

半単純リー群の leading exponent の記述

東大数理 山本 敦子 (Atsuko YAMAMOTO)

§1. Introduction

半単純 Lie 群 $G_{\mathbb{R}}$ の既約表現 π の行列要素 $f_{\pi} : G_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}$ の漸近展開は $G_{\mathbb{R}}$ の Cartan 分解 $G_{\mathbb{R}} = K_{\mathbb{R}} A_{\mathbb{R}} K_{\mathbb{R}}$ ($g = kak'$) と Weyl 群 W の元 w を用いて $f_{\pi}(kak') \sim \sum_{w \in W} b_w(k, a, k') a^{\rho - w\lambda}$, ($k, k' \in K_{\mathbb{R}}, a \in A_{\mathbb{R}}, \lambda : \text{generic}, a^{\rho - w\lambda} = e^{\langle \rho - w\lambda, \log a \rangle}$) と表せる. ここでの係数 $b_w(k, a, k')$ は, 恒等的にゼロでない場合 $a \rightarrow \infty$ としたときある解析関数 $b_w(k, k')$ に近づくものである. ($a \rightarrow \infty$ とは, 任意の正ルート α に対して $\langle \log a, \alpha \rangle \rightarrow \infty$ となること) ここで既約表現 π に対し, 係数 b_w が恒等的にゼロではない Weyl 群の元の集合を $S(\pi)$ と書くことにする. $S(\pi)$ の元 w_1, w_2 が Bruhat order で $w_1 > w_2$ の関係があるとき, $a^{\rho - w_1\lambda} / a^{\rho - w_2\lambda} \rightarrow 0$ ($a \rightarrow \infty$) となる. つまり, 行列要素の漸近挙動は Bruhat order で minimal なものによって決まるということで, これをふまえると既約表現 π に対する $S(\pi)$ の Bruhat order で minimal な元の全て $S_0(\pi)$ を求めることが表現の leading exponents を求めることに相当する.

leading exponents:

$$S_0(\pi) := \left\{ w \in S(\pi) \mid \begin{array}{l} w \text{ は Bruhat Order} \\ \text{で minimal} \end{array} \right\}.$$

この Weyl 群の元の集合 $S_0(\pi)$ を求める方法を, 松木-大島が提示した [MO]. この方法では $S_0(\pi)$ は松木, 大島が導入した G/B (G は $G_{\mathbb{R}}$ の複素化, B はその Borel 部分群) の K -軌道 (K は $K_{\mathbb{R}}$ の複素化) 間の closure relation を示す diagram を使って求まる. ここでの diagram とは G/B 上の K -軌道と 1 対 1 対応に対応する clan と呼ばれる記号表記とそれらを結ぶ数字付き矢印からなる. 松木-大島の方法はその diagram 上を既約表現 π に対応する K -軌道の clan $\Gamma(\pi)$ から矢印の向きに従ってたどり, そのときに通った矢印に付いている数字から Weyl 群の元を求める という方法である. そこで, 松木-大島の

方法によって得られる Weyl 群の元の全てを $\text{clan } \Gamma(\pi)$ から associated clan と呼ばれる記号表記を新しく作り, これに情報を付加する二つのステップと, 一意に行われるいくつかの作業, を組み合わせることにより求められることがわかった. ここでの新しい方法では diagram を書き出さなくても $S_0(\pi)$ の元の全てを重複なく求めることができる. 加えて新しく導入した associated clan は, 松本-大島の diagram の意味を理解する上で大きな助けともなる.

§2. M-O diagram ($\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ が I 型 の時)

命題 2.1.

$$\{G/B \text{ の各 } K\text{-orbit} \} \xleftrightarrow{1:1} \{ \text{Borel subalgebra の } K\text{-共役類} \}$$

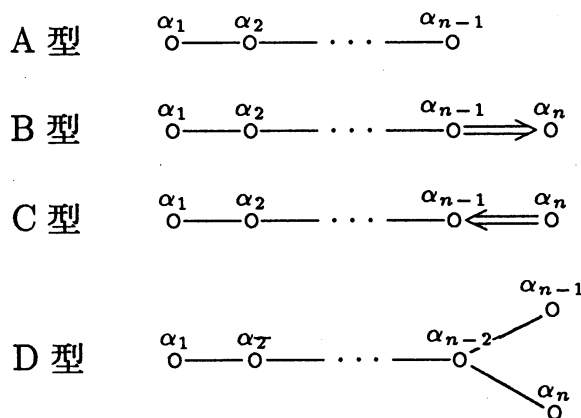
であることから各共役類の代表元として

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \quad (\text{Levi 分解})$$

(ただし $\mathfrak{g}^{\sigma} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ である involution σ に対し $\mathfrak{a}$ は σ -stable かつ θ -stable.) となる Borel subalgebra $\mathfrak{b}$ がとれる.

Σ^{+} を $\mathfrak{n}$ に対応するルート系 $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ の正ルート系とすると, このような $(\mathfrak{a}, \Sigma^{+})$ の取り方は $K_{\mathbb{R}}$ -共役類を除いて一意に決まる. [M]

$(\mathfrak{a}, \Sigma^{+})$ に対し, simple roots を $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, (\alpha_n)\}$ とする.



α^* の直交基底 $\{e_1, \dots, e_n\}$ を次のようにとる.

$$\begin{aligned} \alpha_i &= e_i - e_{i+1} & (1 \leq i \leq n-1) \\ \alpha_n &= e_n, 2e_n, e_{n-1} + e_n & (\text{それぞれ B, C, D 型るとき}) \end{aligned}$$

以上の方法で作れる α^* の直交基底の集合を $\mathbb{E}_{G_{\mathbb{R}}}$ で表す.

$$\mathbb{E}_{G_{\mathbb{R}}} = \left\{ (e_1, \dots, e_n) \left| \begin{array}{l} \text{全ての } (\alpha, \Sigma^+) \text{ に対し} \\ \text{上で作られる } (e_1, \dots, e_n) \end{array} \right. \right\}$$

定義 2.2. [MO] $\{+, -, \underline{a}, \bar{a}, \star \mid a \in \mathbb{N}\}$ の元からなる順序付けられた n 個の記号の列 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ が次の 4 + 1 条件を満たすとき $(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{E}_{G_{\mathbb{R}}}$ に対する clan と呼ぶ.

- 1) $\theta e_i = e_i$ のとき γ_i は + または -.
- 2) $\theta e_i = e_j$ ($i \neq j$) のとき $\gamma_i = \gamma_j = \underline{a}$ ($\exists a \in \mathbb{N}$) である.
- 3) $\theta e_i = -e_j$ ($i < j$) のとき $\gamma_i = \underline{a}$ $\gamma_j = \bar{a}$ ($\exists a \in \mathbb{N}$) である.
- 4) $\theta e_i = -e_i$ のとき $\gamma_i = \star$ である.
- 1') $e_i, e_j \in \{+, -\}$ のとき次は同値.

$$\gamma_i = \gamma_j \Leftrightarrow e_i - e_j \text{ が compact root}$$

(注 1). 1つの符号を定めると Weyl 群, Cayley 変換でうつりあうものを同じ符号にするとそれぞれの符号は一意に決まる.

(注 2). 同じ $(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{E}_{G_{\mathbb{R}}}$ に対して定義される clan は同じものとみなす. 例えば $\underline{1} + \underline{2} \underline{1} \bar{2} - = \underline{4} + \underline{1} \underline{4} \bar{1} -$ である.

事実 2.3. 1つの clan の中には同じ自然数が 2 つずつあらわれる. また, $\gamma_1 \cdots \gamma_n$ を clan とするとき $\gamma_i = \bar{a}$ ($a \in \mathbb{N}$) であるなら, $\gamma_j = \underline{a}$ である $j < i$ が存在する.

例 2.4. $n = 3$ で $(\theta e_1, \theta e_2, \theta e_3) = (-e_3, -e_2, -e_1)$ のとき

$$\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \underline{1} \star \bar{1}$$

である.

定理 2.5. [MO]

$$\{G/B \text{ 上の } K\text{-orbit}\} \xrightarrow{1:1} \left\{ \gamma_1 \cdots \gamma_n \left| \begin{array}{l} \gamma_1 \cdots \gamma_n \text{ は } (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{E}_{G_{\mathbb{R}}} \\ \text{の clan} \end{array} \right. \right\}$$

ここから先は旗多様体 G/B 上の K -orbit を考察するので (a, Σ^+) を 1 つ固定する. n 個の (A 型では $(n-1)$ 個の) parabolic subgroup を

$$P_i := \{ \{-\alpha_i\} \cup \Sigma^+ \text{ に対する parabolic subgroup} \}$$

で定義する.

定義 2.6. [MO] $G_{\mathbb{R}}$ の M-O diagram とは G/B 上の K -orbit を頂点集合としてもち, それらをつなぐ数字付き矢印が次を満たすものである.

・ Γ と Γ' を K -orbit (を表す clan) とするとき

$$\dim \Gamma + 1 = \dim \Gamma' \quad \text{かつ} \quad \Gamma P_i = \Gamma' P_i \quad (\text{orbit として})$$

のとき図中 Γ から出て Γ' に入る「矢印 i 」が存在する.

$$\left(\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ \text{すなわち} & \downarrow i & \text{となっている.} \\ & \Gamma' & \end{array} \right)$$

事実 2.7. 定義から M-O diagram 内では次の事が成り立っている.

- ・ closed orbit に入る矢印はない.
- ・ open orbit から出る矢印はない.
- ・ ひとつの clan に同じ数字が付いた矢印で入るものと出るものが同時に存在することはない.

例 2.8. $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{su}(m, n-m)$ (Cartan の分類で AIII 型) のときには $\theta e_i = e_i$ または $\theta e_i = e_j$ のみがおこるので clan は $\{+ - \underline{a} \mid a \in \mathbb{N}\}$ のみからなる.

定理 2.9. [MO] 古典群の M-O diagram は組合せ論的に定義できる.

§3. AIII-型の M-O diagram

定義 3.1. [AIII 型 M-O diagram] AIII-型 ($\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{su}(m, n-m)$) M-O diagram は次で帰納的に定められる.

1) diagram を構成する clan は n 個の記号からなりこれを $\Gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$ とするとき次が成り立つ.

$$\#\{i \in \mathbb{N} \mid \gamma_i = +\} - \#\{i \in \mathbb{N} \mid \gamma_i = -\} = m - (n - m)$$

2) $+$ と $-$ のみからなる clan に入る矢印はない. (つまり closed orbit に対応する clan は $\{+, -\}$ のみからなる.)

3) clan Γ に対し, Γ に入る「矢印 i 」($i = 1, 2, \dots, n-1$) がなく, かつ $\gamma_i \neq \gamma_{i+1}$ のとき, 「矢印 i 」が Γ から出て Γ' に入る. ここで Γ' は $\gamma_i, \gamma_{i+1} \in \{+, -\}$ のとき $\gamma'_i = \gamma'_{i+1} = \perp$ (図 3.1.1) それ以外るとき $\gamma'_i = \gamma_{i+1}, \gamma'_{i+1} = \gamma_i$ (図 3.1.2) を満たす $\Gamma' = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{i-1} \gamma'_i \gamma'_{i+1} \gamma_{i+2} \cdots \gamma_n$ である.

(図 3.1.1)

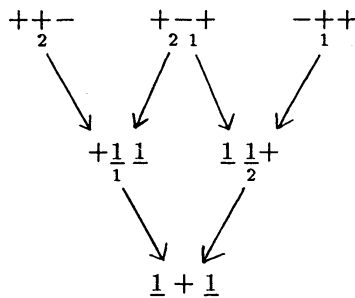
$$\begin{array}{c} \cdots \gamma_{i-1} \pm \mp \gamma_{i+2} \cdots \\ \downarrow i \\ \cdots \gamma_{i-1} \perp \perp \gamma_{i+2} \cdots \end{array}$$

(図 3.1.2)

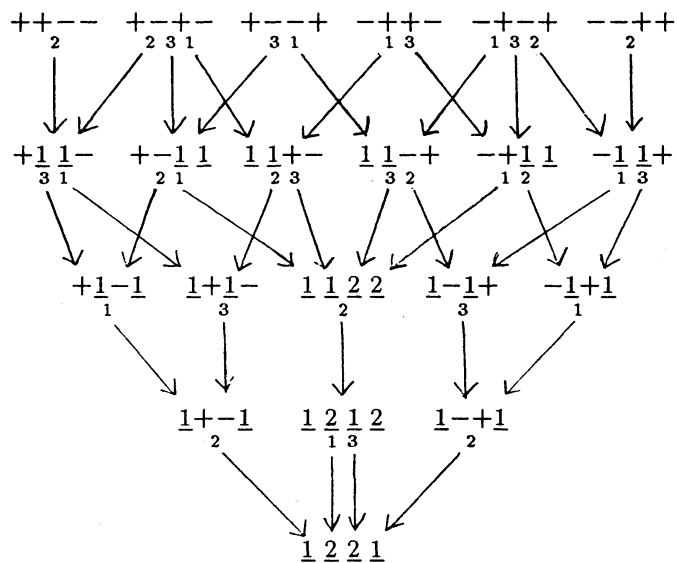
$$\begin{array}{c} \cdots \gamma_{i-1} \gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_{i+2} \cdots \\ \downarrow i \\ \cdots \gamma_{i-1} \gamma_{i+1} \gamma_i \gamma_{i+2} \cdots \end{array}$$

例 3.2.

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{su}(2, 1)$$



$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{su}(2, 2)$$



定理 3.3. $[O] G_{\mathbb{R}}$ の既約表現 π に対応する G/B 上の K -orbit から open orbit まで 矢印の向きに進む時に通る矢印の数字を順に $i(1), i(2), \dots, i(k)$ とする.

$$\textcircled{S}_0(\pi) := \{s_{i(1)}s_{i(2)}\cdots s_{i(k)} \mid \text{上で得られる } i(1), \dots, i(k)\}$$

ただし $s_j \in W$ は α_j に対する reflection.

とするとき

$$\textcircled{S}_0(\pi) = S_0(\pi)$$

例 3.4. $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{su}(2, 1)$ の時 (例 3.2 参照)

$$\begin{aligned}\textcircled{S}_0(+ - +) &= \{s_2s_1, s_1s_2\} = \{312, 231\} \\ \textcircled{S}_0(+ \underline{1} \underline{1}) &= \{s_1\} = \{213\}\end{aligned}$$

注 3.5. この方法では重複して求められる事がある.

例 3.6. $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{su}(2, 2)$ の時 (例 3.2 参照)

$$\begin{aligned}\textcircled{S}_0(\underline{1} \underline{1} + -) &= \{s_3s_2s_1, s_3s_2s_3, s_2s_3s_2\} \\ &= \{4123, 1432, 1432\} \\ &= \{4123, 1432\}\end{aligned}$$

§4. clan から $\textcircled{S}_0$ を求める (AIII-型)

定理 AIII. $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(m, n - m)$ の既約表現に対する clan π から次の手順で得られる数字の列を置換とみなすとその全ての集合は重複なく $\textcircled{S}(\pi)_0$ と一致する.

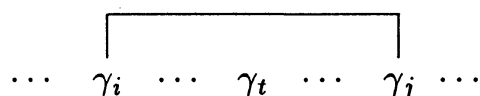
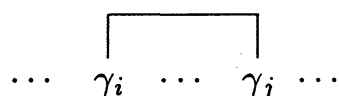
手順 AIII.1. clan $\pi = \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{m+n}$ 中の $+$ と $-$ を5つの条件 (AIII.1.1) ~ (AIII.1.3) を満たすよう線で結ぶ. これによってできた clan の全体を $\Gamma(1)$ とする.

定義 4.1. この定義の中では $1 < 2 < \cdots < n < n+1 < -n < -n+1 < \cdots < -2 < -1$ の順序を用いる. (負の整数は AIII 型以外で使われる) この先の作業で構成する記号どうし線で結ばれた clan $\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{n'} \in \Gamma(x)$ ($n' = n$

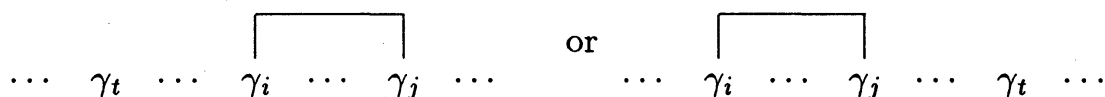
or -1) に対し記号 γ_i と γ_j ($i < j$) が線で結ばれているとき (図 4.1.1) γ_i と γ_j は pair をなすといい $P(i, j)$ で表し γ_i と γ_j を pair の元と呼ぶ. $P(i, j)$ と t ($i, j, t \in \mathbb{N}$) に対し $i < t < j$ のとき (図 4.1.2) $P(i, j)$ は γ_t をはさむ $t < i$ または $j < t$ のとき (図 4.1.3) $P(i, j)$ と γ_t は離れているという.

(図 4.1.1)

(図 4.1.2)

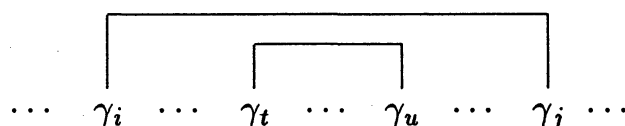


(図 4.1.3)

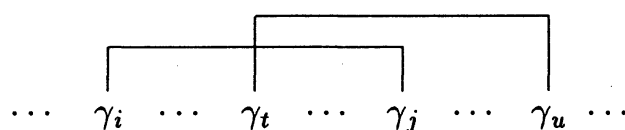


$P(i, j)$ と $P(t, u)$ ($i, j, t, u \in \mathbb{Z}$) に対し $i < t < u < j$ のとき (図 4.1.4) $P(i, j)$ は $P(t, u)$ をはさむ ($P(t, u)$ は $P(i, j)$ にはさまれる) といい, $i < t < j < u$ のとき (図 4.1.5) $P(i, j)$ と $P(t, u)$ は交差するといい. $i < j < t < u$ のとき (図 4.1.6) $P(i, j)$ と $P(t, u)$ は離れているという.

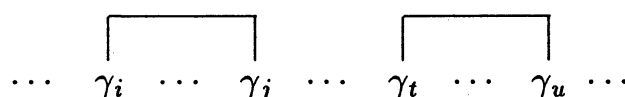
(図 4.1.4)



(図 4.1.5)



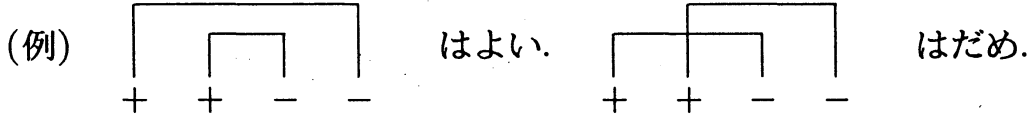
(図 4.1.6)



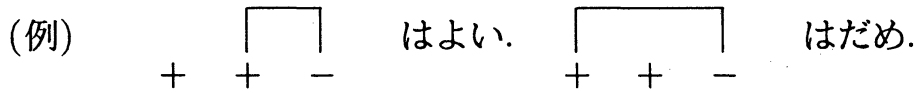
手順の続きを述べる. 手順 AIII.1 の条件を以下に述べる. ここで $m \geq n - m$ と仮定しても一般性を失わない.

(AIII.1.1) 各 $\gamma_i = -$ ($i \in \mathbb{N}$) は clan 中の $+$ のいずれかただ一つと線で結ばれる (複号同順).

(AIII.1.2) ここでできる $+$ と $-$ からなる pair どうしは交差しない.



(AIII.1.3) ここでできる $+$ と $-$ からなる pair は pair にならない $+$ をはさまない.



手順 AIII.2. (一意) $\Gamma(1)$ の各元の $\underline{a}$ と $\underline{a}$ ($\forall a \in \mathbb{N}$) を線で結ぶ. この全体を $\Gamma(2)$ とする.

定義 4.2. 写像 $P_x : \{\Gamma(2) \text{ の pair } P(i, j)\} \rightarrow \mathbb{N} : P(i, j) \mapsto P_x(i, j)$ ($x = 1, 2$) を次で定める.

$$(P_1(i, j), P_2(i, j)) = \begin{cases} (j, i) & P(i, j) \text{ が } + \text{ と } - \text{ からなる} \\ & \text{pair のとき} \\ (i, j) & \text{それ以外するとき} \end{cases}$$

手順 AIII.3. $\Gamma(2)$ の clan に対し次の位置関係の条件 (AIII.3.1)~(AIII.3.5) を満たすように n 個の数字 $\{P_1(i, j), P_2(i, j), k \mid \gamma_k \text{ は pair の元でない}\}$ を並べる. これで数字の列 ($\mathbb{S}_0(\pi)$ の元) が得られた.

$P_1(t, u), P_2(t, u), P_1(p, q), P_2(p, q)$ が並ぶ順序は (A) か (B) を満たすが,

(AIII.3.1) $P(t, u)$ が $P(p, q)$ をはさんでいるとき $\gamma_t \in \{+, -\}$ ならば (B) のみを満たしそれ以外ときは (A) のみを満たす.

(AIII.3.2) $P(t, u), P(p, q)$ が交差しているとき $\gamma_t \in \{+, -\}$ ならば (B) のみを満たしそれ以外ときはどちらでもよい.

(AIII.3.3) $P(t, u), P(p, q)$ が離れているときはどちらでもよい.

$$(A) \quad \cdots P_1(t, u) \cdots P_1(p, q) \cdots P_2(p, q) \cdots P_2(t, u) \cdots$$

$$(B) \quad \cdots P_1(p, q) \cdots P_1(t, u) \cdots P_2(t, u) \cdots P_2(p, q) \cdots$$

(AIII.3.4) k, h ($k < h$ で γ_k, γ_h は pair の元でない) は (C) を満たす.

$$(C) \quad \cdots \cdots \cdots k \cdots \cdots h \cdots \cdots$$

(AIII.3.5) $P_1(i, j), P_2(i, j), k$ (γ_k は pair の元でない) は (D) を満たす.

$$(D) \quad \cdots P_1(i, j) \cdots k \cdots P_2(i, j) \cdots$$

定理 AIII の証明は clan が cloed orbit から何回矢印を通ったものであるかを表す写像を定義して 2 つの clan が矢印で結ばれている場合どちらが矢印の先にあるものかを判断できるようにして示した. ここでは証明は略する.

定義 4.3. 手順 AIII.3 にて (A) のみを満たすことを $t \prec p$ で, (B) のみを満たすことを $p \prec t$ で表し, (A),(B) のどちらも満たすことができるとき ($t \sim p$) で表すことにする. また次の例の計算では (A),(B),(D) の代わりにそれぞれ (A'),(B'),(D') の表示を用いている.

$$(A') \quad \cdots t \cdots p \cdots p \cdots t \cdots$$

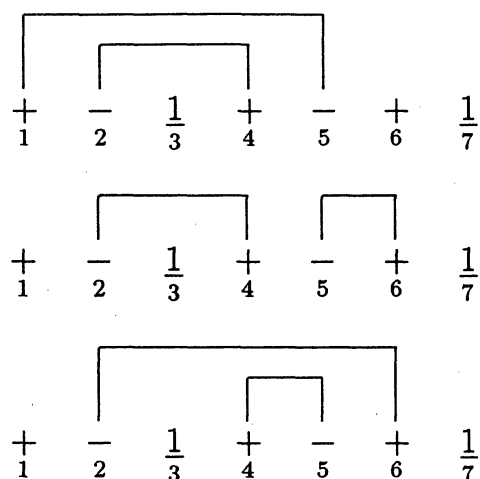
$$(B') \quad \cdots p \cdots t \cdots t \cdots p \cdots$$

$$(D') \quad \cdots i \cdots k \cdots i \cdots$$

例 4.4. clan $+-\underline{1}+-+\underline{1}$. に対しては $\Gamma(1)$ は

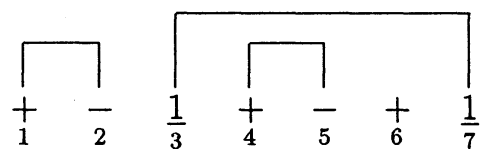
$$\begin{array}{ccccccc} & \frown & & \frown & & & \\ + & - & \frac{1}{3} & + & - & + & \frac{1}{7} \\ 1 & 2 & & 4 & 5 & 6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \frown & & & \frown & & \\ + & - & \frac{1}{3} & + & - & + & \frac{1}{7} \\ 1 & 2 & & 4 & 5 & 6 & \end{array}$$

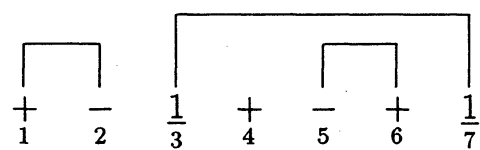


の5つあり, それぞれにたいする $\Gamma(2)$ は

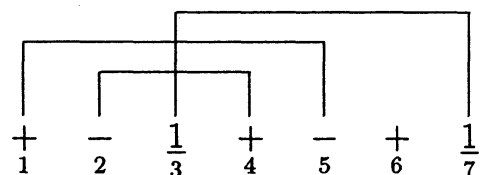
(図 4.4.1)



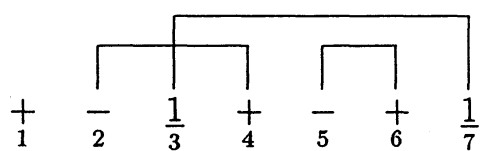
(図 4.4.2)



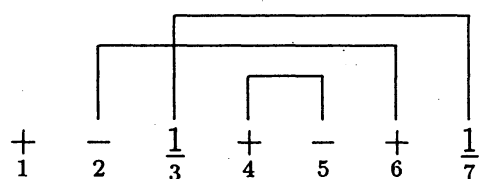
(図 4.4.3)



(図 4.4.4)



(図 4.4.5)



よって手順 AIII.3 より, (図 4.4.1) に対し $4 \prec 3$ であるので

$$\begin{array}{ccc}
 & & 4 \ 3 \ 3 \ 4 \\
 \text{さらに} & \begin{array}{l} (1 \sim 4) \\ (1 \sim 3) \end{array} & \text{であるので} \quad \begin{array}{l} 143341 \\ 413314 \\ 431134 \end{array}
 \end{array}$$

であり (AIII.3.4) (AIII.3.5) より

$$\begin{array}{lcl}
 1436341 & P(1,2) \xrightarrow{P_1 \times P_2} (2,1) & \\
 4136314 & \text{が得られ, } P(3,7) \xrightarrow{P_1 \times P_2} (3,7) & \text{であるので} \\
 4316134 & P(4,5) \xrightarrow{P_1 \times P_2} (5,4) &
 \end{array}$$

$$\textcircled{S}_0(+ - \underline{1} + - + \underline{1}) \supset \left\{ \begin{array}{l} 2536741 \\ 5236714 \\ 5326174 \end{array} \right\} =: \textcircled{S}_0\langle 1 \rangle$$

(図 4.4.2) に対しても同様に考えて

$$\begin{array}{ccc}
 (1 \sim 3) & 1534351 & \\
 (1 \sim 5) & \text{より } 5134315 & \text{が得られ,} \\
 5 \prec 3 & 5314135 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 P(1,2) \xrightarrow{P_1 \times P_2} (2,1) \\
 P(3,7) \xrightarrow{P_1 \times P_2} (3,7) \\
 P(5,6) \xrightarrow{P_1 \times P_2} (6,5)
 \end{array}$$

であるので

$$\textcircled{S}_0(+ - \underline{1} + - + \underline{1}) \supset \left\{ \begin{array}{l} 2634751 \\ 6234715 \\ 6324175 \end{array} \right\} =: \textcircled{S}_0\langle 2 \rangle$$

(図 4.4.3) に対しても同様に考えて

$$3 \prec 2 \prec 1 \quad \text{より} \quad 3216123 \quad \text{が得られ,}$$

$$\begin{array}{l}
 P(1,5) \xrightarrow{P_1 \times P_2} (5,1) \\
 P(2,4) \xrightarrow{P_1 \times P_2} (4,2) \\
 P(3,7) \xrightarrow{P_1 \times P_2} (3,7)
 \end{array}$$

であるので

$$\mathbb{S}_0(+ - \underline{1} + - + \underline{1}) \supset \{3456127\} =: \mathbb{S}_0\langle 3 \rangle$$

(図 4.4.4) に対しても同様に考えると

$$\begin{array}{lll} 3 \prec 2 & & \\ 2 \sim 5 & \text{より} & 3521253 \\ 3 \prec 5 & & 3251523 \end{array} \quad \text{が得られ,}$$

$$\begin{aligned} P(2,4) &\xrightarrow{P_1 \times P_2} (4,2) \\ P(3,7) &\xrightarrow{P_1 \times P_2} (3,7) \\ P(5,6) &\xrightarrow{P_1 \times P_2} (6,5) \end{aligned}$$

であるので

$$\mathbb{S}_0(+ - \underline{1} + - + \underline{1}) \supset \left\{ \begin{array}{l} 3641257 \\ 3461527 \end{array} \right\} =: \mathbb{S}_0\langle 4 \rangle$$

(図 4.4.5) に対しても同様に考えて

$$3 \prec 4 \prec 2 \quad \text{であるので} \quad 3421243 \quad \text{が得られ,}$$

$$\begin{aligned} P(2,6) &\xrightarrow{P_1 \times P_2} (4,6) \\ P(3,7) &\xrightarrow{P_1 \times P_2} (3,7) \\ P(4,5) &\xrightarrow{P_1 \times P_2} (5,4) \end{aligned}$$

であるので

$$\mathbb{S}_0(+ - \underline{1} + - + \underline{1}) \supset \{3541647\} =: \mathbb{S}_0\langle 5 \rangle$$

以上により

$$\mathbb{S}_0(+ - \underline{1} + - + \underline{1}) = \mathbb{S}_0\langle 1 \rangle \sqcup \mathbb{S}_0\langle 2 \rangle \sqcup \mathbb{S}_0\langle 3 \rangle \sqcup \mathbb{S}_0\langle 4 \rangle \sqcup \mathbb{S}_0\langle 5 \rangle$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} 2536741 & 6324175 \\ 5236714 & 3456127 \\ 5326174 & 3641257 \\ 2634751 & 3461527 \\ 6234715 & 3541647 \end{array} \right\}$$

が得られる.

§5. CI-型の M-O diagram

定義 5.1. [CI 型 M-O diagram] [MO] CI 型 ($\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$) M-O diagram は次で帰納的に定められる.

1) diagram を構成する clan Γ は n 個の記号からなる.

2) $+$ と $-$ のみからなる clan に入る矢印はない.

3) clan Γ に対し, Γ に入る「矢印 i 」 ($i = 1, 2, \dots, n-1$) がなく, かつ $\gamma_i \neq \gamma_{i+1}$ のとき, 「矢印 i 」が Γ から出て Γ' に入る. ここで Γ' は $\gamma_i, \gamma_{i+1} \in \{+, -\}$ のとき $\gamma'_i = \gamma'_{i+1} = \perp$ (図 5.1.1) $\gamma_i = \underline{a}, \gamma_{i+1} = \bar{a}$ $a \in \mathbb{N}$ のとき $\gamma'_i = \gamma'_{i+1} = \star$ (図 5.1.2) それ以外のとき $\gamma'_i = \gamma_{i+1}, \gamma'_{i+1} = \gamma_i$ (図 5.1.3) を満たす $\Gamma' = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{i-1} \gamma'_i \gamma'_{i+1} \gamma_{i+2} \cdots \gamma_n$ である.

(図 5.1.1)

(図 5.1.2)

$$\begin{array}{ccc} \cdots \gamma_{i-1} \pm \mp \gamma_{i+2} \cdots & & \cdots \gamma_{i-1} \underline{a} \bar{a} \gamma_{i+2} \cdots \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ \cdots \gamma_{i-1} \underline{a} \underline{a} \gamma_{i+2} \cdots & & \cdots \gamma_{i-1} \star \star \gamma_{i+2} \cdots \end{array}$$

(図 5.1.3)

$$\begin{array}{ccc} \cdots \gamma_{i-1} \gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_{i+2} \cdots & & \\ \downarrow i & & \\ \cdots \gamma_{i-1} \gamma_{i+1} \gamma_i \gamma_{i+2} \cdots & & \end{array}$$

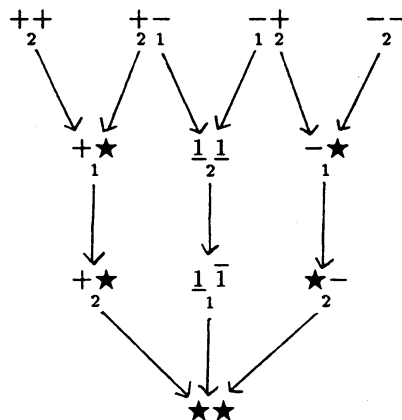
4) clan Γ に対し, Γ に入る「矢印 n 」がなく, $\gamma_n \in \{+, -, \underline{a} \mid a \in \mathbb{N}\}$ のとき, 「矢印 n 」が Γ から出て Γ' にはいる. ここで Γ' は $\gamma_n = \underline{a}$ ($a \in \mathbb{N}$) のとき (図 5.1.4) $\gamma'_n = \bar{a}$ $\gamma_n \in \{+, -\}$ のとき (図 5.1.5) $\gamma'_i = \star$ を満たす $\Gamma' = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{n-1} \gamma'_n$ である.

(図 5.1.4)

(図 5.1.5)

$$\begin{array}{ccc} \cdots \gamma_{n-1} \underline{a} & & \cdots \gamma_{n-1} \pm \\ \downarrow n & & \downarrow n \\ \cdots \gamma_{n-1} \bar{a} & & \cdots \gamma_{n-1} \star \end{array}$$

例 5.2. $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})$ の M-O diagram



§6. associated clan

定義 6.1. (associated clan) $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ が古典群のとき (AI, AII, AIII, BI, CI, CII, DI, DIII 型するとき) $\{+, -, \underline{a} \mid a \in \mathbb{N}\}$ の元からなる順序付けられた $2n$ 個 (BI 型の場合は $(2n+1)$ 個) の記号の列 $\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n \gamma_{-n} \cdots \gamma_{-2} \gamma_{-1}$ (BI 型の場合は $\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n \gamma_{n+1} \gamma_{-n} \cdots \gamma_{-2} \gamma_{-1}$) が $e_{-i} := -e_i$ とし, 次の $2+1$ 条件を満たすとき $(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{E}_{G_{\mathbb{R}}}$ に対する associated clan と呼ぶ.

- 1) $\theta e_i = e_i$ のとき γ_i は $+$ または $-$.
- 2) $\theta e_i = e_j$ のとき $\gamma_i = \gamma_j = \underline{a}$ ($\exists a \in \mathbb{N}$) である.
- 1)' $e_i, e_j \in \{+, -\}$ のとき次は同値,

$$\gamma_i = \gamma_j \Leftrightarrow e_i - e_j \text{ が compact root}$$

事実 6.2. $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ が AIII 型するとき associated clan と clan は一致する.

事実 6.3. $(e_1, \dots, e_1) \in \mathbb{E}_{\mathbb{R}}$ の clan から associated clan を求めることができる. 逆もできる. (CI 型の場合は 事実 7.5)

§7. associated clan から $\mathbb{S}_0$ を求める (CI-型)

定理 CI. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ の既約表現 π に対応する associated clan π' から次の手順で得られる数字の列を置換とみなすとその全ての集合は重複なく $\mathbb{S}(\pi)_0$ と一致する. (AI 型でも成り立つ)

手順 CI.1. associated clan $\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n \gamma_{-n} \gamma_{-n-1} \cdots \gamma_{-1}$ 中の $+$ と $-$ を次の3つの条件を満たすよう線で結ぶ. これによってできた clan を $\Gamma(1)$ とする.

(CI.1.1) 各 person $\gamma_i = \pm (i \in \mathbb{Z})$ は associated clan 中の干のいずれかただ一つと線で結ばれる (複号同順).

(CI.1.2) pair $P(i, j)$ ($i, j \in \mathbb{Z}$) が存在するとき pair $P(-j, -i)$ も存在する.

(CI.1.3) ここでできる pair どうしは交差しない.

手順 CI.2. (一意) $\Gamma(1)$ の各元の $\underline{a}$ と $\underline{a}$ ($\forall a \in \mathbb{N}$) を線で結ぶ. この全体を $\Gamma(2)$ とする.

定義 7.1. 写像 $P_x : \{\Gamma(2) \text{ の pair } P(i, j) \mid 0 < i < |j|\} \rightarrow \mathbb{N} : P(i, j) \mapsto P_x(i, j)$ ($x = 1, 2$) を次で定める.

$$(P_1(i, j), P_2(i, j)) = \begin{cases} (-i, j) & P(i, j) \text{ が } \pm \text{ と干からなる} \\ & \text{pair のとき} \\ (-j, i) & \text{それ以外するとき} \end{cases}$$

写像 $P_1 : \{\Gamma(2) \text{ の pair } P(i, -i)\} \rightarrow \mathbb{Z} : P(i, -i) \mapsto P_1(i, -i)$ を次で定める.

$$P_1(i, -i) = \begin{cases} -i & P(i, -i) \text{ が } \pm \text{ と干からなる pair のとき} \\ i & \text{それ以外するとき} \end{cases}$$

手順 CI.3. clan $\Gamma(2)$ に対し次の位置関係の条件を満たすように n 個の数字 $\{P_1(i, j), P_2(i, j), P_1(k, -k) \mid i < |j|\}$ を並べる. これで数字の列 ($\mathbb{S}_0(\pi)$ の元) が得られた.

$P_1(t, u), P_2(t, u), P_1(p, q), P_2(p, q)$ が並ぶ順は (A), (B), (C) いずれかを満たすが,

(CI.3.1) $P(t, u)$ が $P(p, q)$ をはさんでいるとき $\gamma_t \in \{+, -\}$ ならば (C) のみを満たす. それ以外するとき (A) のみを満たす.

(Ci.3.2) $P(t, u), P(p, q)$ が交差しているとき $\gamma_t \in \{+, -\}$ ならば (C) のみを満たす. それ以外るとき $t < p$ として (A), (B), (C) のいずれかを満たす.

(Ci.3.3) $P(t, u), P(p, q)$ が離れていて $t < p$ のとき (A), (B), (C) のいずれかを満たす.

$$(A) \quad \cdots P_1(t, u) \cdots P_2(t, u) \cdots P_1(p, q) \cdots P_2(p, q) \cdots$$

$$(B) \quad \cdots P_1(p, q) \cdots P_1(t, u) \cdots P_2(t, u) \cdots P_2(p, q) \cdots$$

$$(C) \quad \cdots P_1(p, q) \cdots P_2(p, q) \cdots P_1(t, u) \cdots P_2(t, u) \cdots$$

ただし, (A), (B), (C) 中 定義されていないもの ($P_2(i, -i)$ など) はないものとみなす.

(例). $q = -p$ のとき, (B) は $\cdots P_1(t, u) \cdots P_1(p, -p) \cdots P_2(t, u) \cdots$ となる.

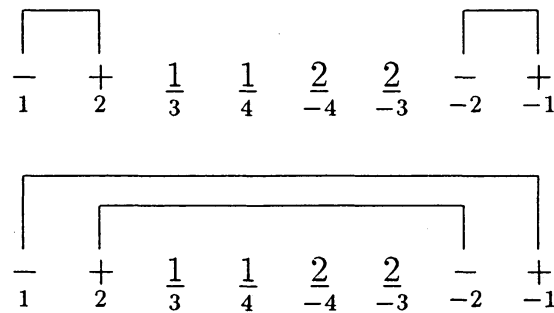
定義 7.2. 手順 CI.3 にて (A) のみを満たすことを $t \prec p$ で, (C) のみを満たすことを $p \prec t$ で表し, (A), (B), (C) のいずれかを満たすことを $(t \sim p)$ で表すことにする. また次の例の計算では (A), (B), (C) の代わりに (A'), (B'), (C') の表示を用いている.

$$(A') \quad \cdots t \cdots t \cdots p \cdots p \cdots$$

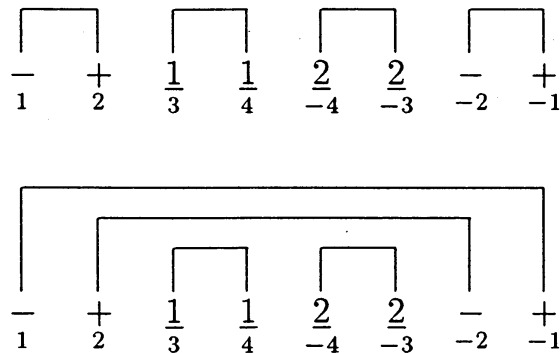
$$(B') \quad \cdots p \cdots t \cdots t \cdots p \cdots$$

$$(C') \quad \cdots p \cdots p \cdots t \cdots t \cdots$$

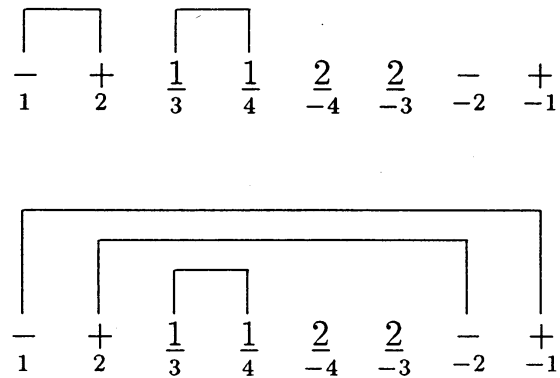
例 7.3. associated clan $- + \underline{1} \underline{1} \underline{2} \underline{2} - +$ ($= \text{clan } - + \underline{1} \underline{1}$) に対しては $\Gamma(1)$ は



の2つ. それに対する $\Gamma(2)$ はそれぞれ



手順 CI.3 の為には必要な pair $P(i, j)$ ($0 < i \leq |j|$) の線のみ残すと見やすい.
(図 7.3.1)



(図 7.3.2)

よって手順 CI.3 より, (図 7.3.1) に対し (1 ~ 3) であるので

$$\begin{array}{l} 3311 \\ 3113 \\ 1133 \end{array} \quad \text{であり} \quad \begin{array}{l} P(1, 2) \xrightarrow{P_1 \times P_2} (-1, 2) \\ P(3, 4) \xrightarrow{P_1 \times P_2} (-4, 3) \end{array} \quad \text{であるから}$$

$$\mathbb{S}_0(- + \underline{1} \underline{1}) \supset \left\{ \begin{array}{cccc} -4 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \end{array} \right\} =: \mathbb{S}_0\langle 1 \rangle.$$

(図 7.3.2) に対し $3 \prec 2 \prec 1$ であるので

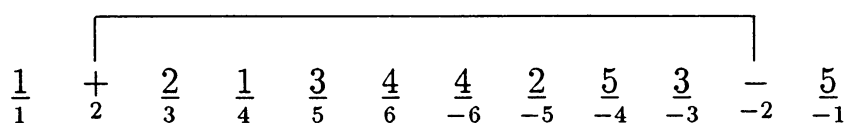
$$\begin{array}{l} 3 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \end{array} \quad \text{であり} \quad \begin{array}{l} P(1, -1) \xrightarrow{P_1} -1 \\ P(2, -2) \xrightarrow{P_1} -2 \\ P(3, 4) \xrightarrow{P_1 \times P_2} (-4, 3) \end{array} \quad \text{であるから}$$

$$\mathbb{S}_0(- + \underline{1} \underline{1}) \supset \{-43-2-1\} =: \mathbb{S}_0\langle 2 \rangle.$$

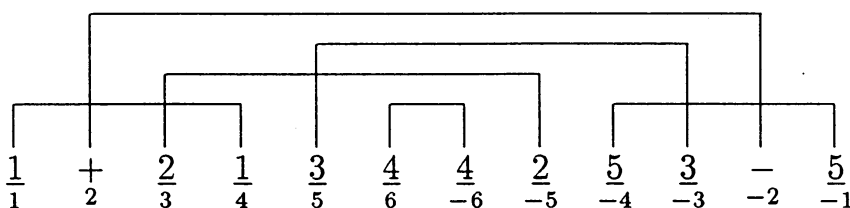
以上により,

$$\mathbb{S}_0(-+ \underline{1} \underline{1}) = \mathbb{S}_0\langle 1 \rangle \sqcup \mathbb{S}_0\langle 2 \rangle \left\{ \begin{array}{cccc} -4 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \\ -4 & 3 & -2 & -1 \end{array} \right\}.$$

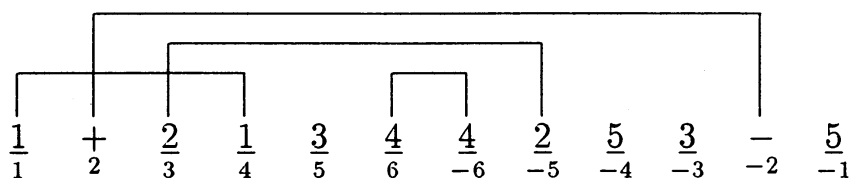
例 7.4. associated clan $\underline{1}+2\underline{1}\underline{3}\underline{4}\underline{4}\underline{2}\underline{5}\underline{3}-\underline{5}$ (= clan $\underline{1}+2\underline{1}\underline{2}\star$) に対しては $\Gamma(1)$ は



のみであるので $\Gamma(2)$ は



手順 CI.3 の為には必要な pair $P(i, j)$ ($0 < i \leq |j|$) の線のみ残すと見やすい.



よって手順 CI.3 より,

$$\begin{array}{ll} 1 \prec 2 & 3 \ 3 \ 6 \ 1 \ 1 \ 2 \\ (1 \sim 3) & 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 6 \ 2 \\ (1 \sim 6) & 3 \ 1 \ 1 \ 3 \ 6 \ 2 \\ 3 \prec 6 \prec 2 & 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 6 \ 2 \end{array} \quad \text{より} \quad \begin{array}{l} 3 \ 3 \ 6 \ 1 \ 1 \ 2 \\ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 6 \ 2 \\ 3 \ 1 \ 1 \ 3 \ 6 \ 2 \\ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 6 \ 2 \end{array} \quad \text{が得られ,}$$

$$P(1, 4) \xrightarrow{P_1 \times P_2} (-4, 1)$$

$$P(2, -2) \xrightarrow{P_1} -2$$

$$P(3, -5) \xrightarrow{P_1 \times P_2} (5, 3)$$

$$P(6, -6) \xrightarrow{P_1 \times P_2} 6$$

であるから

$$\textcircled{S}_0(\underline{1}+\underline{2}\underline{1}\bar{2}\star) = \left\{ \begin{array}{cccccc} 5 & 3 & 6 & -4 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & -4 & 1 & 6 & -2 \\ 5 & -4 & 1 & 3 & 6 & -2 \\ -4 & 1 & 5 & 3 & 6 & -2 \end{array} \right\}.$$

定理 CI の証明は associated clan の導入により AIII の場合と同様にできることが事実 7.5 事実 7.6 よりわかる.

定義より 事実 7.5 事実 7.6 が成り立つ.

事実 7.5. $(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{E}_{G_{\mathbb{R}}}$ に対する associated clan が

$\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \gamma_{-n} \dots \gamma_{-2} \gamma_{-1}$ であるとき, 次が成り立つ.

- $\gamma_i = \pm$ のとき $\gamma_{-i} = \mp$ である.
- $\gamma_i = \gamma_j = \underline{a}$ ($a \in \mathbb{N}$) のとき $\gamma_{-i} = \gamma_{-j} = \underline{b}$ ($b \in \mathbb{N}$) である.
- $i = 1, 2, \dots, n$ に対し

$$\gamma'_i = \begin{cases} \pm & \gamma_i = \pm \text{ のとき} \\ \star & \gamma_i = \gamma_{-i} = \underline{a} \text{ のとき} \\ \gamma_i & \gamma_i = \gamma_j = \underline{b} \text{ かつ } \{i < |j| \text{ または } j < i\} \text{ のとき} \\ \bar{d} & \text{その他のとき } \gamma_i = \gamma_j = \underline{c} \text{ かつ } \gamma_{-j} = \underline{d} \text{ とすると} \end{cases}$$

とすると $\gamma'_1 \gamma'_2 \dots \gamma'_n$ は $(e_1, \dots, e_n)$ の clan である.

• 逆に $(e_1, \dots, e_n)$ の clan $\gamma'_1 \gamma'_2 \dots \gamma'_n$ に対し, $\gamma'_i = \pm$ のとき $\gamma''_i = \pm$, $\gamma''_{-i} = \mp$. $\gamma'_i = \star$ のとき $\gamma''_i = \gamma''_{-i} = \underline{a}$. $\gamma'_i = \gamma'_j = \underline{b}$ のとき $\gamma''_i = \gamma''_j = \underline{b}$, $\gamma''_{-i} = \gamma''_{-j} = \underline{c}$. $\gamma'_i = \underline{d}$ かつ $\gamma'_j = \bar{d}$ のとき $\gamma''_i = \gamma''_j = \underline{d}$, $\gamma''_{-i} = \gamma''_{-j} = \underline{f}$. とすると $\gamma''_1 \gamma''_2 \dots \gamma''_n \gamma''_{-n} \dots \gamma''_{-1} = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \gamma_{-n} \dots \gamma_{-1}$ である.

事実 7.6. associated clan での CI 型 ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ の) M-O diagram では 定義 5.1 での (図 5.1.1)~(図 5.1.5) は次のようになる.

(図 5.1.1)

$$\begin{array}{c} \dots \gamma_{i-1} \pm \mp \gamma_{i+2} \dots \\ \downarrow \\ \dots \gamma_{i-1} \underline{a} \underline{a} \gamma_{i+2} \dots \end{array}$$

(図 7.6.1)

$$\begin{array}{c} \dots \gamma_{i-1} \pm \mp \gamma_{i+2} \dots \dots \gamma_{-i-2} \pm \mp \gamma_{-i+1} \dots \\ \downarrow \\ \dots \gamma_{i-1} \underline{a} \underline{a} \gamma_{i+2} \dots \dots \gamma_{-i-2} \underline{b} \underline{b} \gamma_{-i+1} \dots \end{array}$$

(図 5.1.2)

$$\begin{array}{c} \dots \gamma_{i-1} \underline{a} \bar{a} \gamma_{i+2} \dots \\ \downarrow \\ \dots \gamma_{i-1} \star \star \gamma_{i+2} \dots \end{array}$$

(図 7.6.2)

$$\begin{array}{c} \dots \gamma_{i-1} \underline{a} \underline{b} \gamma_{i+2} \dots \dots \gamma_{-i-2} \underline{a} \underline{b} \gamma_{-i+1} \dots \\ \downarrow \\ \dots \gamma_{i-1} \underline{b} \underline{a} \gamma_{i+2} \dots \dots \gamma_{-i-2} \underline{a} \underline{b} \gamma_{-i+1} \dots \end{array}$$

(図 5.1.3)

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \gamma_{i-1} & \gamma_i & \gamma_{i+1} & \gamma_{i+2} & \cdots \\ & & \downarrow & & & \\ \cdots & \gamma_{i-1} & \gamma_{i+1} & \gamma_i & \gamma_{i+2} & \cdots \end{array}$$

(図 5.1.4)

$$\begin{array}{c} \cdots \cdots \gamma_{n-1} \underline{a} \\ \downarrow n \\ \cdots \cdots \gamma_{n-1} \bar{a} \end{array}$$

(図 5.1.5)

$$\begin{array}{c} \cdots \cdots \gamma_{n-1} \pm \\ \downarrow n \\ \cdots \cdots \gamma_{n-1} \star \end{array}$$

(図 7.6.3)

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \gamma_i & \gamma_{i+1} & \cdots & \cdots & \gamma_{-i-1} & \gamma_{-i} & \cdots \\ & & \downarrow & & & & & \\ \cdots & \gamma_{i+1} & \gamma_i & \cdots & \cdots & \gamma_{-i} & \gamma_{-i-1} & \cdots \end{array}$$

(図 7.6.4)

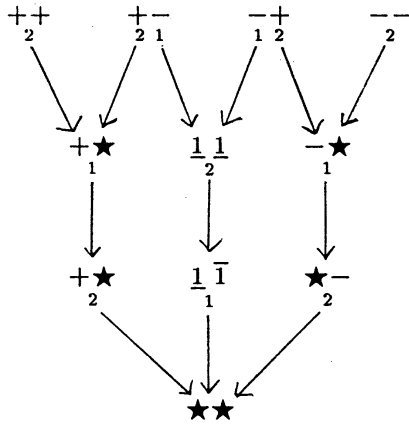
$$\begin{array}{c} \cdots \cdots \gamma_{n-1} \underline{a} \underline{b} \gamma_{-n+1} \cdots \cdots \\ \downarrow n \\ \cdots \cdots \gamma_{n-1} \underline{b} \underline{a} \gamma_{-n+1} \cdots \cdots \end{array}$$

(図 7.6.5)

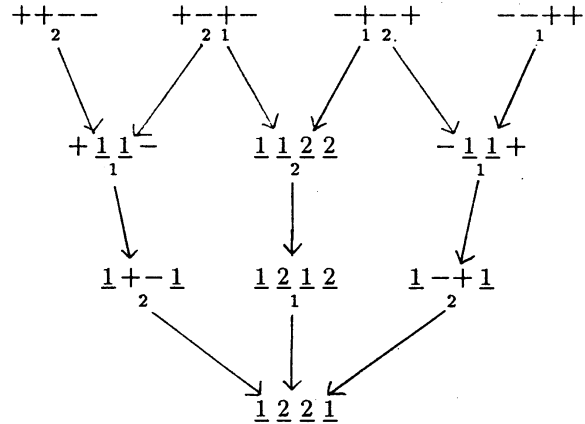
$$\begin{array}{c} \cdots \cdots \gamma_{n-1} \pm \mp \gamma_{-n+1} \cdots \cdots \\ \downarrow n \\ \cdots \cdots \gamma_{n-1} \underline{a} \underline{a} \gamma_{-n+1} \cdots \cdots \end{array}$$

例 7.7. $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})$ の M-O diagram (図 7.7.1) とその associated clan に
よる表示 (図 7.7.2).

(図 7.7.1)



(図 7.7.2)



REFERENCES

- [M] T. Matsuki, *The orbits of affine symmetric spaces nunder the action of minimal parabolic subgroups*, J. Math. Soc. Japan **31** (1979), 331-357.
- [MO] T. Matsuki and T. Oshima, *Embeddings of discrete series into principal series*, Progress in Math. **82** (1988), Birkhäuser, 147-175.
- [O] T. Oshima, *Asymptotic behavior of spherical functions on semisimple symmetric spaces*, Advanced Studies in Pure Math. **14** (1988), 561-610.
- [Y] A. Yamamoto, *Leading exponents of matrix coefficients of Harish-Chandra module and Matsuki-Oshima diagram*, 平成4年度 東京大学数理科学研究科修士論文