta_n(A)}{|B - A|} \geq f'(|B|).$$

よって注意 2.1 より

$$\delta_n(D) > f_n(|D|).$$

明らかに $|D| \leq 2k_n$ であるので注意 2.3 より

$$\delta(D) > f_n(|D|) \geq f(|D|).$$

故に $D \in K$. ■

定義 次の条件を満たすような L 構造 M を K -generic という :

1. M は可算 ;
2. $A(\text{有限}) \subset M$ ならば $A \in K$;
3. $A \leq B \in K$ かつ $A \leq M$ ならば $B \cong B' \leq M$ を満たすような B' が存在する。

注意 4 「 A は閉」は定義可能 : すなわち A を解にもつ論理式 $\phi(\bar{x}) \in L$ で、 $\phi(A')$ ならば $A'(\text{閉}) \cong A$, を満たすものがある。

M を K -generic な構造とする (性質 1 よりそのような M は存在する)。

補題 5 M は飽和モデル。

証明 有限集合 $A(\subset M)$ 上のタイプ p が M で解をもつことを示す。ここで $A \leq M$ と仮定して構わない。 N を ω 飽和なモデルとする。 N の飽和性より、 $\text{tp}(C) = \text{tp}(A)$ を満たす $C \subset N$ が存在するので、 $\sigma(A) = C$ を満たす elementary map σ が存在する。再び N の飽和性より $\sigma(p)$ の解は N の中にあるので、その解を D とする。 $CD \leq N$ と仮定して構わない。このとき M が generic であることより、

$$AB \leq M, AB \cong CD$$

をみたす $B \subset M$ が存在する。

主張 : $\tau(AB) = CD$ となる elementary map $\tau : M \rightarrow N$ が存在する。

証明 : L 論理式を並べたものを $\{\phi_i(\bar{x}, \bar{y}_i) : i < \omega\}$ とする。このとき Back-and-forth で次の条件を満たす $(E_i)_{i < \omega}, (F_i)_{i < \omega}$ を構成する :

- (i) $AB = E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq M$;
- (ii) $M = \bigcup F_i$;

- (iii) $CD = F_0 \leq F_1 \leq F_2 \leq \dots \leq N$;
- (iv) $E_i E_{i+1} \cong F_i F_{i+1}$;
- (v) i が奇数のとき、各 $j \leq i$ に対して $\phi_j(\bar{x}, \bar{d}) \in L(F_i)$ が無矛盾であるならば F_{i+1} の中に解をもつ。

M を並べたものを $(a_i)_{i < \omega}$ とする。

i が偶数のとき： E_i に入っていない M の元で一番インデックスが小さいものもと E_i との閉包を E_{i+1} とする。このとき

$$X F_i \cong E_{i+1} E_i, X \leq M$$

は論理式で表現できる (注意 4)。よって N の中にその解があるので、それを F_{i+1} とすればよい。

i が奇数のとき：各 $j \leq i$ に対して $\phi_j(\bar{x}, \bar{d}) \in L(F_i)$ が無矛盾ならば N の中に解がとれる。それら (有限個) をすべて集めてきて F_i と閉包をとったものを F_{i+1} とする。このとき M が generic であることより、 $E_{i+1} \leq M$, $E_{i+1} E_i \cong F_{i+1} F_i$ を満たす E_{i+1} が M の中に取れる。

$M' = \bigcup_i F_i$ とすると、 $M \cong M' \prec N$ 。よって $\tau(AB) = CD$ を満たす M から N への elementary map τ が存在する。

したがって p は M の中に解 B をもつので M は saturated. ■

系 6 $\text{Th}(M)$ は small.

3 単純性と weight

定義 $d_M(A) = \inf\{\delta(B) : A \subset B \subset_\omega M\}$

定義 $A \downarrow_C B$ を次の様に定義する：

- (i) $d(A/BC) = d(A/C)$;
- (ii) $\text{cl}(AC) \cap \text{cl}(BC) \subset \text{cl}(C)$.

定義 三項関係 $\ast \downarrow_\ast^\circ \ast$ が以下の性質を満たすとき独立概念であるという：

- (i) 不変性
- (ii) 対称性： $A \downarrow_C^\circ B$ ならば $B \downarrow_C^\circ A$.
- (iii) 推移性： $A \downarrow_C^\circ B, A \downarrow_{CB}^\circ D$ ならば $A \downarrow_C^\circ BD$.
- (iv) 拡張性：任意の $\bar{a}, A, B$ に対して、 $\bar{a}' \downarrow_A^\circ B$ を満たす $\text{tp}(\bar{a}/A)$ の解 $\bar{a}'$ が存在

- (v) 局所性 : 任意の $\bar{a}, A$ に対して $\bar{a} \downarrow_B^0 A$ を満たす可算な $B \subset A$ が存在する。
 (vi) 有限性 : $\bar{a} \downarrow_A^0 B \Leftrightarrow$ 任意の $\bar{b} \in B$ に対して $\bar{a} \downarrow_A^0 \bar{b}$.
 (vii) Independence Theorem: あるモデル M に対して $\bar{a} \downarrow_M^0 \bar{b}, \bar{x} \downarrow_M^0 \bar{a}, \bar{y} \downarrow_M^0 \bar{b}$ であるとする。このとき $\bar{z} \downarrow_M^0 \bar{a}\bar{b}$ を満たす $\text{tp}(\bar{x}/M\bar{a}) \cup \text{tp}(\bar{y}/M\bar{b})$ の解 $\bar{z}$ が存在する。

このとき次の補題が導かれる (詳しくは [3])。

補題 7 (i) $* \downarrow_* *$ は独立概念.
 (ii) T は単純 (かつ非安定)。

補題 8 $\text{wt}(T) = \infty$.

証明 次の様な $a, a_i (i < \omega)$ が M の中に取れる :

- $\{a\} \cup \{a_0, a_1, \dots\} \leq M$;
- $R_i(x, y) \Leftrightarrow \{x, y\} = \{a, a_i\}$.

このとき各 $i < \omega$ に対して $a \not\downarrow a_i$. また各 $i < \omega$ に対して $2s_i \leq s_{i+1}$ なので

$$\delta(a/a_0, a_1, \dots) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{s_j} \geq 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} > 0$$

よって $a_0 a_1 \dots \leq a a_0 a_1 \dots \leq M$ であるので $\downarrow \{a_i\}_{i < \omega}$. よって $\text{wt}(a) = \infty$. ■

参考文献

- [1] Bernhard Herwig, Weight omega in stable theories with few types, Journal of Symbolic Logic, vol.60, 353–373, 1995
 [3] Ehud Hrushovski, Simplicity and the Lascar group, preprint, 1997
 [3] Frank O. Wagner, Simple Theories, Kluwer Academic Publishers, 2000