

3 元生成 4 次元クライン群の極限集合について

On limit set of 4-dimensional Kleinian group with 3-generators

明治大学理工学部 佐久川 恵太 (Sakugawa, Keita)

Department of mathematics, Meiji University.

1-1-1 Higashimita, Tama, Kawasaki, Kanagawa, JAPAN 214-8571

1 序

d 次元双曲空間 H^d の向きを保つ等長変換群 $\text{Isom}^+(H^d)$ の離散部分群を d 次元クライン群という. d 次元クライン群 G に対し, H^d の任意の点の G による像の集積集合を G の極限集合といい, $\Lambda(G)$ で表す. G は H^d に真性不連続に作用するので, $\Lambda(G)$ は ∂H^d の部分集合になる. $\Omega(G) = \partial H^d - \Lambda(G)$ を G の不連続領域という.

2 元生成の 3 次元クライン群についてはよく知られている. とくに生成元の一つを放物型とした一点穴空きトーラス群のパラメータ空間は Maskit slice と呼ばれ, その極限集合は無限個の円の和集合になる.

本論文では, Maskit slice の一種の拡張とも言える 3 元生成の 4 次元クライン群について考察する. 具体的には 4 次元クライン群 $G = \langle f, g, h \rangle$ で, $f = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[f, g]^2 = [f, h]^2 = id$ となるものを考える. ただし, p は実数でない複素数とする.

特に $p = i$ の場合には G の基本領域は 4 角柱から 2 つの球をくりぬいた 6 面体となるが, この場合の群の変形について最初に考えたのは荒木と糸である. 荒木, 糸, 小森らによる研究 [13], [14] を参照されたい.

結果は以下の通り.

補題 1.1 G の部分群 $H(p) = \langle g, h, f^{-1}gf, f^{-1}hf \rangle$ で不変な球面 $P \subset \partial H^4 \simeq \mathbb{R}^3$ が存在する. とくに $H(i), H(\omega)$ は離散群で $\Lambda(H) = P$ となる.

定理 1.2 $H = H(i), H(\omega)$ に対し,

$$\Lambda(G) = \overline{\bigcup_{aH \in G/H} aP}.$$

定理 1.3 $G = \langle f, g, h \rangle$ は $\text{Möb}^+(\mathbb{R}^3)$ による共役を除いて,

$$G(t_1, t_2, t_3, p) = \left\langle \begin{pmatrix} t & \frac{(1-t^2)j}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}j & t^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

と表せる (離散的でないものも含める). ただし, $t = \frac{t_1 + t_2j + t_3k}{2}$, $(t_1, t_2, t_3 \text{ in } \mathbb{R}), p \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, |p| = 1$ とする.

本論文は以下のように構成されている。

2 節では Cao, Parker, Wang [15] らによる三次元メビウス変換の分類を書き改め、それを上半空間モデルに言い換えたものを紹介する。なお上半空間モデルに言い換える議論は木戸 [2] を参考にした。3 節では定理 1.2, 定理 1.3 の証明を行っている。4 節ではコンピュータによる実験およびその観察と極限集合の絵を載せた。

謝辞

この論文を書くにあたり、糸健太郎氏、大鹿健一氏、河澄響矢氏（五十音順）にはご指摘および有益な助言を頂きました。また、学部生時代にお世話になった奥村善英先生には、私の指導教官である阿原一志先生を通じて励ましの言葉を頂きました。そして何よりも指導教官である阿原一志先生にはプログラムの手ほどきから、ゼミでの指導、ときには青空の下で共に悩んで下さり、大変お世話になりました。この場を借りて皆様方に感謝致します。

2 三次元メビウス変換の型の分類

一般に $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^d)$ は $(d-1)$ 次元のメビウス変換で表されることが知られている [18]。まず準備として、3 次元メビウス変換を四元数を成分に持つ 2 次正方行列で表し、その型を分類する。

2.1 四元数とメビウス変換

$$\mathbb{H} = \{x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{R}(1, i, j, k) \mid i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

で定義される $\mathbb{R}^4$ 上の結合代数を四元数体という。四元数 $\mathbb{H}$ は複素数 $\mathbb{C}$ を含む非可換体になる。 $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H}$ に対し、 $\bar{x} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k$ を x の共役という。また、 x の k 成分の符号を反転させる操作を $x^* = -k\bar{x}k = x_0 + x_1 i + x_2 j - x_3 k$ と定義する。

一次元四元数射影空間 $\mathbb{P}^1(\mathbb{H})$ における単位球 $\mathbb{B}^4$ と、上半空間 $\mathbb{H}^4$ を

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^4 &= \{v \in \mathbb{P}^1(\mathbb{H}) \mid {}^t \bar{v} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v < 0\}, \\ \mathbb{H}^4 &= \{v \in \mathbb{P}^1(\mathbb{H}) \mid {}^t \bar{v} \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} v > 0\} \end{aligned}$$

と定義すれば、 $\mathbb{S}^3 = \partial \mathbb{B}^4$, $\hat{\mathbb{R}}^3 = \partial \mathbb{H}^4$ の向きを保つメビウス変換 $\text{Möb}^+(\mathbb{S}^3)$, $\text{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ は $GL(2, \mathbb{H})$ の部分群としてそれぞれ次のように表せる。

定義 2.1

$$\begin{aligned} \cdot \text{Möb}^+(\mathbb{S}^3) &= \left\{ M \in GL(2, \mathbb{H}) \mid {}^t \bar{M} J M = J, J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} / \{\pm I\} \\ \cdot \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3) &= \left\{ M \in GL(2, \mathbb{H}) \mid {}^t \bar{M} K M = K, K = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \right\} / \{\pm I\} \end{aligned}$$

補題 2.2 ($\text{Möb}^+(\mathbb{S}^3)$ の元の特徴付け) $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Möb}^+(\mathbb{S}^3)$ に対し, 以下が成立.

1. $g^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$.
2. $|a|^2 - |b|^2 = 1, |a| = |d|, |b| = |c|$.
3. $\bar{a}b = \bar{c}d, a\bar{c} = b\bar{d}$.

証明 $\left\{ M \in GL(2, \mathbb{H}) \mid {}^t \bar{M} J M = J, J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \ni g$ に対して, $g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} {}^t \bar{g} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ であるから, $gg^{-1} = g^{-1}g = I$ から, 各成分を比較すればよい. $\square$

同様に, $\text{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ についても次が成り立つ.

補題 2.3 ($\text{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ の元の特徴付け) $g = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ に対し, 以下が成立.

1. $g^{-1} = \begin{pmatrix} w^* & -y^* \\ -z^* & x^* \end{pmatrix}$.
2. $xw^* - yz^* = w^*x - z^*y = 1$.
3. $xy^* = yx^*, zw^* = wz^*, z^*x = x^*z, w^*y = y^*w$.

$\text{Möb}^+(\mathbb{S}^3)$ の元の型の分類

Cao, Parker, Wang [15] にならって, 自明でない $g \in \text{Möb}^+(\mathbb{S}^3)$ の型を $\mathbf{B}^4$ への作用の仕方により以下のように定義する.

- 定義 2.4**
1. g が **楕円型 (elliptic)** であるとは $\mathbf{B}^4$ 内に固定点を持つときをいう. とくに
 - (a) $\mathbf{B}^4$ 内の $\mathbf{H}^2$ に等長的な双曲平面を固定するならば **単純楕円型 (simple elliptic)** といい,
 - (b) $\mathbf{B}^4$ 内にただ 1 つの固定点を持つならば **混合楕円型 (compound elliptic)** という.
 2. g が **放物型 (parabolic)** であるとは $\partial\mathbf{B}^4$ にただ 1 つの固定点を持つときをいう. とくにその固定点を中心とする接球への作用を ρ としたとき,
 - (a) ρ がユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ における平行移動ならば **単純放物型 (simple parabolic)** といい,
 - (b) ρ がユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ における平行移動と回転の合成であるならば g を **混合放物型 (compound parabolic)** という.
 3. g が **斜航型 (loxodromic)** であるとは $\partial\mathbf{B}^4$ にちょうど 2 つの固定点を持つときをいう. とくに
 - (a) その固定点を端点とする測地線を含む任意の $\mathbf{H}^2$ に等長的な双曲平面を固定するとき, g を **単純斜航型 (simple loxodromic)** あるいは **双曲型 (hyperbolic)** といい,
 - (b) それ以外の場合 **混合斜航型 (compound loxodromic)** という.

定理 2.5 ($\text{Möb}^+(\mathbb{S}^3)$ の型の分類. [15, Theorem 1.1]) 自明でない $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Möb}^+(\mathbb{S}^3)$ の型は次のように分類される.

(a) $c = b = 0$ のとき

(i) $\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(d)$ ならば g は 単純楕円型.

(ii) $\operatorname{Re}(a) \neq \operatorname{Re}(d)$ ならば g は 混合楕円型.

(b) $c \neq 0, \bar{c} = b$ のとき

(i) $\operatorname{Re}(d)^2 < 1$ ならば g は 単純楕円型.

(ii) $\operatorname{Re}(d)^2 = 1$ ならば g は 単純放物型.

(iii) $\operatorname{Re}(d)^2 > 1$ ならば g は 単純斜航型.

(c) $c \neq 0, \bar{c} \neq b$ のとき

$\Delta = |\operatorname{Im}((\bar{c}^{-1}b - 1)\bar{d})|^2 - |\bar{c}^{-1}b - 1|^2$ とおく. このとき,

(i) $\Delta < 0$ ならば g は 混合楕円型.

(ii) $\Delta = 0$ ならば g は 混合放物型.

(iii) $\Delta > 0$ ならば g は 混合斜航型.

註 1 元の特徴付けから, $c = 0, b \neq 0$ という場合は起こらない.

定理 2.5 にあらわれる Δ は $c = 0$ のとき定義されていないが, $\operatorname{Möb}^+(\mathbb{S}^3)$ の元の特徴付けから,

$$\begin{aligned}\Delta &= |\operatorname{Im}((\bar{c}^{-1}b - 1)\bar{d})|^2 - |\bar{c}^{-1}b - 1|^2 \\ &= |(\bar{c}^{-1}b - 1)\bar{d}|^2 - |\operatorname{Re}((\bar{c}^{-1}b - 1)\bar{d})|^2 - |\bar{c}^{-1}b - 1|^2 \\ &= |\bar{c}^{-1}b - 1|^2(|\bar{d}|^2 - 1) - |\operatorname{Re}(\bar{c}^{-1}b\bar{d} - \bar{d})|^2 \\ &= |\bar{c}^{-1}(b - \bar{c})|^2|c|^2 - |\operatorname{Re}(\bar{c}^{-1}a\bar{c} - \bar{d})|^2 \\ &= |b - \bar{c}|^2 - |\operatorname{Re}(a - d)|^2.\end{aligned}$$

従って Δ は $c = 0$ のときも意味を持つ. そこで, 改めて $\Delta = |b - \bar{c}|^2 - |\operatorname{Re}(a - d)|^2$ と定義する. 後のために, この Δ を使って定理 2.5 を言い換えることを考える.

定理 2.5 において (a)(i) のとき $\Delta = 0$, (a)(ii) のとき $\Delta < 0$, (b) のとき $\Delta = 0$ であるから次の補題が成り立つ.

補題 2.6

• g が混合楕円型 $\iff \Delta < 0$.

• g が混合斜航型 $\iff \Delta > 0$.

$g \in \operatorname{Möb}^+(\mathbb{S}^3)$ が単純楕円型, 単純放物型, 単純斜航型のいずれかであるとき g は単純である, ということにすると, g が単純であるための必要十分条件は Δ, a, d を用いて表せる.

補題 2.7 g が単純 $\iff \Delta = \operatorname{Re}(a - d) = 0$.

証明 定理 2.5 より, g が単純であるのは $c = 0, \operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(d)$ のとき, あるいは $c \neq 0, b = \bar{c}$ のときに限る. $c = 0, \operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(d)$ のときは $\Delta = 0$ であることがわかる. $b = \bar{c}$ のときも $\Delta = 0$ であり, 元の特徴付け $a\bar{b} = c\bar{d}$ から $a = c\bar{d}c^{-1}$ となるので $\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(d)$ である. $\square$

補題 2.8 g が単純楕円型ならば $\operatorname{Re}(d)^2 < 1$.

証明 $c = 0, \operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(d)$ のときのみ示せばよい. 元の特徴付け $|a|^2 - |c|^2 = 1$ と $c = 0$ から $|a| = |d| = 1$ なので $|\operatorname{Re}(d)| \leq 1$. もし $|\operatorname{Re}(d)| = 1$ だとすると g は恒等変換になるので $\operatorname{Re}(d)^2 < 1$ となる. $\square$

以上の補題から, 定理 2.5 を次のように言い換えることができる.

定理 2.9 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Möb}^+(\mathbb{S}^3), g \neq id$ に対し, $\Delta = |b - \bar{c}|^2 - |\operatorname{Re}(a - d)|^2$ とおく. このとき,

- g が単純楕円型 $\iff \Delta = \operatorname{Re}(a - d) = 0, \operatorname{Re}(d)^2 < 1$.
- g が単純放物型 $\iff \Delta = \operatorname{Re}(a - d) = 0, \operatorname{Re}(d)^2 = 1$.
- g が単純斜航型 $\iff \Delta = \operatorname{Re}(a - d) = 0, \operatorname{Re}(d)^2 > 1$.
- g が混合楕円型 $\iff \Delta < 0$.
- g が混合放物型 $\iff \Delta = 0, \operatorname{Re}(a - d) \neq 0$.
- g が混合斜航型 $\iff \Delta > 0$.

$\operatorname{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ の元の型の分類

関係式 $\begin{pmatrix} 1 & -k \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ により, $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \operatorname{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ に対応する

$\operatorname{Möb}^+(\mathbb{S}^3)$ の元を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & -k \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + yk - kz - kwk & x - yk - kz + kwk \\ x + yk + kz + kwk & x - yk + kz - kwk \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表すことができる. 従って定理 2.5 を $\operatorname{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ での主張として読み替えることができる.

定理 2.10 ($\operatorname{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ の元の型の分類)

自明でない $g = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \operatorname{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ に対し, y_3, z_3 をそれぞれ y, z の k 成分として $\Delta = |\operatorname{Im}(x + w^*)|^2 + 4y_3z_3$ とおく. このとき,

- g が単純楕円型 $\iff \Delta = y_3 = z_3 = 0$ かつ $\operatorname{Re}(x + w^*)^2 < 4$.
- g が単純放物型 $\iff \Delta = y_3 = z_3 = 0$ かつ $\operatorname{Re}(x + w^*)^2 = 4$.
- g が単純斜航型 $\iff \Delta = y_3 = z_3 = 0$ かつ $\operatorname{Re}(x + w^*)^2 > 4$.
- g が混合楕円型 $\iff \Delta < 0$.
- g が混合放物型 $\iff \Delta = 0$ かつ $y_3 \neq z_3$.
- g が混合斜航型 $\iff \Delta > 0$.

証明 $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \operatorname{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ に対応する $\operatorname{Möb}^+(\mathbb{S}^3)$ の元を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすれば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + yk - kz - kwk & x - yk - kz + kwk \\ x + yk + kz + kwk & x - yk + kz - kwk \end{pmatrix}$$

であるから $b - \bar{c}$, $\operatorname{Re}(a - d)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} b - \bar{c} &= \frac{1}{2} \left(x - yk - kz + kwk - \overline{(x + yk + kz + kwk)} \right) \\ &= \operatorname{Im}(x + w^*) + y_3 + z_3, \\ \operatorname{Re}(a - d) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(x + yk - kz - kwk - (x - yk + kz - kwk)) \\ &= z_3 - y_3 \end{aligned}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} \Delta &= |b - \bar{c}|^2 - |\operatorname{Re}(a - d)|^2 \\ &= |\operatorname{Im}(x + w^*) + y_3 + z_3|^2 - |z_3 - y_3|^2 \\ &= |\operatorname{Im}(x + w^*)|^2 + 4y_3z_3. \end{aligned}$$

とくに $\Delta = 0$, $y_3 = z_3$ なら $y_3 = z_3 = 0$ であることがわかる。

$\operatorname{Re}(d)^2$ については

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(d)^2 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(x - yk + kz - kwk)^2 \\ &= \frac{1}{4} (\operatorname{Re}(x + w^*) + y_3 - z_3)^2 \end{aligned}$$

であるから, $y_3 = z_3$ であれば $\operatorname{Re}(d)^2 = \frac{1}{4} (\operatorname{Re}(x + w^*))^2$.

従って定理 2.9 より主張を得る. □

系 2.11 自明でない $g = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \operatorname{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ に対し, $y_3 = 0$ または $z_3 = 0$ ならば g は混合楕円型でない.

証明 $y_3 = 0$ または $z_3 = 0$ ならば $\Delta \geq 0$ であることからわかる. □

3 定理 1.2 および定理 1.3 の証明

$G' = \langle \alpha, \beta, \gamma \mid [\alpha, \beta]^2 = [\alpha, \gamma]^2 = [\beta, \gamma] = 1 \rangle$ とし, G' の $\operatorname{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ 上の忠実な表現を考える.

そこで, $f, g, h \in \operatorname{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ をねじれなしの元とし, g, h は単純放物型であつて, $[f, g]^2 = [f, h]^2 = [g, h] = id$ を満たすとしよう. G を f, g, h が生成する $\operatorname{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ の部分群とする. これ以降は G が離散群である場合を考える. この群は, 直感的には正方形柱を面角が 45 度になるよう球面で切り落としたような図形を $\mathbb{R}^3$ における基本領域 (の 1 つ) として持つような群を想定している.

補題 3.1 g, h は固定点を共有し, $\operatorname{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ の元で共役をとることにより $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $p \in \mathbb{C}$ とできる.

証明 g を $\operatorname{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ の元で共役をとることにより, $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ としてよい. $h = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix}$ において, g, h が可換ということから $gf = fg$ を計算すると

$$\begin{pmatrix} h_1 + h_3 & h_2 + h_4 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & h_1 + h_2 \\ h_3 & h_3 + h_4 \end{pmatrix}.$$

成分を比較することにより $h_1 = h_4, h_3 = 0$ を得る. $h_3 = 0$ は $\text{fix}(h) = \infty$ を意味するので $\text{fix}(g) = \text{fix}(h)$. h が単純放物型という仮定から, $h_1 = h_4 = \pm 1$. メビウス変換なので $h_1 = 1$ としてよい.

また, 元の特徴付け $h_1 h_2^* = h_2 h_1^*$ により h_2 の k 成分は 0 である. 従って, 実軸を固定する回転で共役をとることにより g を固定したまま $h = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, p \in \mathbb{C}$ とできる. $\square$

もし, 上の補題における p が $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}, (m, n \text{ は互いに素})$ であるとする. $h^m = g^n$ となってしまう, G が G' の忠実な表現にならない. また p が無理数であるとする. 連分数近似の議論により G は離散群ではないことがわかる. 従って, 以後 $p \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ と仮定してよい.

つぎに, 条件 $[f, g]^2 = [f, h]^2 = id$ を行列の成分に関する方程式として表すことを考える.

補題 3.2 自明でない $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ に対し, $\text{tr}^*(M) = x + w^*$ と定義する. もし M が単純であるならば, M の位数が 2 であるのは $\text{tr}^*(M) = 0$ のとき, そのときに限る.

証明 M が単純で位数が 2 であるとする.

$M^2 = id$ より $M = M^{-1}$ であるが, $M \in \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ により, 次の 2通りの場合が有り得る.

1. $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^* & -y^* \\ -z^* & x^* \end{pmatrix}$ のとき.

成分を比較することで $w = x^*$ および y, z が k 成分のみからなることがわかる. y_3, z_3 を実数として, $y = y_3 k, z = z_3 k$ とおく. このとき, $xy^* = yx^*, z^*x = x^*z$ より $\text{Re}(x) = 0$ であるか, $y_3 = z_3 = 0$ でなければならない.

(a) x の実部が 0 のとき, $xw^* - yz^* = 1$ より $x^2 = 1 + y_3 z_3 < 0$ でなければならない. $y_3 \neq 0, z_3 \neq 0$ なので M は単純でない.

(b) $y_3 = z_3 = 0$ のとき, $y = z = 0$ なので, 元の特徴付けから $x^2 = 1$ でなければならない. しかしこれは M が自明でないという仮定に反する.

2. $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w^* & y^* \\ z^* & -x^* \end{pmatrix}$ のとき.

成分を比較して $x = -w^*$ すなわち $\text{tr}^*(M) = 0$ を得る.

逆に, M が単純で $\text{tr}^*(M) = 0$ を満たすとする. 計算により

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} w^{*2} + yz & x(y - y^*) \\ (z - z^*)x & w^2 + zy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を得る. $\square$

註 2 上の補題で, M が単純であるという仮定は外せない. 例えば, $\begin{pmatrix} 0 & e^{k\pi/n} \\ -e^{k\pi/n} & 0 \end{pmatrix}$ は位数 n の混合楕円

型変換である. また, $\begin{pmatrix} k & k \\ 0 & k \end{pmatrix}$ は実軸を固定する混合放物型変換で位数は有限でない.

$[f, g], [f, h]$ は位数有限という仮定から楕円型であるが, 具体的な計算により単純楕円型であることがわかる.

補題 3.3 $f = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3), p \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ に対し,
 $\text{tr}^*(g^{-1}f^{-1}gf) = z^*z + 2,$
 $\text{tr}^*(h^{-1}f^{-1}hf) = pz^*pz + 2.$
 とくに $[f, g], [f, h]$ は単純楕円型.

証明 g については p に 1 を代入して計算すればよいので h の場合のみ示す.

$$h^{-1}f^{-1}hf = \begin{pmatrix} 1 + w^*pz + pz^*pz & w^*pw - p + pz^*pw \\ -z^*pz & 1 - z^*pw \end{pmatrix}.$$

$$\text{tr}^*(h^{-1}f^{-1}hf) = pz^*pz + 2.$$

$(-z^*pz)^* = -z^*pz$ より, この行列の $(2, 1)$ 成分の k 成分は 0 である. $[f, h]^2 = id$ より $[f, h]$ は楕円型であるが, 系 2.11 から $[f, h], [f, g]$ は混合楕円型でないことがわかる. $\square$

補題 3.2, 補題 3.3 より, 条件 $[f, g]^2 = [f, h]^2 = id$ は $z^*z + 2 = pz^*pz + 2 = 0$ と同値である. この方程式を解くことで次の補題を得る.

補題 3.4

$$\begin{cases} z^*z + 2 = 0 \\ pz^*pz + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \pm\sqrt{2}j \\ |p| = 1 \end{cases}$$

証明 $z_0, z_1, z_2, z_3, p_0, p_1$ を実数とし, $z = z_0 + z_1i + z_2j + z_3k \in \mathbb{H}, p = p_0 + p_1i \in \mathbb{C}, p_1 \neq 0$ とおく. まず

$$\begin{aligned} z^*z &= (z_0 + z_1i + z_2j - z_3k)(z_0 + z_1i + z_2j + z_3k) \\ &= z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 + 2(-z_0z_1 + z_2z_3)i + 2(-z_0z_2 - z_1z_3)j \\ &= -2 \end{aligned}$$

の各成分を比較して連立方程式

$$z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 + 2 = 0 \quad (1)$$

$$z_0z_1 - z_2z_3 = 0 \quad (2)$$

$$z_0z_2 + z_1z_3 = 0 \quad (3)$$

を得る.

式 (2) $\times z_1$ + 式 (3) $\times z_2$ と式 (3) $\times z_2$ - 式 (2) $\times z_1$ より

$$z_0(z_1^2 + z_2^2) = 0 \quad (4)$$

$$z_3(z_1^2 + z_2^2) = 0 \quad (5)$$

を得るが, もし $z_1^2 + z_2^2 = 0$ とすると, 式 (1) に矛盾.

従って $z_0 = z_3 = 0$ であるから, 式 (1) より $z_1^2 + z_2^2 = 2$ を得る.

このとき $z^* = z$ であることに注意して, $pz^*pz = (pz)^2 = -2$ を計算すると

$$\begin{aligned}
 (pz)^2 &= (-z_1p_1 + z_1p_0i + z_2p_0j + z_2p_1k)^2 \\
 &= (z_1p_1)^2 - (z_1p_0)^2 - (z_2p_0)^2 - (z_2p_1)^2 - 2z_1p_1(z_1p_0i + z_2p_0j + z_2p_1k) \\
 &= -2p_0^2 + (2z_1^2 - 2)p_1^2 - 2z_1p_1(z_1p_0i + z_2p_0j + z_2p_1k) \\
 &= -2.
 \end{aligned}$$

$p_1 \neq 0$ に注意すれば, 各成分に関する連立方程式は次のようになる.

$$p_0^2 + (1 - z_1^2)p_1^2 - 1 = 0 \quad (6)$$

$$p_0z_1^2 = 0 \quad (7)$$

$$p_0z_1z_2 = 0 \quad (8)$$

$$z_1z_2 = 0 \quad (9)$$

式 (9) より $z_1 = 0$ または $z_2 = 0$.

(i) $z_1 = 0$ のとき

$z_1^2 + z_2^2 = 2$ より $z = \pm\sqrt{2}j$. また, 式 (6) より $p_0^2 + p_1^2 = 1$ すなわち $|p| = 1$.

(ii) $z_2 = 0$ のとき

$z_1^2 + z_2^2 = 2$ より $z_1^2 = 2 \neq 0$ なので式 (7) から $p_0 = 0$ であるが, 式 (6) より $p_1^2 = -1$ となり矛盾. 従って, この場合は解なし.

以上より $z = \pm\sqrt{2}j, |p| = 1$ がわかる. □

註 3 補題 3.4 より $z^* = z$ であり, $G = \langle f, g, h \rangle = \langle f^{-1}, g, h \rangle$ であるから, f と f^{-1} のどちらを生成元に選ぶかで $z = \pm\sqrt{2}j$ の符号の違いは吸収できる.

$\mathbb{C}$ に平行な平面は $\langle g, h \rangle$ で不変であることは明らかである. $\langle g, h \rangle$ を含む G の部分群で不変な平面が存在することを次の補題で示す.

補題 3.5 $\text{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3) \ni f = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, p \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ に対して

$\text{tr}^*(g^{-1}f^{-1}gf) = \text{tr}^*(h^{-1}f^{-1}hf) = 0$ を仮定し, G の部分群 H を $H = \langle g, h, f^{-1}gf, f^{-1}hf \rangle$ とおくと $P := \{f^{-1}(\text{fix}(g)) + v \mid v \in \mathbb{C}\} \cup \{\infty\}$ は H で不変である.

証明 g, h が P を保つのは明らかなので, $f^{-1}hf, f^{-1}gf$ について調べる. $f^{-1}gf$ については h における p を 11 とすれば $f^{-1}hf$ の場合に帰着できる. $\text{fix}(g) = \infty \in \hat{\mathbb{R}}$ であり, $f^{-1}(\text{fix}(h)) = -w^*(z^*)^{-1}$ であることに注意すると, 任意の $v \in P$ に対して

$$\begin{aligned}
 f^{-1}hf \begin{pmatrix} -w^*(z^*)^{-1} + v \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -w^*(z^*)^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} + f^{-1}hf \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -w^*(z^*)^{-1} + (1 + w^*pz)v \\ 1 - z^*pzv \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$(-w^*z^{*-1} + (1 + w^*pz)v)(1 - z^*pzv)^{-1}$ を計算すると,

$$\begin{aligned} & (-w^*z^{*-1} + (1 + w^*pz)v)(1 - z^*pzv)^{-1} \\ &= (-w^*z^{*-1}(1 - z^*pzv) + v)(1 - z^*pzv)^{-1} \\ &= -w^*z^{*-1} + v(1 - z^*pzv)^{-1}. \end{aligned}$$

補題 3.3 より $pz^*pz = -2$. $p \in \mathbb{C}$ から $z^*pz \in \mathbb{C}$ に注意すると, $v(1 - z^*pzv)^{-1} \in \mathbb{C}$ であり, この点は P に含まれることが示された. 従って P は H 不変である. $\square$

$z = \sqrt{2}j$ のときの $v \in P$ への H の作用をみると,

$$\begin{aligned} g: v &\mapsto v + 1 \\ h: v &\mapsto v + p \\ f^{-1}gf: v &\mapsto v(1 - \sqrt{2}j\sqrt{2}jv)^{-1} = v(1 + 2v)^{-1} \\ f^{-1}hf: v &\mapsto v(1 - \sqrt{2}jp\sqrt{2}jv)^{-1} = v(1 + 2pv)^{-1} \end{aligned}$$

となるので, $H = H(p) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2p & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset PSL(2, \mathbb{C})$ と表せる. ただし, ここで $f^{-1}(\text{fix}(g)) + v \in P$ を $v \in \hat{\mathbb{C}}$ と同一視して考えている.

$H(p)$ が $PSL(2, \mathbb{C})$ の離散部分群であるための条件を考えよう. $p \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ に対し, $\mathbb{Z} + p\mathbb{Z}$ が積について閉じていれば $H(p)$ の成分は全て $\mathbb{Z} + p\mathbb{Z}$ の元であり, $H(p)$ は離散的である.

$\mathbb{Z} + p\mathbb{Z}$ が積について閉じているためには p が二次の代数的整数でなければならない. 補題 3.4 より $|p| = 1$ なので, 円分多項式の性質から p が二次の代数的整数であるのは p が $\pm i, \pm\omega, \pm\omega^2$ のいずれかのときに限る. ただし, $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$ とする.

したがって少なくとも次のことはわかる.

補題 3.6 $H(\pm i), H(\pm\omega), H(\pm\omega^2)$ は離散群である.

逆に, これ以外の p についてはコンピュータによる実験 (4 節) から, $H(p)$ は離散的でないと思われているが, 証明はできていない.

以後 p が $\pm i, \pm\omega, \pm\omega^2$ のいずれかの場合について考察する.

$H(p) = H(-p)$ であり, $\omega + 1 = -\omega^2$ より $H(\omega) = H(\omega^2)$ であるから $p = i, \omega$ の場合について考察すればよい. $H(i), H(\omega)$ については次のことがわかる.

補題 3.7 $\mathbb{H}^3/H(i)$ および $\mathbb{H}^3/H(\omega)$ の体積は有限.

証明 $p = i$ のとき. $(h_1, h_2, h_3, h_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2i & 1 \end{pmatrix} \right)$ とおく.

$$D_1 = \{(z, t) \in \mathbb{H}^3, z \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} \leq \text{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\},$$

$$D_2 = \{(z, t) \in \mathbb{H}^3, z \in \mathbb{C} \mid -\frac{i}{2} \leq \text{Im}(z) \leq \frac{i}{2}\},$$

$$D_3 = \{(z, t) \in \mathbb{H}^3, z \in \mathbb{C} \mid \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 + t^2 \geq 1/4, \left|z + \frac{1}{2}\right|^2 + t^2 \geq \frac{1}{4}\},$$

$$D_4 = \{(z, t) \in \mathbf{H}^3, z \in \mathbb{C} \mid \left|z - \frac{i}{2}\right|^2 + t^2 \leq 1/4\} \cap \{(z, t) \in \mathbf{H}^3, z \in \mathbb{C} \mid \left|z + \frac{i}{2}\right|^2 + t^2 \leq \frac{1}{4}\}$$

とおけば, $D_i (i = 1, 2, 3, 4)$ はそれぞれ $\langle h_i \rangle (i = 1, 2, 3, 4)$ の基本領域であるから, $D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4$ に含まれる $H(i)$ の基本領域が存在する. D は $\mathbf{H}^3$ の理想多面体であるから, $H(i)$ の基本領域の体積も有限である.

$p = \omega$ のときも同様に,

$$D_1 = \{(z, t) \in \mathbf{H}^3, z \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2}\},$$

$$D_2 = \{(z, t) \in \mathbf{H}^3, z \in \mathbb{C} \mid -1 \leq z\bar{\omega} + \bar{z}\omega \leq 1, -1 \leq z\omega + \bar{z}\bar{\omega} \leq 1\},$$

$$D_3 = \{(z, t) \in \mathbf{H}^3, z \in \mathbb{C} \mid \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 + t^2 \geq 1/4, \left|z + \frac{1}{2}\right|^2 + t^2 \geq \frac{1}{4}\},$$

$$D_4 = \{(z, t) \in \mathbf{H}^3, z \in \mathbb{C} \mid \left|z - \frac{\bar{\omega}}{2}\right|^2 + t^2 \geq 1/4, \left|z + \frac{\bar{\omega}}{2}\right|^2 + t^2 \geq \frac{1}{4}\}$$

とおけば, $H(\omega)$ の基本領域を $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4$ の中に含むようにとれるので, $H(\omega)$ の基本領域の体積も有限であることがわかる. $\square$

$PSL(2, \mathbb{C})$ の離散部分群 Γ が $\Lambda(G) = \hat{\mathbb{C}}$ を満たすとき, Γ は第一種クライン群と呼ばれる.

命題 3.8 ([5, Proposition 5.1.]) Γ を $PSL(2, \mathbb{C})$ の離散部分群とする. $\mathbf{H}^3/\Gamma$ の体積が有限であるならば Γ は第一種クライン群である.

証明 $\Omega(\Gamma) \neq \emptyset$ を Γ の不連続領域とする. Γ は $\Omega(\Gamma)$ に真性不連続に作用するので, 自明でない任意の $g \in \Gamma$ に対し $B \cap g(B) \neq \emptyset$ となる円板 $B \subset \Omega(\Gamma)$ が存在する. この B で張られる半球を $\hat{B}$ とすると, 自明でない任意の $g \in \Gamma$ に対し $\hat{B} \cap g(\hat{B}) \neq \emptyset$ である. しかし $\hat{B}$ の体積は無限であるから, これは $\mathbf{H}^3/\Gamma$ の体積が有限であることに矛盾. 従って $\Omega(\Gamma) = \emptyset$ すなわち $\Lambda(\Gamma) = \hat{\mathbb{C}}$ を得る. $\square$

補題 3.7 と命題 3.8 より, $H(i), H(\omega)$ は $P \simeq \hat{\mathbb{C}}$ に第一種クライン群として作用し, $\Lambda(H(i)) = \Lambda(H(\omega)) = P$ である. $G = \langle f, g, h \rangle$ を部分群 H で剰余分解して考えれば, 今までの議論をまとめて次の定理を得る.

定理 3.9 $H = H(i), H(\omega)$ に対し,

$$\Lambda(G) = \overline{\bigcup_{aH \in G/H} aP}$$

証明 任意の $aH \in G/H$ に対して $\Lambda(aHa^{-1}) = aP$ であるから $aP \subset \Lambda(G)$ であり $\overline{\bigcup_{aH \in G/H} aP} \subset \Lambda(G)$ である. 逆の包含関係は $\Lambda(G)$ が G で不変な最小の閉集合であることからわかる. $\square$

3.1 G のパラメータについて

最後に, $f = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ のパラメータについて考える. 補題 3.4 より $z = \sqrt{2}j$ であることはすでにわかっている. y については $xw^* - yz^* = 1$ より x, w から定まるので x, w について調べればよい.

元の特徴付け $z^*x = x^*z, zw^* = wz^*$ に $z = \sqrt{2}j$ を代入して

$$jxj^{-1} = x^*, jwj^{-1} = w^*$$

を得る。これから x, w の i 成分が 0 であることがわかる。

u_0, u_1, u_2 を実数として $u = u_0 + u_1i + u_2j$ とおく。 $U = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ に対して $U^{-1}gU = g, U^{-1}hU = h$ は明らかである。 $U^{-1}fU$ を計算すると

$$U^{-1}fU = \begin{pmatrix} x - \sqrt{2}uj & ** \\ \sqrt{2}j & w + \sqrt{2}ju \end{pmatrix}$$

となる。なお、行列の $(1, 2)$ 成分は他の成分から定まるので略した。 u の定義から uj, ju の i 成分は 0 であることに注意しよう。

ここで、 $x' = x - \sqrt{2}uj, w' = w + \sqrt{2}ju$ とおく。 uj, ju の i 成分が 0 であることと、 x, w の i 成分が 0 であることから、 $u = \frac{(w^* - x)j}{2\sqrt{2}}$ を満たす u_0, u_1, u_2 を選べば $x' = (w')^*$ とできる。したがって次の定理を得る。

定理 3.10 $G = \langle f, g, h \rangle$ は $\text{Möb}^+(\hat{\mathbb{R}}^3)$ による共役を除いて、

$$G(t_1, t_2, t_3, p) = \left\langle \begin{pmatrix} t & \frac{(1-t^2)j}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}j & t^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

と表せる。ただし、 $t = \frac{t_1 + t_2j + t_3k}{2}, (t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}), p \in \mathbb{C} - \mathbb{R}, |p| = 1$ とする。

補題 3.11 $p = i, \omega$ のとき $t \in \mathbb{R}$ で、 $|t| \geq 1$ ならば G は離散的である。

証明 $R^3 \simeq R(1, i, j) \subset \mathbb{H}$ とする。

$|t| \geq 1$ のとき、 $\pm \frac{tj}{\sqrt{2}}$ を中心とする半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の二つの球をそれぞれ C_1, C_2 とする。 C_1, C_2 の外部（無限遠点を含む側）と、原点を中心とする一辺の長さが 1 の正方形から作られる平面 $R(1, i)$ に垂直な正方形柱の内部との共通部分を F とする。 F の面角は $\pi/2, \pi/4$ なので、ポアンカレの多面体定理より G の離散性がわかる。

$p = \omega$ のときは正方形を正六角形で考えることにより、上の議論と同様にして G の離散性がわかる。 $\square$

4 コンピュータによる実験および極限集合の描画

$p \in \mathbb{C}, |p| = 1, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ をパラメータとして $\bigcup_{aH \in G/H} aP$ を描画するソフトウェア, Norio [8] を製作した。

以下の図は単位球による反転でうつした $\Lambda(G)$ のデータを、POV-Ray (Mac OS 版) [26] を用いて描いたものである。なお、球の数が多くなるとレンダリングエラーになるため、球の数は 1,000,000 以下に抑えている。本来は放物型変換の固定点の近くに球が密集するはずであるが、そうならないのはこのためである。

$\bigcup_{aH \in G/H} aP$ が任意の異なる $aH, a'H \in G/H$ に対して aP と $a'P$ が接するか交わらないとき、房状 (tufted) であると呼ぶことにする。パラメータを動かして実験したところ、次の観察を得た。

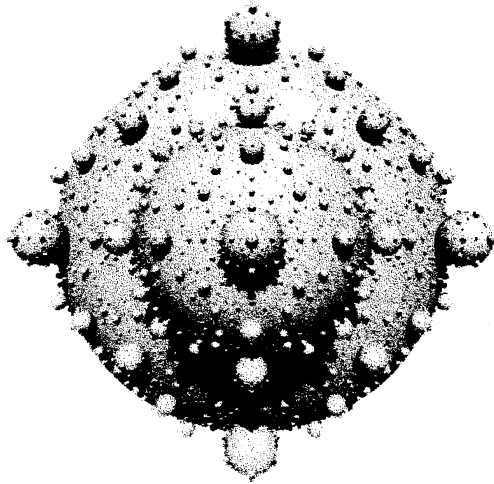


図1 $p=i, t=2.8$ のとき, f の固定点方向から見た図.

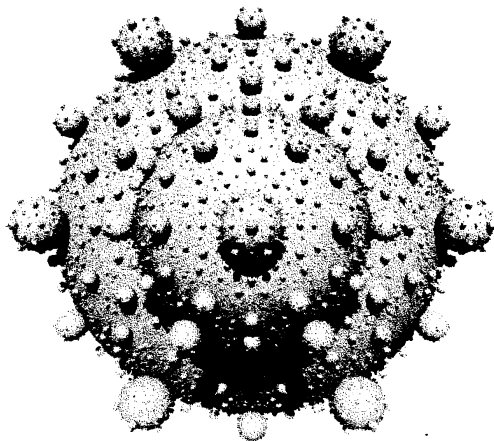


図2 $p=\omega, t=2.8$ のとき, f の固定点方向から見た図.

観察 4.1

1. $p \neq i, p \neq \omega$ のときは $\Lambda(G) = \mathbb{R}^3$.
2. $p = i, \omega$ のときは $\Lambda(G)$ を房状に保ったまま, パラメータ t をある程度動かすことができる.

予想 4.2

1. G が離散的であるような t のパラメータ空間は, Maskit slice のパラメータ空間と似た三次元の形状になると考えられる.
2. 二元生成三次元クライネ群で生成元の1つが放物型の場合の極限集合からの類推により, $G = \langle f, g, h \rangle$ が $G' = \langle \alpha, \beta, \gamma \mid [\alpha, \beta]^2 = [\alpha, \gamma]^2 = [\beta, \gamma] = 1 \rangle$ の忠実な表現になっているならば, $\Lambda(G)$ は房状であ

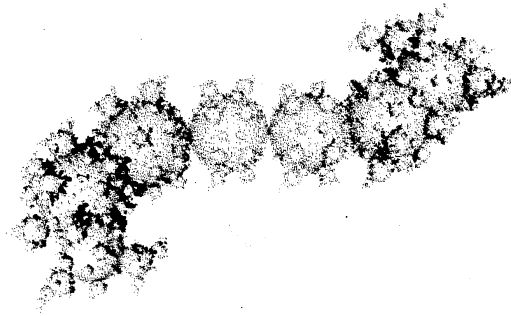


図3 $p = \omega, t = 1.95 + 0.15j + 0.15k$ のとき.

と考えられる.

参考文献

- [1] 阿原 一志「球面体と3次元擬フックス群」数理解析研究所講究録 1329 (2003), 109-114.
- [2] 木戸 哲也「メビウス変換について」プレプリント (2003) .
- [3] 谷口 雅彦, 奥村 善英「双曲幾何学への招待」培風館 (1996).
- [4] 谷口 雅彦, 松崎 克彦「双曲的多様体とクライン群」日本評論社 (1993) .
- [5] 宮地 秀樹「私的3次元双曲幾何入門」プレプリント.
- [6] 和田 昌昭「OPTiにおける極限集合描画アルゴリズム」プレプリント (2002) .
- [7] 和田 昌昭「OPTiにおける離散性判定アルゴリズム」プレプリント (2002) .
- [8] コンピュータソフトウェア, "Norio" .
- [9] Ahara K., and Araki Y., *Spherahedral approach to parameterize visible three dimensional quasi-Fuchsian fractals*, Proc. of the CGI (2003), 226-229.
- [10] Akiyoshi H., Sakuma M., Wada M., and Yamashita Y., *Jorgensen's picture of quasifuchsian punctured torus groups*, Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds, London Math. Soc., Lecture Note Series. 299 (2003), 247-273.
- [11] Akiyoshi H., and Sakuma M., *Comparing two convex hull constructions of cusped hyperbolic manifolds*, Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds, London Math. Soc., Lecture Note Series. 299 (2003), 209-246.
- [12] Akiyoshi H., Miyachi H., and Sakuma M., *A refinement of McShane's identity for quasifuchsian punctured torus groups*, Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds, London Math. Soc., Lecture Note Series. 329 (2006), 151-185.
- [13] Araki Y., Ito K., Komori Y., *A note on a 3-dimensional extension of the Maskit slice*, RIMS

kokyuroku, to appear.

- [14] Araki Y., Ito K., Komori Y., *4-dimensional Kleinian punctured torus groups*, <http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~itoken/3d-maskit.html>
- [15] Cao W., Parker J., and Wang X., *On the classification of quaternionic Möbius transformations*, Math. Proc. Cambridge Philosophical Soc., **137**:2 (2004), 349-362.
- [16] Epstein D.B.A., Marden A., and Markovic V., *Quasiconformal homeomorphisms and the convex hull boundary*, Ann. of Math., **159** (2004), 305-336.
- [17] Hersonsky S., *A generalization of the Shimizu-Leutbecher and Jørgensen inequalities to Möbius transformations in $\mathbb{R}^N$* , Proc. of the American Math. Soc., **121**:1 (1994), 209-215.
- [18] Hertrich-Jeromin U., *Introduction to Möbius Differential Geometry*, London Math. Soc., Lecture Note Series. 300 (2003).
- [19] Hidalgo R., Maskit B., *On neoclassical schottky groups*, Trans. of the American Math. Soc., **358**:11 (2006), 4765-4792.
- [20] Kapovich M., *Topological aspects of Kleinian groups in several dimensions*, Proc. of 3-rd Ahlfors-Bers Colloquium (2002).
- [21] Kapovich M., *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups*, Birkhäuser (2001).
- [22] Komori Y., Sugawa T., Wada M., Yamashita Y., *Drawing Bers Embeddings of the Teichmüller Space of Once-Punctured Tori*, Exper. Math., **15** (2006), 51-60.
- [23] Lanphier D., and Rosenhouse J., *A decomposition theorem for Cayley graph of Picard group quotients*, The Journal of Combinatorial Math. and Combinatorial Computing, **50** (2004), 95-104.
- [24] Maskit B., *Kleinian Groups*, Springer (1988).
- [25] Mumford D., Series C., and Wright D., *Indra's Pearls*, Cambridge Press (2003).
- [26] POV-Ray, <http://www.povray.org/>
- [27] Wada M., *OPTi's Algorithm for Discreteness Determination*, Exper. Math., **15** (2006), 61-66.
- [28] Wada M., *OPTi's Algorithm for Drawing the Limit Set*, Interdisciplinary Information Sciences, **9** (2003), 183-187.
- [29] Wright D., *Searching for the cusp*, Spaces of Kleinian Groups, Cambridge University Press Lond. Math. Soc. Lec. Notes 329 (2005), 301-336.

