

あるタイムラグをもつ微分方程式の保存量と大域挙動

静岡大学大学院理工学研究科 芦澤恵太 (Keita Ashizawa)
 静岡大学工学部 齋藤保久 (Yasuhisa Saito)
 静岡大学工学部 宮崎倫子 (Rinko Miyazaki)

1 序論

次の Lotka-Volterra 微分方程式

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t)[-x(t) + y(t)] \\ y'(t) = \beta y(t)[-y(t) + x(t)] \end{cases} \quad (1)$$

を考えてみよう. ここで $\alpha, \beta > 0$ とし, $x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0$ である. このとき明らかに $0 \leq t < \infty$ で $x(t) > 0, y(t) > 0$ となる. $x(t), y(t)$ が時刻 t のときの状態を表しているとする, (1) は $x(t), y(t)$ それぞれの状態変化を互いの状態の“差”で決めている系である. さらに (1) は“自分” $x(t)$ (or $y(t)$) と“他者” $y(t)$ (or $x(t)$) の状態を比べて差が小さくなるように自己のふるまいを決定する系と解釈することができる.

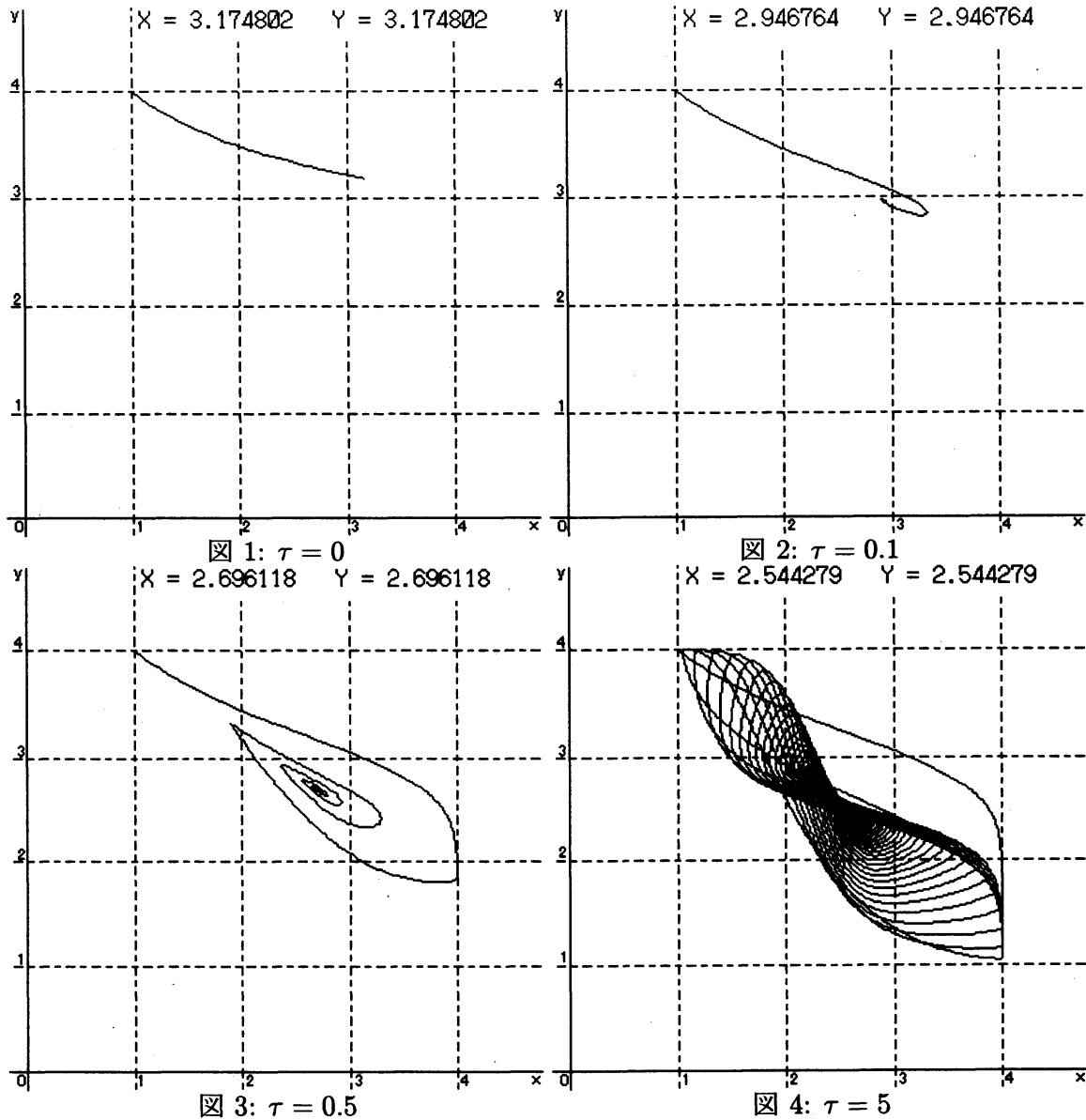
方程式(1)は直線 $y = x$ 上に無数の平衡点を持つ. ベクトル場の考察と保存量の構成 ($x^{\frac{1}{\alpha}} y^{\frac{1}{\beta}} = \text{const}$) から, (1) の解は一点 ($^{\alpha+\beta}\sqrt{x_0^{\beta} y_0^{\alpha}}, ^{\alpha+\beta}\sqrt{x_0^{\beta} y_0^{\alpha}}$) に収束することが容易に証明できる. しかしながら, 自分と他者の状態の差を考えるとときには, 他者の状態を知るまでにタイムラグが生じると考えるのが自然であろう. したがって, 次のタイムラグをもつ Lotka-Volterra 微分方程式

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t)[-x(t) + y(t - \tau_2)] \\ y'(t) = \beta y(t)[-y(t) + x(t - \tau_1)] \end{cases} \quad (2)$$

を考えてみる. タイムラグを大きくしたとき, 解の挙動がどのように変化するかを知るために, $\alpha = 5, \beta = 1$ として十分な時間シミュレーションを行った (図 1-4). 簡単のため $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, 初期関数は定数関数 $(\varphi, \psi) = (1, 4)$ としよう.

$\tau = 0$ のとき, 解は $x^{\frac{1}{5}} y = 4$ の曲線に沿って, 点 ($\sqrt[6]{1024}, \sqrt[6]{1024}$) に収束する (図 1). タイムラグが小さい場合, 解は一度直線 $y = x$ を越えた後, 点 (2.946764, 2.946764) に収束する (図 2: $\tau = 0.1$). タイムラグを増やしていくに連れて解軌道は渦状となる. 実際 $\tau = 0.3$ では, 解は右回りに回転しながら点 (2.696118, 2.696118) に収束する (図 3). さらにタイムラグを増加させていくと, 解軌道はより複雑な様相を呈する. 例えば $\tau = 5$ において, 解は八の字を小さくしていきながら点 (2.544279, 2.544279) に収束する (図 4).

ここで注意したいことは, いずれの場合も解は直線 $y = x$ 上の一点に収束することが観察されたことである. さらに方程式 (2) の解の収束先は, タイムラグを大きくするに連れて $y = x$ 上を遷移する様である.



そこで本稿ではタイムラグをもつ n 次元の Lotka-Volterra 微分方程式

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha_1 x_1(t)[-x_1(t) + x_2(t - \tau_2)] \\ x_2'(t) = \alpha_2 x_2(t)[-x_2(t) + x_3(t - \tau_3)] \\ \vdots \\ x_n'(t) = \alpha_n x_n(t)[-x_n(t) + x_1(t - \tau_1)] \end{cases} \quad (\text{E1})$$

($n = 2$ のときは(2)に対応) に対し, タイムラグを変えることで, 解の収束先がどこにどのように遷移するかを数学的に考察したい.

(E1) の初期条件は

$$x_i(s) = \varphi_i(s) \geq 0, -\tau_i \leq s \leq 0; \varphi_i(0) > 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

とする. ここで τ_i, α_i は定数で $\tau_i \geq 0, \alpha_i > 0$ とし, φ_i は連続関数である ($i = 1, 2, \dots, n$).

初期条件(3)の下では(E1)の解 $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ は $0 \leq t < \infty$ で存在し、各成分は正の値をとる (cf.[3]).

我々は次の定理を得た：

定理 1

(E1) の全ての解は一点 $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ に収束し

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \dots = \tilde{x}_n = \tilde{x}$$

かつ
$$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\log \tilde{x}}{\alpha_i} + \tilde{x} \tau_i \right\} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\log \varphi_i(0)}{\alpha_i} + \int_{-\tau_i}^0 \varphi_i(s) ds \right\} \text{ をみたす.}$$

また線形微分方程式系

$$\begin{cases} x'_1(t) = \alpha_1[-x_1(t) + x_2(t - \tau_2)] \\ x'_2(t) = \alpha_2[-x_2(t) + x_3(t - \tau_3)] \\ \vdots \\ x'_n(t) = \alpha_n[-x_n(t) + x_1(t - \tau_1)] \end{cases} \quad (\text{E2})$$

に対して定理 1 と同様の結果を得た：

定理 2

(E2) の全ての解は一点 $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ に収束し

$$\tilde{x}_1 = \dots = \tilde{x}_n = \tilde{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\varphi_i(0)}{\alpha_i} + \int_{-\tau_i}^0 \varphi_i(s) ds \right\}}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\alpha_i} + \tau_i \right)} \text{ をみたす.}$$

定理 1,2 は収束先を初期関数とタイムラグで explicit に表現している．証明では、二つの異なった汎関数を構成し LaSalle の不変原理と保存量を上手く活用した．第 2 節において、LaSalle の不変原理の紹介とタイムラグをもつ微分方程式における保存量の概念の導入を行い、第 3 節において定理の証明を与える．また、第 4 節では (E1), (E2) の特殊な場合である 2 次元方程式を考え、タイムラグの変化による収束先の遷移の様子を示した．

2 準備

自励系の方程式

$$x'(t) = f(x_t) \quad (4)$$

を考えよう．ここで、 $\mathbf{R}^n$ は n 次元ユークリッド空間とし、そのノルムを $|\cdot|$ で表す． $C := C([-\tau, 0], \mathbf{R}^n)$ は区間 $[-\tau, 0]$ から $\mathbf{R}^n$ への連続関数全体の集合とし、 $\phi \in C$ に対するノルムを $\|\phi\| = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\phi(s)|$ で与える． $x_t \in C$ を $x_t(s) = x(t+s)$, $-\tau \leq s \leq 0$ で定義する． $f: C \rightarrow \mathbf{R}^n$ は完全連続（連続かつ有界閉集合を有界集合へ写す写像）な汎関数であ

り, さらに解は初期値に関して連続であると仮定する. $(0, \varphi)$ を通る (4) の解を $x_t(\varphi)$ とし, $\omega(\varphi)$ を $x_t(\varphi)$ の正の極限集合とする. さらに連続汎関数 $V: C \rightarrow \mathbf{R}$ に対して, V の (4) の解に沿った微分 $\dot{V}_{(4)}(\varphi)$ を

$$\dot{V}_{(4)}(\varphi) = \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{V(x_h(\varphi)) - V(\varphi)}{h}$$

で定義する.

領域 G を C の部分集合とする.

定義 2.1

連続汎関数 $W: G \rightarrow \mathbf{R}$ が任意の $\varphi \in G$ に対して

$$\dot{W}_{(4)}(\varphi) = 0$$

をみたす時に, W を (4) に対する G 上での保存量であるという.

定義 2.2

$V: C \rightarrow \mathbf{R}$ が G 上で定義された (4) のリヤプノフ汎関数であるとは, 次の条件:

- (i) V が $\bar{G}$ (G の閉包) 上で連続である.
- (ii) $\dot{V}_{(4)}(\varphi) \leq 0$ on G .

をみたすことをいう.

$$E = \{\varphi \in Cl(G) : \dot{V}_{(4)}(\varphi) = 0\}$$

$M = E$ のに含まれる (4) の最大の不変集合

とすると, 次の定理が知られている.

定理 A (LaSalle の不変原理)

V が G 上で定義された (4) のリヤプノフ汎関数とする. このとき, $x_t(\varphi)$ が G の中にある有界な解ならば $\omega(\varphi) \subset M$ が成立する (cf. [1, p.143, Theorem 3.2]).

3 定理の証明

定理 1 の証明

領域 G を

$$G = \{\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \in C; \psi_i(s) \geq 0, \psi_i(0) > 0, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (5)$$

と定義しよう. ここで $C = C([-\Delta, 0], \mathbf{R}^n)$, $\Delta = \max\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ である. 汎関数 $V: C \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$V(\psi) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2\psi_i(0)}{\alpha_i} + \int_{-\tau_i}^0 \psi_i^2(s) ds \right\} \quad (6)$$

と定義すると、明らかに V は $\bar{G}$ で連続である。さらに (E1) の解に沿った微分を計算すると

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(E1)}(\psi) &= 2\psi_n(0)[- \psi_n(0) + \psi_1(-\tau_1)] + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i(0)[- \psi_i(0) + \psi_{i+1}(-\tau_{i+1})] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \{ \psi_i^2(0) - \psi_i^2(-\tau_i) \} \\ &= -\{ \psi_n(0) - \psi_1(-\tau_1) \}^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \{ \psi_i(0) - \psi_{i+1}(-\tau_{i+1}) \}^2 \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

を得る。また (5), (6) により (E1) の全ての解が有界であることがいえる (cf.[3]). したがって定理 A を適用すると、任意の初期関数 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \in G$ に対して、 $\omega(\varphi) \subset M$ が成立する。

集合 M の性質を調べよう。今、 E は

$$E = \{ \psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \in G \mid \psi_1(0) = \psi_2(-\tau_2), \psi_2(0) = \psi_3(-\tau_3), \dots, \psi_n(0) = \psi_1(-\tau_1) \}$$

である。任意の $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \in M$ に対し、 $(0, \psi)$ を通る (E1) の解を $z(t) := (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ とする。 M は不変集合なので $t \in \mathbf{R}$ に対し $z_t \in M$ である。また $M \subset E$ に注意すれば、 $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{cases} x_{1t}(0) - x_{2t}(-\tau_2) = x_1(t) - x_2(t - \tau_2) = 0 \\ x_{2t}(0) - x_{3t}(-\tau_3) = x_2(t) - x_3(t - \tau_3) = 0 \\ \vdots \\ x_{nt}(0) - x_{1t}(-\tau_1) = x_n(t) - x_1(t - \tau_1) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

が成立し、これと (E1) より

$$x'_1(t) = x'_2(t) = \dots = x'_n(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}.$$

よって、 $c_1, c_2, \dots, c_n$ を定数とすれば

$$x_1(t) = c_1, x_2(t) = c_2, \dots, x_n(t) = c_n, \quad t \in \mathbf{R}$$

を得る。したがって (8) より

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = \text{const}.$$

ゆえに

$$M = \{ (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \in E \mid \psi_1(s) = \psi_2(s) = \dots = \psi_n(s) = \text{const}, s \in [-\Delta, 0] \}$$

ω 極限集合が一点からなることを示そう。汎関数 W を次のように構成する:

$$W(\psi) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\log \psi_i(0)}{\alpha_i} + \int_{-\tau_i}^0 \psi_i(s) ds \right\}. \quad (9)$$

(E1) の解に沿った微分を計算すると

$$\begin{aligned} \dot{W}_{(E1)}(\psi) &= -\psi_n(0) + \psi_1(-\tau_1) - \sum_{i=1}^{n-1} \{\psi_i(0) - \psi_{i+1}(-\tau_{i+1})\} + \sum_{i=1}^n \{\psi_i(0) - \psi_i(-\tau_i)\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

これは W が G 上での保存量であることを意味する。

この保存量 W を使って $\omega(\varphi)$ を具体的に求めよう。 $\psi \in \omega(\varphi)$ に対して数列 $\{t_n : t_n \rightarrow \infty \text{ as } n \rightarrow \infty\}$ が存在し

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} z_{t_n} \rightarrow \psi \quad (11)$$

が成立する。(10) より

$$W(z_{t_n}) = W(z_0) = W(\varphi)$$

であるので(11) より

$$W(\psi) = W(\varphi). \quad (12)$$

$\omega(\varphi) \subset M$ なので $\psi := (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ は $\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_n = \text{const}$ をみたすことに注意すると, (9), (12) より, $\text{const} = c$ として

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\log c}{\alpha_i} + c\tau_i \right\} = W(\varphi)$$

を得る。左辺の形よりこのような c は $\omega(\varphi)$ の値に応じて一意に決まり, したがって $\omega(\varphi)$ は定数関数一点からなることがいえる。

(証明終)

定理 2 の証明

リヤプノフ汎関数 V と保存量 W を

$$V(\psi) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\psi_i(0)^2}{\alpha_i} + \int_{-\tau_i}^0 \psi_i^2(s) ds \right\}, \quad (13)$$

$$W(\psi) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\psi_i(0)}{\alpha_i} + \int_{-\tau_i}^0 \psi_i(s) ds \right\} \quad (14)$$

と構成してやれば, 定理 1 と同様に証明できる。

(証明終)

(E2) において $n = 2$, $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ とする. このとき座標変換 $(u, v) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ により

$$\begin{cases} u'(t) = \alpha[-u(t) - u(t - \tau)] \\ v'(t) = \alpha[-v(t) + v(t - \tau)] \end{cases} \quad (15)$$

を得る. (15) において特性根の解析により, $u(t)$ の零解は漸近安定で, $v(t)$ は定数 $\tilde{v}$ に漸近することがわかる (cf. Hale[1, pp.134-142], Murakami[2, Theorem 4.2]). したがって, このとき (E2) の解は一点 $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (\frac{\tilde{v}}{2}, \frac{\tilde{v}}{2})$ に収束する. 定理 2 は, この結果を拡張している.

4 タイムラグと収束先の遷移

(E1) において $n = 2$, $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ とした Lotka-Volterra 微分方程式

$$\begin{cases} x_1'(t) = \alpha_1 x_1(t)[-x_1(t) + x_2(t - \tau)] \\ x_2'(t) = \alpha_2 x_2(t)[-x_2(t) + x_1(t - \tau)] \end{cases} \quad (\text{NE})$$

に対し, 初期関数を定数関数

$$\begin{cases} x_1(s) = \xi(s) = \xi_0 > 0, -\tau \leq s \leq 0 \\ x_2(s) = \zeta(s) = \zeta_0 > 0, -\tau \leq s \leq 0 \end{cases}$$

とする. このとき定理 1 より次の命題が成り立つ:

系 4.1

$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ とする. このとき (NE) の解は一点 $(\tilde{x}, \tilde{x})$ に収束し,

$$\tilde{x} \exp(\tilde{x}\tau) = \sqrt{\xi_0 \zeta_0} \exp\left(\frac{\xi_0 + \zeta_0}{2}\right) \tau \quad (16)$$

をみたす.

系 4.1 から, $\xi_0 \neq \zeta_0$ のとき τ を $0 \rightarrow \infty$ にすると, $\tilde{x}$ が $\sqrt{\xi_0 \zeta_0} \rightarrow \frac{\xi_0 + \zeta_0}{2}$ となることがわかる. 実際, 相加相乗平均の関係と (16) より

$$\sqrt{\xi_0 \zeta_0} \exp\left(\sqrt{\xi_0 \zeta_0}\right) \tau \leq \tilde{x} \exp(\tilde{x}\tau) < \frac{\xi_0 + \zeta_0}{2} \exp\left(\frac{\xi_0 + \zeta_0}{2}\right) \tau$$

を得る. ここで $h(s) = s \exp(s\tau)$ を考えると, $h(s)$ は $s > 0$ で単調増加関数なので

$$\sqrt{\xi_0 \zeta_0} \leq \tilde{x} < \frac{\xi_0 + \zeta_0}{2}$$

となる. また (16) より

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \frac{\tilde{x} \left(\frac{\xi_0 + \zeta_0}{2} - \tilde{x} \right)}{1 + \tilde{x}\tau} > 0$$

を得る. ゆえに

$$\tilde{x} \rightarrow \frac{\xi_0 + \zeta_0}{2} \text{ as } \tau \rightarrow \infty$$

が成立する. 従って, タイムラグが増えるにつれて解の収束先が直線 $y = x$ 上を単調に右上に遷移し, $(\frac{\xi_0 + \zeta_0}{2}, \frac{\xi_0 + \zeta_0}{2})$ に漸近することがわかる.

また(E2)において $n = 2$, $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ とした方程式

$$\begin{cases} x'_1(t) = \alpha_1[-x_1(t) + x_2(t - \tau)] \\ x'_2(t) = \alpha_2[-x_2(t) + x_1(t - \tau)] \end{cases} \quad (\text{LE})$$

に対して定理 2 より次の命題が成り立つ:

系 4.2

(LE) の全ての解は一点 $(\tilde{x}, \tilde{x})$ に収束し

$$\tilde{x} = \frac{\alpha_2 \xi_0 + \alpha_1 \zeta_0 + \alpha_1 \alpha_2 (\xi_0 + \zeta_0) \tau}{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \tau}$$

をみtas.

系 4.2 から, タイムラグを変えることで (LE) の解の収束先がどこにどのように遷移するかわかる. それぞれの初期関数における結果を表 1 にまとめる.

	$\xi_0 > \zeta_0$	$\xi_0 = \zeta_0$	$\xi_0 < \zeta_0$
$\alpha_1 > \alpha_2$	$\frac{\alpha_2 \xi_0 + \alpha_1 \zeta_0}{\alpha_1 + \alpha_2} \geq \tilde{x} > \frac{\xi_0 + \zeta_0}{2}$ $\tilde{x} \rightarrow \frac{\xi_0 + \zeta_0}{2} \text{ as } \tau \rightarrow \infty$	$\tilde{x} = \xi_0 = \zeta_0$	$\frac{\alpha_2 \xi_0 + \alpha_1 \zeta_0}{\alpha_1 + \alpha_2} \leq \tilde{x} < \frac{\xi_0 + \zeta_0}{2}$ $\tilde{x} \rightarrow \frac{\xi_0 + \zeta_0}{2} \text{ as } \tau \rightarrow \infty$
$\alpha_1 = \alpha_2$	$\tilde{x} = \frac{\xi_0 + \zeta_0}{2}$	$\tilde{x} = \xi_0 = \zeta_0$	$\tilde{x} = \frac{\xi_0 + \zeta_0}{2}$
$\alpha_1 < \alpha_2$	$\frac{\alpha_2 \xi_0 + \alpha_1 \zeta_0}{\alpha_1 + \alpha_2} \leq \tilde{x} < \frac{\xi_0 + \zeta_0}{2}$ $\tilde{x} \rightarrow \frac{\xi_0 + \zeta_0}{2} \text{ as } \tau \rightarrow \infty$	$\tilde{x} = \xi_0 = \zeta_0$	$\frac{\alpha_2 \xi_0 + \alpha_1 \zeta_0}{\alpha_1 + \alpha_2} \geq \tilde{x} > \frac{\xi_0 + \zeta_0}{2}$ $\tilde{x} \rightarrow \frac{\xi_0 + \zeta_0}{2} \text{ as } \tau \rightarrow \infty$

表 1: τ を増加させたときの収束先の遷移

$\tau = 0$ のとき解の収束先は α_1 と α_2 , ξ_0 と ζ_0 の大小に依らず $(\tilde{x}, \tilde{x}) = (\frac{\alpha_2 \xi_0 + \alpha_1 \zeta_0}{\alpha_1 + \alpha_2}, \frac{\alpha_2 \xi_0 + \alpha_1 \zeta_0}{\alpha_1 + \alpha_2})$ である. タイムラグが増えるにつれて, 例えば $\alpha_1 > \alpha_2, \xi_0 > \zeta_0$ の時, 解の収束先は直線 $y = x$ 上を単調に左下に遷移し, $(\frac{\xi_0 + \zeta_0}{2}, \frac{\xi_0 + \zeta_0}{2})$ に漸近することが上の表からわかる.

参考文献

- [1] J.K.Hale and S.M.Verduyn Lunel, Introduction to Functionnal Differential Equations, Springer-Verlag, New York,1991 .
- [2] K.Murakami, Asymptotic Constancy and Periodic Solutions for Linear Autonomous Delay Differential Equations, Funkcialaj Ekvacioj Vol.39, No.3, 519-540, 1996 .
- [3] Y.Saito,T.Hara,and W.Ma,Necessary and sufficient condition for permanence and global stability of a Lotoka-Volterra system with two delays,J.Math.Anal.Appl.236(1999),p534-556 .