

[C] Riemann 空間の倉持境界

東大理 伊藤清三

§0. 序文. 本稿の目的は, Riemann 空間の Laplace-Beltrami 作用素に関する倉持境界を, 倉持氏 [2] による Riemann 面の理想境界の一般化として, 偏微分方程式論の方法で構成することである. その方法は, 筋道としては, 大津賀氏の方法 [1] に従っているが, [1] で使われている函数論の結果を, 高次元の場合にどのように置き換えるかが興味のある中心なので, 本稿では特に §§ 1—4 を詳しく述べる. §5 以後においても, [1] の方法と比べて, 技術上の点で *minor modification* を必要とする所もあるが, 本質的に [1] と同じ方法で議論が進められるので, §5 以後は理論構成の筋道として必要な定義と定理とだけ, 定理の証明は省略して, [1] の中の対応する定理の番号を記しておく.

偏微分方程式に関する結果については [3] を引用し, Martin 境界論とまったく平行な議論をできる所は [4] を引用する.

本稿で扱う Riemann 空間 R が, 別の Riemann 空間 M の部分領域であって, M の中で R の境界 (の一部) S が十分滑らかな場合に, S が本稿の意味の倉持境界 $\hat{S}$ に自然な方法で埋蔵されるかという問題は, 証明がまだ完全には整理していないので本稿では割愛したが, Martin 境界の場合 [4] と同じ方法 (または本稿定理 3.3 の証明と類似の方法) で肯定的に証明できると思われる.

§1 準備. R をコンパクトでない Riemann 空間 (次元 ≥ 2) とし,
 その計量テンソル $\|g_{ij}(x)\|$ は C^2 級とする: A を R における Laplace-
 Beltrami 作用素とする: $\|g^{ij}\| = \|g_{ij}\|^{-1}$, $g = \det \|g_{ij}\|$ とする. 又

$$\Delta u(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\sqrt{g(x)} g^{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x^j} \right].$$

R における volume element dx , hypersurface element dS_x 等
 はすべて $\|g_{ij}\|$ で定義される計量について考えるものとする.

Ω を R の部分領域とする. 函数 u が Ω で 区分的に滑らか とは, u が
 Ω で連続であって, Ω に含まれて互いに交わらない有限個の単純閉曲
 面 $S_1, \dots, S_n$ が存在して, u が $\Omega - S_1 - \dots - S_n$ において C^1 級
 なることであるとする. Ω で区分的に滑らかな函数 u, v に対して, 次の
 記号を定義する (それぞれの右辺が意味をもつかぎり):

$$|\nabla u(x)|^2 = g^{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x^i} \frac{\partial u(x)}{\partial x^j} \quad (\text{各 } x \in \Omega \text{ に対して}),$$

$$(u, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} g^{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x^i} \frac{\partial v(x)}{\partial x^j} dx,$$

$$\|u\|_{\Omega}^2 = (u, u)_{\Omega} = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \quad (\text{Dirichlet 積分}).$$

R の部分集合 E が regular であるとは, その境界 ∂E が C^3 級単純
 閉曲面であることとする.

今後, R の中の regular なコンパクト集合 K_0 と, 次の条件を満たす
 regular な領域の列 $\{D_n\}$ とを固定する: i) 各 $\overline{D_n}$ はコンパクト,
 ii) $K_0 \subset D_n \subset \overline{D_n} \subset D_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = R$. 更に

$$D'_n = D_n - K_0 \quad (n=1, 2, \dots), \quad R' = R - K_0.$$

とおく.

以下の 1° , 2° , 3° は [3] の結果に含まれたものである.

1° . Ω を R の中の *regular* な領域で, $\bar{\Omega}$ がコンパクトなものとする.
 Ω における楕円型境界値問題

$$(1.1) \quad Au = f, \quad u|_{\partial\Omega} = \varphi$$

の Green 函数 $G_\Omega(x, y)$ が唯一存在する; f が $\bar{\Omega}$ で Hölder 連続, φ が $\partial\Omega$ で連続ならば, (1.1) の解は

$$(1.2) \quad u(x) = - \int_{\Omega} G_\Omega(x, y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_\Omega(x, y)}{\partial n_y} \varphi(y) dS_y$$

で与えられる. また $G_\Omega(x, y)$ は

$$(1.3) \quad G_\Omega(x, y) = G_\Omega(y, x) \geq 0$$

を満たし, y を固定すれば x の函数とし

$$(1.4) \quad AG_\Omega = 0 \quad (x \in \Omega - \{y\}), \quad G_\Omega = 0 \quad (x \in \partial\Omega - \{y\})$$

を満たす.

2° . Ω は 1° と同じとし, $\partial\Omega = S_1 + S_2$ (S_1, S_2 は $\partial\Omega$ の閉部分集合で共通点を持たない) とする. Ω における楕円型境界値問題

$$(1.5) \quad Au = f, \quad u|_{S_1} = \varphi_1, \quad \partial u / \partial n|_{S_2} = \varphi_2$$

の核函数 $N_\Omega(x, y) \equiv N_{\Omega, S_1, S_2}(x, y)$ が唯一存在する; f, φ_2 がそれぞれ $\bar{\Omega}, S_2$ で Hölder 連続, φ_1 が S_1 で連続ならば, (1.5) の解は

$$(1.6) \quad u(x) = - \int_{\Omega} N_{\Omega}(x, y) f(y) dy - \int_{S_1} \frac{\partial N_{\Omega}(x, y)}{\partial n_y} \varphi_1(y) dS_y \\ + \int_{S_2} N_{\Omega}(x, y) \varphi_2(y) dS_y$$

と与えられる。また $N_{\Omega}(x, y)$ は

$$(1.7) \quad N_{\Omega}(x, y) = N_{\Omega}(y, x) \geq 0$$

を満足し、 y を固定すれば x の函数として

$$(1.8) \quad \begin{cases} AN_{\Omega} = 0 \quad (x \in \Omega - \{y\}), \\ N_{\Omega} = 0 \quad (x \in S_1 - \{y\}), \quad \partial N_{\Omega} / \partial n = 0 \quad (x \in S_2 - \{y\}) \end{cases}$$

を満足す。

3°. $\{D'_n\}$ と前述のとおりとし $G_n(x, y) = G_{D'_n}(x, y)$ とおくと

$$0 \leq G_n(x, y) \leq G_{n+1}(x, y) \quad (x, y \in \bar{D}'_n; x \neq y),$$

また、有限な $G(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x, y) \quad (x, y \in D' + \partial K_0; x \neq y)$ が存在して

$$(1.9) \quad G(x, y) = G(y, x) \geq 0;$$

$y \in R' + \partial K_0$ を固定すれば、 x の函数として

$$(1.10) \quad AG = 0 \quad (x \in R'), \quad G = 0 \quad (x \in \partial K_0).$$

古典的なラプラスアン Δ の場合によく知られてゐる次のような事實は、 A についても同様に成立する。

補題 1.1. Ω が regular な領域でコンパクトな閉包を持つものとし、 $u(x)$ は $\bar{\Omega}$ で連続、 Ω で区分的に滑らかで $\|u\|_{\Omega} < \infty$ 、 $v(x)$ は $\bar{\Omega}$ で C^1 級、 Ω で C^2 級であつて $\int_{\Omega} |Av(x)| dx < \infty$ を満足するものと、

$$(u, v)_{\Omega} + \int_{\Omega} u \cdot A v \, dx = \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} \, dS \quad (\text{Green の公式}).$$

補題 1.2. Ω, S_1, S_2 は前記 2° のとおりとする. $u(x)$ が $\overline{\Omega}$ で連続, Ω で $Au = 0$ を満たし, $\partial u / \partial n|_{S_2} = 0$ とし, $\Omega + S_2$ の或る点で最大値または最小値をとるとすると, u は $\overline{\Omega}$ で定数である.

補題 1.3. Ω が R' の中の regular な領域で, ある n_0 に対して $\Omega \supset R - D_{n_0}$ なるものとする. $n > n_0$ に対して $\Omega_n = \Omega \cap D_n$ とし, u_n は $\overline{\Omega}_n$ で連続であって Ω_n で $Au_n = 0$ を満たすものとする. このとき,

i) $\sup_{n > n_0} \sup_{x \in \partial \Omega} |u_n(x)| < \infty$, $\sup_{n > n_0} \|u_n\|_{\Omega_n} < \infty$ ならば, 適当な部分列 $\{u_{n(k)}\}$ と, $\overline{\Omega}$ で連続であって Ω で $Au = 0$ を満たす函数 u が存在して

$$(1.11) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n(k)}(x) = u(x) \quad (\overline{\Omega} \text{ で広義一様収束}),$$

$$(1.12) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\nabla \{u_{n(k)}(x) - u(x)\}| = 0 \quad (\Omega \text{ で広義一様収束});$$

ii) $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \partial \Omega} |u_m(x) - u_n(x)| = 0$, $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|u_m - u_n\|_{\Omega_n} = 0$ ならば, i) における部分列 $\{u_{n(k)}\}$ をもとの函数列 $\{u_n\}$ でおきかえることができる.

iii) $\partial \Omega \supset \partial K_0$ であって, $u_n|_{\partial K_0}$ が n に無関係で ∂K_0 上で C^2 級の函数ならば, (1.12) は $\Omega + \partial K_0$ で広義一様収束として成立する.

今後一般に, 領域 Ω において函数 u が $Au = 0$ を満たすとき, u は Ω において調和であるという. また u が Ω において優調和ということも, 普通の Δ の場合と同様に定義する.

§2. 核函数 $N(x, y)$. $\{D'_n\}$, $\{G_n(x, y)\}$, $G(x, y)$ を §1 に述べたとおりとし, $N_n(x, y) = N_{D'_n, \partial K_0, \partial D_n}(x, y)$ (§1 の 2° 参照) とおく. 次の二つの補題は Green の公式を使って容易に示される:

補題 2.1. $x, y \in \overline{D'_n}$; $x \neq y$ ならば

$$(2.1) \quad N_n(x, y) - G(x, y) = - \int_{\partial D_n} \frac{\partial G(x, z)}{\partial n_z} N_n(z, y) dS_z.$$

補題 2.2. $m > n$, $x, y \in \overline{D'_n}$; $x \neq y$ ならば

$$(2.2) \quad N_m(x, y) - G_n(x, y) = - \int_{\partial D_n} N_m(x, z) \frac{\partial G_n(z, y)}{\partial n_z} dS_z.$$

次に

$$(2.3) \quad h_n(x, y) = - \int_{\partial D_n} \frac{\partial G(x, z)}{\partial n_z} N_n(z, y) dS_z \quad (x, y \in \overline{D'_n})$$

とおくと, h_n は y を固定するとき $x \in \overline{D'_n}$ で調和 (y を含めて) であり,

(2.1) により

$$(2.4) \quad h_n(x, y) = N_n(x, y) - G(x, y);$$

従って

$$(2.5) \quad h_n(x, y) = h_n(y, x).$$

定理 2.1. 任意の $y \in R'$ を固定するとき, $N_n(x, y)$ は或る函数 $N(x, y)$ に $x \in (R' \cup \partial K_0) - \{y\}$ について広義一様に収束し, $\|N_n(\cdot, y) - N(\cdot, y)\|_{D'_n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となる; 函数 $N(\cdot, y)$ は $G(\cdot, y)$ + 調和函数 (x について) の形に表わされ, $x \in \partial K_0$ ならば $N(x, y) = 0$ であり, y の任意の近傍 Ω に対し $\|N(\cdot, y)\|_{R' \cup \Omega} < \infty$ となる.

証明. 一点 $y_0 \in R'$ と $y_0 \in D_{n_0}$ なる n_0 を固定し, $\gamma_n = h_n(y_0, y_0)$ ($n > n_0$) とおく. 以後 G, N_n, h_n を x のみの函数として扱う. $m > n > n_0$ ならば

$$\|N_m\|_{D_m-D_n}^2 = \int_{\partial D_m} N_m \frac{\partial N_m}{\partial n} dS - \int_{\partial D_n} N_m \frac{\partial N_m}{\partial n} dS = - \int_{\partial D_n} N_m \frac{\partial N_m}{\partial n} dS$$

だから

$$(2.6) \quad \int_{\partial D_m} N_m \frac{\partial N_m}{\partial n} dS \leq 0.$$

また, (1.6) において $u = h_n - h_m$, $N_n = N_n$ とし, (1.7) を使えば

$$(2.7) \quad h_n(y_0, y_0) - h_m(y_0, y_0) = \int_{\partial D_n} N_n(z, y_0) \frac{\partial \{h_n(z, y_0) - h_m(z, y_0)\}}{\partial n_z} dS_z.$$

一方, (2.4) により $N_n - N_m = h_n - h_m$ であり, これは D'_n で調和であり,

$$N_n|_{\partial K_0} = N_m|_{\partial K_0} = 0, \quad \partial N_n / \partial n|_{\partial D_n} = 0$$

だから,

$$\begin{aligned} \|N_n - N_m\|_{D'_n}^2 &= \int_{\partial D_n} (N_n - N_m) \frac{\partial (N_n - N_m)}{\partial n} dS \\ &= \int_{\partial D_n} N_n \frac{\partial (h_n - h_m)}{\partial n} dS + \int_{\partial D_n} N_m \frac{\partial N_m}{\partial n} dS \\ &\leq \gamma_n - \gamma_m \quad ((2.6), (2.7) \text{ により}). \end{aligned}$$

だから $\{\gamma_n\}$ は単調減少数列である. 一方 ∂D_{n_0} の上で $h_n = N_n - G \geq -\max_{\partial D_{n_0}} G$ だから, 最大値原理 (補題 1.2) によって $\gamma_n \geq -\max_{\partial D_{n_0}} G > -\infty$ となり, 有限な $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$ が存在する. 従って

$$(2.8) \quad \lim_{m > n \rightarrow \infty} \|N_n - N_m\|_{D'_n} = 0,$$

$$(2.9) \quad \lim_{m > n \rightarrow \infty} \|h_n - h_m\|_{D'_n} = 0.$$

(2.4) によりすべての n に対して $h_n|_{\partial K_0} = 0$ だから, (2.9) と補題 1.3 により, $R' + \partial K_0$ において連続で R' において調和な函数 $h = h(\cdot, y_0)$ が存在して

$$(2.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x, y_0) = h(x, y_0) \quad (R' + \partial K_0 \text{ で広義一様}),$$

$$(2.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\nabla \{h_n(x, y_0) - h(x, y_0)\}| = 0 \quad (R' + \partial K_0 \text{ で広義一様})$$

となり, $h(x, y_0)$ は $R' + \partial K_0$ で C^1 級, かつ $x \in \partial K_0$ ならば $h(x, y_0) = 0$ となる. ここで

$$N(x, y_0) = G(x, y_0) + h(x, y_0)$$

と定義すると,

$$(2.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} N_n(x, y_0) = N(x, y_0) \quad (R' + \partial K_0 - \{y_0\} \text{ で広義一様}),$$

$$(2.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\nabla \{N_n(x, y_0) - N(x, y_0)\}| = 0 \quad (R' + \partial K_0 - \{y_0\} \text{ で広義一様}),$$

$$(2.14) \quad \begin{cases} N(x, y_0) \text{ は } R' + \partial K_0 \text{ で } C^1 \text{ 級,} \\ x \in \partial K_0 \text{ ならば } N(x, y_0) = 0. \end{cases}$$

そこで

$$(2.15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|N_n(\cdot, y_0) - N(\cdot, y_0)\|_{D'_n} = 0$$

および

$$(2.16) \quad y_0 \text{ の任意の近傍 } \Omega \text{ に対して } \|N(\cdot, y_0)\|_{R' - \Omega} < \infty.$$

となることを示そう. (2.11) により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して適当な n_ε

をとれば, $m > n > n_\varepsilon$ ならば $\|N_n - N_m\|_{D'_n} < \varepsilon$ となる. $m \rightarrow \infty$

とすると (2.13) と Fatou の補題によって $\|N_n - N\|_{D'_n} < \varepsilon$ となる. こ

の結果は (2.15) を意味する. (2.16) を示すには, $\partial\Omega$ が十分滑らか

であって $y_0 \in \Omega \subset D_{n_0}$ と仮定してよい. N_n の定義により

$$\partial N_n / \partial n \big|_{\partial D_n} = 0, \quad N_n \big|_{\partial K_0} = 0$$

だから, 任意の $n > n_0$ に対して

$$\|N_n\|_{R'-\Omega}^2 = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N_n}{\partial n} N_n dS;$$

$n \rightarrow \infty$ とすると, (2.13) と Fatou の補題によって

$$\|N\|_{R'-\Omega}^2 \leq \int_{\partial\Omega} \left(-\frac{\partial N}{\partial n}\right) N dS$$

となり, (2.16) が得られる.

以上の議論において y_0 は任意だから, 定理 2.1 が証明された.

系 2.1.1. $N(x, y)$ は $(R' + \partial K_0) \times (R' + \partial K_0) - \{(z, z); z \in \partial K_0\}$ において, ∞ の値を含めた意味で連続であり, $N(x, y) = N(y, x)$.

(補題 2.2 において $n \rightarrow \infty$ とした式を使って証明する.)

系 2.1.2. 任意の $y \in R'$ と, $K_0 \subset \Omega \ni y$ であってコンパクトな閉包 $\bar{\Omega}$ をもつ任意の領域 Ω に対して

$$(2.17) \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N(x, y)}{\partial n_x} dS_x = \int_{\partial K_0} \frac{\partial N(x, y)}{\partial n_x} dS_x = 1.$$

証明: $\bar{\Omega} \subset D_{n_0}$ なる n_0 をとり, $n > n_0$ ならば $N_n(\cdot, y)$, $N(\cdot, y)$ が $\Omega - K_0$ で調和なことにより

$$(2.18) \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N_n(x, y)}{\partial n_x} dS_x = \int_{\partial K_0} \frac{\partial N_n(x, y)}{\partial n_x} dS_x,$$

$$(2.19) \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N(x, y)}{\partial n_x} dS_x = \int_{\partial K_0} \frac{\partial N(x, y)}{\partial n_x} dS_x.$$

一方, (1.6) で $u \equiv 1$, $N_\Omega = N_n$ とすると

$$\int_{\partial K_0} \frac{\partial N_n(x, y)}{\partial n_x} dS_x = 1$$

だから, (2.18) により

$$\int_{\partial \Omega} \frac{\partial N_n(x, y)}{\partial n_x} dS_x = 1.$$

$n \rightarrow \infty$ とすると (2.13) により

$$(2.20) \quad \int_{\partial \Omega} \frac{\partial N(x, y)}{\partial n_x} dS_x = 1.$$

(2.19), (2.20) により (2.17) を得る.

定理 2.2. $N(x, y)$ は K_0 だけに関係し, $\{D_n\}$ のとり方には関係しない.

証明. $\{D_n\}$ と同じ性質をもつ他の領域の列 $\{\tilde{D}_n\}$ をとり, それに対応する $\{\tilde{N}_n(x, y)\}$, $\{\tilde{h}_n(x, y)\}$, $\tilde{N}(x, y)$ を定義する. $y_0 \in R'$ を固定し,

$$\tilde{Y}_n = \tilde{h}_n(y_0, y_0), \quad \tilde{N}_n = \tilde{N}_n(\cdot, y_0), \quad \tilde{N} = \tilde{N}(\cdot, y_0)$$

とおくと, 定理 2.1 の証明と同様に

$$(2.21) \quad Y = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n > -\infty, \quad \tilde{Y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{Y}_n > -\infty$$

が存在する. 各 ν に対して n_ν, m_ν を

$$\nu < n_\nu < m_\nu, \quad \bar{D}_\nu \subset \tilde{D}_{n_\nu} \subset \overline{\tilde{D}_{n_\nu}} \subset D_{m_\nu}$$

のようにとると, 定理 2.1 の証明中に示したように

$$(2.22) \quad \begin{cases} Y_\nu - \tilde{Y}_{n_\nu} \geq \|N_\nu - \tilde{N}_{n_\nu}\|_{D'_\nu}^2 \geq 0 \\ Y_{m_\nu} - \tilde{Y}_{m_\nu} \geq \|\tilde{N}_{n_\nu} - N_{m_\nu}\|_{D'_{m_\nu}}^2 \geq 0; \end{cases}$$

従って

$$(2.23) \quad \gamma_\nu \geq \tilde{\gamma}_{n_\nu} \geq \gamma_{m_\nu}.$$

$\nu \rightarrow \infty$ のとき $n_\nu \rightarrow \infty$, $m_\nu \rightarrow \infty$ となるから, (2.23), (2.21) によって $\gamma = \tilde{\gamma}$ となる. 従って (2.22) と Fatou の補題によって $\|N - \tilde{N}\|_{R'}^2 = 0$ となり, $N|_{\partial K_0} = \tilde{N}|_{\partial K_0} = 0$ なることと合わせて, $R' + \partial K_0$ において $N \equiv \tilde{N}$ となる. (証明終り)

今後 $N(x, y)$ をポテンシャルの核とする. R' 上の Borel 測度 μ に対して, ポテンシャル $N\mu(x)$ を

$$(2.24) \quad N\mu(x) = \int_{R'} N(x, y) d\mu(y)$$

で定義する. ただし μ は, 任意のコンパクト集合 $K \subset R$ に対して $\mu(K \cap R') < \infty$, かつ $N\mu(x) \neq \infty$ なるもののみを考える. μ の台を $S[\mu]$ と書く.

あとで使う補題を述べておく.

補題 2.3. $N\mu(x)$ は R' において優調和である.

補題 2.4 (Riesz 分解). Ω を R' の任意の部分領域とすると, Ω で優調和な任意の函数 $v(x)$ に対して, Ω 上の Borel 測度 μ と調和函数 h とが一意的に定まって $v = N\mu + h$ となる.

補題 2.3 は, (優)調和函数の単調増加列の極限函数は, $\equiv \infty$ でないかぎり優調和であることを使えばよい. 補題 2.4 は, 優調和函数が局所可積分であることを使って, L. Schwartz の超函数論の方法によって, 証明することができる.

§3. 倉持境界の定義.

補題 3.1. K を $R' + \partial K_0$ のコンパクト部分集合, F を R の閉部分集合で $R' - K$ に含まれたものとするとき,

$$(3.1) \quad \sup_{x \in K, y \in F} |N(x, y)| < \infty, \quad \sup_{x \in K, y \in F} |\nabla_x N(x, y)| < \infty.$$

証明. Ω を regular な領域で $K \cup K_0 \subset \Omega \subset \bar{\Omega} \subset R' - F$ かつ $\bar{\Omega}$ がコンパクトなものとし, $h(x)$ を $\Omega' = \Omega - K_0$ で調和であって $h|_{\partial\Omega} = 1$, $h|_{\partial K_0} = 0$ なるものとするとき, $\partial h / \partial n|_{\partial\Omega} > 0$, 従って $\min_{\partial\Omega} \partial h / \partial n > 0$ となる. 任意の一点 $y \in F$ を固定して, $N = N(x, y)$ を x の函数として扱う. N は Ω' において調和だから, Green の公式に

$$\text{よって} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial h}{\partial n} N - h \frac{\partial N}{\partial n} \right) dS = 0. \text{ 故に } h|_{\partial\Omega} = 1, N \geq 0 \text{ なる}$$

ことと系 2.1.2 を使って

$$\min_{\partial\Omega} \frac{\partial h}{\partial n} \cdot \int_{\partial\Omega} N dS \leq \int_{\partial\Omega} \frac{\partial h}{\partial n} N dS = \int_{\partial\Omega} h \frac{\partial N}{\partial n} dS = 1.$$

だから, y に関する定数 M_Ω が存在して $\int_{\partial\Omega} N(z, y) dS_z \leq M_\Omega$ となる.

一方, (1.2) で $u = N(\cdot, y)$ とすると

$$(3.2) \quad N(x, y) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{\Omega'}(x, y)}{\partial n_z} N(z, y) dS_z.$$

K と $\partial\Omega$ とは互いに交わらないコンパクト集合だから,

$$\sup_{x \in K, z \in \partial\Omega} \left\{ \left| \frac{\partial G_{\Omega'}(x, z)}{\partial n_z} \right| + \left| \nabla_x \frac{\partial G_{\Omega'}(x, y)}{\partial n_z} \right| \right\} < \infty.$$

このことと (3.2) とにより (3.1) を得る. (証明終り)

R の一点コンパクト化の位相を与える距離を p_0 とする。また、任意の $x \in R'$, $y \in K_0$ に対して $N(x, y) = 0$ と定義しておいて、任意の $y, y' \in R$ に対して

$$(3.3) \quad p_1(y, y') = \int_{D_1} \frac{|N(x, y) - N(x, y')|}{1 + |N(x, y) - N(x, y')|} dx$$

と定義する。このとき、補題 3.1 を使って 次の二つの補題は Martin 境界論の場合 (例えば [4]) と同様に証明される:

補題 3.2. p_1 を $R' \times R'$ に制限したものは距離の公理を満たし、 R' に本来の位相と同じ位相を与える。

補題 3.3. R' は距離 p_1 について全有界である。

そこで

$$p(y, y') = p_0(y, y') + p_1(y, y') \quad (y, y' \in R)$$

と定義すると、 p は R において距離の公理を満たし、本来の位相と同じ位相を与え、 R は p について全有界である。だから R の p に関する完備化を $\hat{R}$ とし、 $\hat{S} = \hat{R} - R$ とおくと、次の二つの定理およびその系は Martin 境界論の場合と同様に証明できる; 今後 p の $\hat{R} \times \hat{R}$ への拡張も同じ文字 p で表わす。

定理 3.1. 距離 p に関して $\hat{R}$ はコンパクト、 S はその中で内点を持たない閉集合であり、 p から導かれる R の相対位相は、 R の本来の位相に一致する。

定理 3.2. $N(x, y)$ は $(R' + \partial K_0) \times \hat{R} - \{(z, z); z \in R' + \partial K_0\}$ の上の連続函数に拡張せられ、任意の $y \in \hat{R}$ を固定すると $N(x, y)$ は x に

ついで $R' - \{y\}$ で調和である。

系 3.2.1. K が R' のコンパクト部分集合, F が $\hat{R}$ の開部分集合で,
 $K \cap F = \emptyset$ ならば, $N(x, y)$ は $K \times F$ の上で ρ に関して一様連続である。

系 3.2.2. $\xi, \eta \in \hat{S}$ であって, 任意の $x \in R'$ に対して $N(x, \xi) = N(x, \eta)$ ならば, $\xi = \eta$ である。

ここで次の定理を証明する:

定理 3.3. $\hat{R}$ は $K_0, \{D_n\}, \rho_0$ のとりかたに無関係である。詳しく述べるに; ——— $K_0, \tilde{K}_0$ を R の中の regular なコンパクト集合とし, それぞれに対して $\{D_n\}, \{\tilde{D}_n\}$ を §1 で述べたようにとり, $N(x, y), \tilde{N}(x, y)$ を前述のように定義する。また $\rho_0, \tilde{\rho}_0$ を R の一点コンパクト化の位相を与えた距離とし, $\rho = \rho_0 + \rho_1, \tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}_1$ に関する R の完備化をそれぞれ $\hat{R}, \tilde{\hat{R}}$ とすると, $\hat{R}$ と $\tilde{\hat{R}}$ は同相であって, その同相写像は R においては恒等写像である。

証明. まず, $\bar{D}_1 \subset (\tilde{K}_0)^\circ$ ($^\circ$ は内部を表わす) として証明すればよいことは明らか。また定理 2.2 により, $n \geq 2$ ならば $D_n = \tilde{D}_n$ と仮定してよい (ρ_1 が D_1 には関係してゐる)。このとき R において, 距離 ρ による一様位相と $\tilde{\rho}$ による一様位相が同値なことを証明すれば, それらによる完備化が一様空間として同じになるから, この定理が証明されたことになる。 ρ と $\tilde{\rho}$ による R の一様位相の同値性は, R のコンパクト部分集合 (例えば $\bar{D}_3$) の上では明らかであり, ρ_0 と $\tilde{\rho}_0$ による R の一様位相が同値なことも明らかだから, $R - D_2$ において次の i), ii) を示せばよい:

i) 任意の $\tilde{\varepsilon} > 0$ に対して, 適当な $\varepsilon > 0$ をとれば, $p(y, y') < \varepsilon$ なる任意の $y, y' \in R - D_2$ に対して $\tilde{p}_1(y, y') < \tilde{\varepsilon}$ となる;

ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 適当な $\tilde{\varepsilon} > 0$ をとれば, $\tilde{p}(y, y') < \varepsilon$ なる任意の $y, y' \in R - D_2$ に対して $p_1(y, y') < \tilde{\varepsilon}$ となる.

i) の証明. $n \geq 2$ ならば, 補題 2.1 と同様に, 任意の $x, y \in D_n - \tilde{K}_0$ に対して次の式が示される:

$$N_n(x, y) - \tilde{N}_n(x, y) = \int_{\partial \tilde{K}_0} \frac{\partial \tilde{N}_n(x, z)}{\partial n_z} N_n(z, y) dS_z$$

($\partial/\partial n$ は $\tilde{K}_0$ から見て外向きの法線微分). 故に (2.11), (2.12) (および $\tilde{N}_n$ に対する同様の式) により, 任意の $x, y \in R - \tilde{K}_0$ に対して

$$N(x, y) - \tilde{N}(x, y) = \int_{\partial \tilde{K}_0} \frac{\partial \tilde{N}(x, z)}{\partial n_z} N(z, y) dS_z.$$

従って, 特に $x \in \partial \tilde{D}_1$ および $y, y' \in R - D_2$ に対して

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \tilde{N}(x, y) - \tilde{N}(x, y') &= N(x, y) - N(x, y') \\ &- \int_{\partial \tilde{K}_0} \frac{\partial N(x, z)}{\partial n_z} \{N(z, y) - N(z, y')\} dS_z. \end{aligned}$$

ここで $\partial N(x, z)/\partial n_z$ は $\partial \tilde{D}_1 \times \partial \tilde{K}_0$ で有界であり, また $N(x, y)$ は $(\partial \tilde{D}_1 + \partial \tilde{K}_0) \times (R - D_2)$ で距離 ρ に関して一様連続 (系 3.2.1) であるから, 任意の $\tilde{\varepsilon} > 0$ に対して適当な $\varepsilon > 0$ をとれば, $y, y' \in R - D_2$, $p(y, y') < \varepsilon$ なるかぎり $\sup_{x \in \partial \tilde{D}_1} |\tilde{N}(x, y) - \tilde{N}(x, y')| \leq \tilde{\varepsilon} / \int_{D_1} dx$ となる. 一方, $y \in R - D_2$ を固定すれば $\tilde{N}(x, y)$ は x について $\tilde{D}_1'$ において調和であり, $x \in \partial \tilde{K}_0$ ならば $\tilde{N}(x, y) = 0$ であるから, 補題 1.2

(において S_2 が空である場合) により, $P(y, y') < \varepsilon$ なる $y, y' \in R - D_2$ に対しては $\sup_{x \in \tilde{D}_1'} |\tilde{N}(x, y) - \tilde{N}(x, y')| \leq \tilde{\varepsilon} / \int_{\tilde{D}_1'} dx$ となる. 従って $\tilde{P}_1$ の定義により, $\tilde{P}_1(y, y') < \tilde{\varepsilon}$ となる.

ii) の証明. 上の (3.4) と同様に, $x \in \partial \tilde{D}_1$ かつ $y, y' \in R - D_2$ に対して

$$N(x, y) - N(x, y') = \tilde{N}(x, y) - \tilde{N}(x, y') + \int_{\partial \tilde{K}_0} N(x, z) \left\{ \frac{\partial \tilde{N}(z, y)}{\partial n_2} - \frac{\partial \tilde{N}(z, y')}{\partial n_2} \right\} dS_z.$$

ここで $N(x, z)$ は $\partial \tilde{D}_1 \times \partial \tilde{K}_0$ で有界であり, $\tilde{N}(x, y)$, $\partial \tilde{N}(z, y) / \partial n_2$ は $(\partial \tilde{D}_1 + \partial \tilde{K}_0) \times (R - D_2)$ において距離 $\tilde{P}$ に関して一様連続であるから, i) の証明と同様に, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して適当な $\tilde{\varepsilon} > 0$ をとれば, $y, y' \in R - D_2$, $P(y, y') < \varepsilon$ なるかぎり $\sup_{x \in \partial \tilde{D}_1} |N(x, y) - N(x, y')| < \varepsilon / \int_{D_1'} dx$, 従って $\sup_{x \in \partial \tilde{D}_1} |N(x, y) - N(x, y')| < \varepsilon / \int_{D_1'} dx$ となる. 従って P_1 の定義により $P_1(y, y') < \varepsilon$ となる. (証明終り)

定義. 上のようにして構成された $\hat{S} = \hat{R} - R$ を Laplace-Beltrami 作用素 A に対する R の 食持境界 という.

(2.24) で定義されたポテンシャル $N\mu(x)$ を, μ が $R' + \hat{S}$ の上の Borel 測度であって

$$(3.5) \quad N\mu(x) = \int_{R' + \hat{S}} N(x, y) d\mu(y)$$

が $\neq \infty$ である場合に, 拡張しておく.

§4. Dirichlet 原理とその関連事項. $K \in R'$ の中の regular なコンパクト集合, $\varphi \in \partial K$ 上の連続函数とすると,

$$\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi) = \left\{ u; \begin{array}{l} R-K_0 - K^0 \text{ で連続, } R'-K \text{ で正分的に滑} \\ \text{らかであって } \|u\|_{R'-K} < \infty, u|_{\partial K_0} = 0, u|_{\partial K} = \varphi \end{array} \right\}$$

とおく. 例えば $\varphi \in C^2(\partial K)$ ならば $\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi) \neq \emptyset$ である.

定理 4.1. $\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi) \neq \emptyset$ ならば, $\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)$ の中で最小の Dirichlet 積分をもつ $u(x)$ がただ一つ存在し, その u は $R'-K$ で調和であって

$$(4.1) \quad \text{任意の } v \in \mathcal{D}_{R'-K}(\varphi) \text{ に対して } (v-u, u)_{R'-K} = 0.$$

証明. まず, 最小の Dirichlet 積分をもつ u が存在するとして, それが (4.1) を満たすことを証明する. 任意の $v \in \mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\|u\|_{R'-K}^2 \leq \|u \pm \varepsilon(v-u)\|_{R'-K}^2$ だから

$$0 \leq \pm 2\varepsilon(u, v-u)_{R'-K} + \varepsilon^2\|v-u\|_{R'-K}^2.$$

この両辺を ε で割って $\varepsilon \downarrow 0$ とすると $\pm(u, v-u)_{R'-K} \geq 0$; これより (4.1) を得る.

次にこのような u の一意性を示す. u, v がともに最小の Dirichlet 積分をもつとすると, (4.1) により

$$(u-v, u)_{R'-K} = 0, \quad (u-v, v)_{R'-K} = 0$$

となるから, この二つの等式を辺々引くと $(u-v, u-v)_{R'-K} = 0$ となる. このことと $u|_{\partial K_0} = v|_{\partial K_0} = 0$ とから $u \equiv v$ となる.

最後に, どのような u の存在を示す. $K \subset D'_{n_0}$ なる n_0 を一つ定め, 任意の $v \in \mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)$ とし. 任意の $n > n_0$ に対して, $D'_n - K$ において調和な函数 u_n を, $u_n|_{\partial K_0} = 0$, $u_n|_{\partial K} = \varphi$, $\partial u_n / \partial \nu|_{\partial D_n} = 0$ と

な? ものが存在する. このとき Green の公式により $(v-u_n, u_n)_{D'_n-K} = 0$ となるから

$$\|u_n\|_{D'_n-K}^2 = (v, u_n)_{D'_n-K} \leq \|v\|_{D'_n-K} \|u_n\|_{D'_n-K};$$

よって $\|u_n\|_{D'_n-K} \leq \|v\|_{D'_n-K} \leq \|v\|_{R'-K} < \infty$. 従って補題 1.3 ($\Omega = R'-K$ とする) により $\{u_n; n > n_0\}$ の部分列 $\{u_{n(k)}\}$ と, $R'-K$ で調和な函数 $u(x)$ が存在して

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n(k)}(x) = u(x) & (R-K_0^\circ - K^\circ \text{ で広義一様収束}) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |\nabla \{u_{n(k)}(x) - u(x)\}| = 0 & (R-K_0^\circ \text{ で広義一様収束}). \end{cases}$$

だから $u|_{\partial K_0} = 0$, $u|_{\partial K} = \varphi$ となり, また Fatou の補題により

$$\|u\|_{R'-K}^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_{n(k)}\|_{D'_{n(k)}-K}^2 \leq \|v\|_{R'-K}^2.$$

だから u は $\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)$ の中で Dirichlet 積分最小のものである.

(証明終り)

上のような函数 u を今後 φ_K で表わす. このとき;

系 4.1.1. i) 任意の $v \in \mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)$ に対して $(v - \varphi_K, \varphi_K)_{R'-K} = 0$.

ii) $\min\{\min_{\partial K} \varphi, 0\} \leq \varphi_K(x) \leq \max\{\max_{\partial K} \varphi, 0\}$ ($x \in R'-K^\circ$).

iii) $\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi)$, $\mathcal{D}_{R'-K}(\psi) \neq \emptyset$ ならば $\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi + \psi)$, $\mathcal{D}_{R'-K}(c\varphi) \neq \emptyset$ (c は任意の定数) であって, $(\varphi + \psi)_K = \varphi_K + \psi_K$, $(c\varphi)_K = c\varphi_K$.

i) は (4.1) の書きかえである. ii), iii) は定理 4.1 の $\varphi_K = u$ の構成と一意性からわかる. — ii) の証明には補題 1.2 を使う.

系 4.1.2. K_1, K_2 は R' の中の regular なコンパクト集合であって, $K_1 \subset K_2^\circ$ とし, φ は ∂K_1 の上で連続であって $\mathcal{D}_{R'-K}(\varphi) \neq \emptyset$ と

すると, $\mathcal{D}_{R'-K_2}(\varphi_{K_1}) \neq \emptyset$ であって, $R'-K_2^\circ$ の上で $(\varphi_{K_1})_{K_2} = \varphi_{K_1}$ となる。

証明は [1] の定理 2 とまったく同じ方法でできる。

さて, $C_0(\partial K) = \{ \varphi; \varphi \in C(\partial K), \mathcal{D}_{R'-K}(\varphi) \neq \emptyset \}$ とし, φ_K を任意の $\varphi \in C(\partial K)$ にまで拡張する。 $C_0(\partial K)$ は $C(\partial K)$ の線型部分空間であり, 任意の $x \in R'-K^\circ$ を固定するとき, $\varphi_K(x)$ は $C_0(\partial K)$ の上の正值線型汎関数で $|\varphi_K(x)| \leq \max_{\partial K} |\varphi|$ を満たす (系 4.1.1)。一方, $C_0(\partial K)$ は $C^2(\partial K)$ を含むから $C(\partial K)$ で稠密である。だから $\varphi_K(x)$ は $C(\partial K)$ の上の有界正值線型汎関数に一意的に拡張せられ, 従って ∂K の上の $\mu_K^x(\partial K) \leq 1$ なる Borel 測度 μ_K^x が存在して

$$(4.2) \quad \varphi_K(x) = \int_{\partial K} \varphi(y) d\mu_K^x(y) \quad \varphi \in C(\partial K).$$

さらに, ∂K の上の任意の Borel 可測函数 φ に対して

$$(4.3) \quad \varphi_K^\pm(x) = \int_{\partial K} \varphi^\pm(y) d\mu_K^x(y) \quad \left(\begin{array}{l} \varphi^+ = \max\{\varphi, 0\} \\ \varphi^- = \max\{-\varphi, 0\} \end{array} \right)$$

と定義し, $\varphi_K^+(x)$, $\varphi_K^-(x)$ の少なくとも一方が各点 $x \in R'-K^\circ$ で有限なとき次の定義をする:

$$(4.4) \quad \varphi_K(x) = \varphi_K^+(x) - \varphi_K^-(x).$$

このとき, 系 4.1.2 の拡張として,

定理 4.2. K_1, K_2 を R' の中の regular なコンパクト集合であって $K_1 \subset K_2^\circ$ とし, φ を ∂K_1 の上の下半連続函数とすると, $R'-K_2^\circ$ において $(\varphi_{K_1})_{K_2} = \varphi_{K_1}$ となる。

証明. 至 4.2.1 と上記の φ_K の拡張により, 任意の $\varphi \in C(\partial K_1)$ に対してこの定理が成立し, 従って $C(\partial K_1)$ に属する函数の半調増加列の極限としての下半連続函数に対して成立する.

次に, 前述の核函数 $N(x, y)$ と, R' の中の regular なコンパクト集合 K に対して, $N_K(x, y)$ を次のように定義する: $y \in R - K_0^\circ + \hat{S}$ を任意に固定すると, $\varphi(x) = N(x, y)$ は ∂K の上で下半連続だから $\varphi_K(x)$ が $R - K_0^\circ - K^\circ$ で定義される; これを $N_K(x, y)$ と置く. このとき,

定理 4.3. R' の中の任意の regular なコンパクト集合 K と, $R' + \hat{S}$ の上の任意の Borel 測度 μ に対して, $R' - K$ の上で $(N\mu)_K \leq N\mu$ が成立する; 特に $S[\mu] \subset K^\circ$ ならば $\leq$ は $=$ になる.

証明 は [1] の定理 5 と同じ方法による; $y \in \hat{S}$ に対する $N_K \leq N$ の証明は, $y \in R'$ の場合の極限を考えればよい.

定理 4.4. R' の中の任意の regular なコンパクト集合 K と, ∂K の上の任意の下半連続函数 φ に対して, $R' - K$ の各連結成分において φ_K が恒等的に ∞ ではないかぎり, φ_K はその成分において調和である.

証明. φ が ∂K 上の連続函数で $\mathcal{D}_{R-K}(\varphi) \neq \emptyset$ の時は, φ_K の調和なことは定理 4.1 で証明されている. だから, φ_K の拡張の定義と, 調和函数の一致収束列の極限, 半調増加列の極限で恒等的に ∞ ではないものが, いずれも調和函数になることからして, この定理の成立することかわかる.

§5. FH 函数と FSH 函数. 前記の定義においては, $v(x)$ は R' 上で正の値をとる下半連続函数で, 恒等的に ∞ ではないものとする. また, そのような v と R' の中の regular なコンパクト集合 K に対して, $\varphi = v|_{\partial K}$ から §4 に述べたように定義した φ_K と v_K と書く.

定義. i) R' の中の任意の regular なコンパクト集合 K に対して $R' - K$ 上で $v_K(x) \leq v(x)$ となるとき, $v(x)$ を FSH 函数 または full superharmonic function (全優調和函数) という; さらに $v(x)$ が R' で調和であるとき, FH 函数 または full harmonic function (全調和函数) という.

ii) $v(x)$ が FSH 函数であり, $(K_m)^\circ \supset K_{m+1}$ ($m \geq 1$), $\lim_{m \rightarrow \infty} K_m = K_0$ を満たす任意の regular なコンパクト集合の列 $\{K_m\}$ に対して R' 上で $\lim_{m \rightarrow \infty} v_{\partial K_m}(x) = 0$ となるとき, $v(x)$ を FSH₀ 函数 という; さらに $v(x)$ が R' で調和であるとき, FH₀ 函数 という.

注意. 任意の FH₀ 函数は ∂K_0 上で境界値 0 をとる (果 5.1.2; 後述) が, FSH₀ 函数は必ずしもそうでない. 反例: $E = \{z_1, z_2, \dots\}$ を ∂K_0 の中の高々可算無限の集合とする (∂K_0 において稠密になり得る). 各 $z_n \in E$ に対して, それに収束する点列 $\{z_{n\nu}; \nu = 1, 2, \dots\}$ を R' の中にとる. $u(x) = \sum_{n,\nu} 2^{-(n+\nu)} N(x, z_{n\nu})$ は FSH₀ 函数 (下記補題 5.3 参照) であるが, 任意の $z_n \in E$ に対して $\lim_{x \rightarrow z_n} u(x) = \infty$ となる.

補題 5.1. FSH 函数は優調和である.

証明. v が FSH 函数ならば, コンパクトな閉区 $\bar{\Omega} \subset R'$ をとり任

意の regular な領域 Ω に対して, Ω 上で $v_{\partial\Omega} \leq v$ となる. このことから v の優調和なことがわかる.

補題 5.2. $\{v_n\}$ が FSH 函数の列で, R' 上で $v(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x)$ が存在して下半連続かつ $\neq \infty$ ならば, v も FSH 函数である.

証明. 任意の regular なコンパクト集合 K と任意の $x \in R' - K$ に対して, Fatou の補題によつて

$$v_K(x) = \int_{\partial K} v(y) d\mu_K^x(y) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial K} v_n(y) d\mu_K^x(y) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = v(x)$$

となるからである.

補題 5.3. $R' + S$ 上の任意の Borel 測度 μ に対して, ポテンシャル $N\mu$ は FSH₀ 函数である.

証明 は [1] の定理 6 と同じ.

補題 5.4. $\{v_n\}$ が FSH₀ 函数の列で, R' 上で $v(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x)$ が存在して下半連続, かつ R' 上の FSH₀ 函数 $u(x)$ で $v(x) \leq u(x)$ なるものが存在するならば, v も FSH₀ 函数である.

証明 は, 補題 5.2 と $v(x) \leq u(x)$ となる容易にできる.

R' 上の FSH 函数 v と, R' の中々 regular なコンパクト集合 K に対して, $R' - K$ で定義されている函数 v_K を, K の上では $v_K = v$ とおくことにより, R' 全体に拡張する. このとき次の定理は, [1] の定理 7 と同様に証明される:

定理 5.1. R' 上の任意の FSH 函数 v と, 任意の regular なコンパクト集合 $K \subset R'$ に対して, v_K は $S(\mu) \subset K$ なる測度 μ のポテンシ

アル NK に等しい。

系 5.1.1. 上の定理の v_K は FSH_0 函数である。

このことは上の定理と補題 5.3 とから明らかである。

系 5.1.2. 任意の FSH_0 函数は、 ∂K_0 上で境界値 0 である。

証明は [1] の §7 の補題 4 と同じ。

定理 5.2. 任意の FSH 函数は、ある FSH 函数とポテンシャルとの和で表わされる。

証明は [1] の定理 8 と同じ。

ここで、任意の FSH 函数 v と、 $R' + \hat{S}$ の中の任意の開集合 Ω に対して、 v_Ω を

$$(5.1) \quad v_\Omega(x) = \sup_{K \in \mathcal{R}_\Omega} v_K(x) (\leq v(x))$$

によって定義する、ここに $\mathcal{R}_\Omega$ は $\Omega \cap R'$ に含まれる regular なコンパクト集合の全体を表わす。任意の開集合 $\Omega \subset R' + \hat{S}$ に対して、

$$(5.2) \quad \{K_m\} \subset \mathcal{R}_\Omega, K_m \subset K_{m+1}^\circ, \bigcup_{m=1}^\infty K_m = \Omega \cap R'$$

となるような列 $\{K_m\}$ は必ずとれるが、このような任意の $\{K_m\}$ に対して

$$(5.3) \quad v_\Omega(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} v_{K_m}(x) \text{ (単調増加列の極限)}$$

となることは容易に証明される。これらのことから、次の二つの補題が証明される (補題 5.6 の証明には、補題 5.2 と 5.4 も使われる) :

補題 5.5. 任意の FSH 函数 u, v と、任意の開集合 $\Omega \subset R' + \hat{S}$ に対して $(u+v)_\Omega = u_\Omega + v_\Omega$.

補題 5.6. 上に定義された v_Ω は FSH 函数である。特に $\overline{\Omega} \cap K_0 = \phi$ ならば、 v_Ω は FSH_0 函数である。

定理 5.3. Ω_1, Ω_2 が $R' + \hat{S}$ の中の開集合で $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ならば、
 任意の FSH 函数に対して $(v_{\Omega_1})_{\Omega_2} = v_{\Omega_1}$.

証明. (5.1) により $x \in \Omega_1$ ならば $v_{\Omega_1}(x) = v(x)$ となるから、
 任意の $K \in \mathcal{R}_{\Omega_1}$ に対して R' 上で $(v_{\Omega_1})_K = v_K$, 従って $(v_{\Omega_1})_{\Omega_1} =$
 v_{Ω_1} となり、このことから $(v_{\Omega_1})_{\Omega_2} \geq (v_{\Omega_1})_{\Omega_1} = v_{\Omega_1}$ を得る。一方、補
 題 5.6 により、任意の $K' \in \mathcal{R}_{\Omega_2}$ に対して $(v_{\Omega_1})_{K'} \leq v_{\Omega_1}$ であるから、
 (5.1) により $(v_{\Omega_1})_{\Omega_2} \leq v_{\Omega_1}$ となる。(証明終り)

次に、 $\hat{S}$ の任意の開部分集合 Γ に対して、 $R' + \hat{S}$ の中の開集合 Ω で Γ
 を含むものの全体を $\mathcal{U}_\Gamma$ とし、任意の FSH 函数 v に対して

$$(5.4) \quad v_\Gamma(x) = \inf_{\Omega \in \mathcal{U}_\Gamma} v_\Omega(x)$$

と定義する。任意の開集合 $\Gamma \subset \hat{S}$ に対して、

$$(5.5) \quad \{\Omega_m\} \subset \mathcal{U}_\Gamma, \quad \Omega_m \supset (\Omega_{m+1})^c, \quad \bigcap_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \Gamma$$

(上の添え字 c は $\hat{R}$ における閉演算) となつような $\{\Omega_m\}$ は必ずとれ
 るが、このような任意の $\{\Omega_m\}$ に対し

$$(5.6) \quad v_\Gamma(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} v_{\Omega_m}(x) \quad (\text{単調減少の極限})$$

となることは容易に証明される。従つて、補題 5.5 および 5.6 に対応
 して; ———

補題 5.7. 任意の FSH 函数 u, v と、任意の開集合 $\Gamma \subset \hat{S}$ に対し
 て $(u+v)_\Gamma = u_\Gamma + v_\Gamma$.

補題 5.8. 上に定義された v_Γ は FSH₀ 函数である。

これらの補題は、以下の節において定理の証明(本稿中では省略)の
 ために使われる。

○ 以後の理論の構成は [1] と完全に平行にできると、筋道なりを述べる。

§ 6. FH_0 函数, FSH_0 函数の積分表示.

定理 6.1. 任意の FSH_0 函数 (または FH_0 函数) は, $R' + \hat{S}$ の上 (または $\hat{S}$ の上) の測度 μ のポテンシャル $N\mu$ で表わされる; 逆も成立する。

証明は [1] の定理 13 と同様である (その中で, $\xi \in \hat{S}$ に対して $N_\xi \leq N$ を証明する部分は, 本稿では定理 4.3 で述べてある)。

補題 6.1. v を FSH 函数とし, Ω を $R' \cup \hat{S}$ の部分領域で $\Omega^a \cap K_0 = \emptyset$ なるものとすると, $S[\mu] \subset \Omega^a$ なる測度 μ が存在して, R' において $v_\Omega = N\mu$ が成立する。

証明は [1] の定理 14 と同じ方法による; (5.2) を満たす $\{K_m\}$ をとり, Ω と $\{K_m\}$ とをそれぞれ [1] の F と $\{F_m\}$ のように扱えばよい。従ってまた, 次の補題も [1] の定理 15 と同様にして証明される。

補題 6.2. v が FSH 函数, μ が $R' + \hat{S}$ の上の測度, Ω が $R' + \hat{S}$ の部分領域ならば, R' において $(N\mu)_\Omega = N_\Omega \mu$ が成立する。

次の二つの定理は, それぞれ [1] の定理 16, 定理 17 と同様にして証明される; [1] における $\{A^{(m)}\}$ のかわりに, (5.5) のような $\{\Omega_m\}$ を考えて, 上の二つの補題をばい。

定理 6.2. v が FSH 函数, Γ が $\hat{S}$ の中の閉集合とすると, $S[\mu] \subset \Gamma$ なる測度 μ が存在して,

$$(6.1) \quad v_\Gamma(x) = \int_\Gamma N(x, \xi) d\mu(\xi), \quad \mu(\Gamma) = \int_{\partial K_0} \frac{\partial v_\Gamma}{\partial n} dS. \quad (\text{註: 次の項下})$$

定理 6.3. μ を $R' + \hat{S}$ の上の測度, Γ を $\hat{S}$ の閉部分集合とすると, R' において $(N\mu)_\Gamma = N_\Gamma \mu$.

次の定理は [1] にはないから, 証明を (簡単であるが) 与えておく.

定理 6.4. 任意の FH_0 函数 v に対して $v_{\hat{S}} = v$.

証明. $\{D_n\}$ を §1 に述べたような領域の列とし, $\Omega_n = \hat{R} - \overline{D_n}$, $K_n = \overline{D_{n+2}} - D_{n+1}$ ($n \geq 1$) とおく. このとき $K_n \subset \Omega_n$ である, $v_{K_n} \leq v_{\Omega_n} \leq v$ である. 一方, $\partial D_{n+1} (\subset \partial K_n)$ の上で $v_{K_n} = v$ であり, また系 5.2.1 により ∂K_0 の上で $v_{K_n} = v = 0$ であって, v_{K_n} も v も $D_{n+1} - K_0$ で調和であるから, D_{n+1} で $v_{K_n} = v$, 従って $v_{\Omega_n} = v$ となる. $\{\Omega_n\}$ は (5.5) において $\Gamma = \hat{S}$ としたものでも満たすから, (5.6) によって $v_{\hat{S}} = v$ を得る.

以下の各定理も [1] の定理 18, 19, 20 にならって証明できる; 上の定理 6.2 の場合と同様に, [1] の $\{A^m\}$ を本稿の $\{\Omega_m\}$ で置きかえる (定理 6.6 の証明で定理 5.3 が使われる).

定理 6.5. v が R' において区分的に滑らかで $\|v\|_{R'} < \infty$ なる FSH 函数ならば, $\hat{S}$ の任意の閉部分集合 Γ に対して $(v_\Gamma)_\Gamma = v_\Gamma$ となる.

特に R' 上で $\omega(x) \equiv 1$ なる函数 ω に対する定理を適用できるから

$$(6.2) \quad (\omega_\Gamma)_\Gamma = \omega_\Gamma$$

定理 6.6. v を FSH 函数, Γ を $\hat{S}$ の閉部分集合で $\omega_\Gamma \equiv 0$ なるものとする. $(v_\Gamma)_\Gamma = v_\Gamma$ となる.

(註) (6.1) の第2式は, 第1式と系 2.1.2 とから容易にわかる.

§ 7. 境界点の分類, 標準表現, 相違的函数. この § において (前の § と同様に, [1] の中で $F, \{F_m\}, A, \{A^{(m)}\}$ がそれぞれ本稿において $\Omega, \{K_m\}, P, \{\Omega_m\}$ に対応する) とは注意すれば, 以下の各定理はすべて [1] にならって証明できるから, 以下単に理論の筋道になる定理を並べて, [1] の中の対応する (同じ方法で証明される) 定理の番号を記すだけにする.

まず § 4 で述べた $N_K(\cdot, y)$ と同様に $N_P(\cdot, y)$ (P は $\hat{S}$ の閉部分集合) を定義し, 特に $\Gamma = \{\xi\}$ (一点 $\xi \in \hat{S}$ から成る集合) の場合を考えて,

$$(7.1) \quad \alpha(\xi) = \int_{\partial K_0} \frac{\partial N_{\{\xi\}}(x, \xi)}{\partial n_x} ds_x \quad (\xi \in \hat{S})$$

とおく. このとき

定理 7.1. 任意の $\xi \in \hat{S}$ に対して, $\alpha(\xi) = 0$ または 1 であり, それに依って $N_{\{\xi\}}(x, \xi) = 0$ または $N(x, \xi)$ となる.

([1] 定理 21 および 24 系.)

ここで $\hat{S}_0 = \{\xi \in \hat{S}; \alpha(\xi) = 0\}$, $\hat{S}_1 = \{\xi \in \hat{S}; \alpha(\xi) = 1\}$ とおくと, [1] 定理 22, 定理 23, 定理 24 およびその系と同様にして; —

定理 7.2. $\hat{S}_0$ は F_0 集合である.

定理 7.3. v が FSH 函数ならば, $\hat{S}_0$ の任意の閉部分集合 Γ に対して $v_\Gamma \equiv 0$ である.

定理 7.4. v が FSH 函数で, Γ が $\hat{S}$ の閉部分集合ならば, v_Γ は $\int_{\Gamma \cap \hat{S}_1} N d\mu$ の形に表わされる. 特に任意の FH_0 函数は $\int_{\hat{S}_1} N d\mu$ の形に表わされる.

定義. i) $\hat{S}$ 上の測度 μ で $\mu(\hat{S}_0) = 0$ なるものを標準測度といい, 標準測度による $\int_{\hat{S}_1} N d\mu$ の形の表現を標準表現という.

ii) u が FH_0 函数であって, v かつ $u-v$ がともに FH_0 函数であるような函数 v は $v = cu$ (c は定数 ≥ 0) にかぎるとき, u は極值的 (extremal) であるという. — [1] では minimal と呼んでいる.

このとき, [1] の定理 26, 定理 27 およびその系に対応して; —

定理 7.5. i) u を極值的 FH_0 函数, Γ を $\hat{S}$ の閉部分集合とする. いま $u_\Gamma \not\equiv 0$ であって $u - u_\Gamma$ が FH_0 函数ならば, 一点 $\xi_0 \in \Gamma \cap \hat{S}_1$ があって

$$(7.2) \quad u(x) = c N(x, \xi_0), \quad \text{ここに} \quad c = \int_{\partial K_0} \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

ii) 任意の極值的 FH_0 函数は, ある $\xi \in \hat{S}_1$ に対する $N(x, \xi)$ の定数倍である.

iii) $N(x, \xi)$ は $\xi \in \hat{S}_1$ のとき, かつそのときにかぎり, x の極值的 FH_0 函数である.

(註. (7.2) の ξ_0 が u によって一意的に定まることは, 系 3.2.2 によってわかる.)

定理 7.6. 任意の FH_0 函数の標準表現は一意的である; 従って, 任意の FH_0 函数 v と $\hat{S}$ の任意の閉部分集合 Γ に対して, v_Γ に対する標準測度の台は Γ に含まれる.

以上で Martin 境界の場合 [4] に対応する理論が ([4] の §6 を除き) 一応構成されることになる.

文 献

(本文中直接引用したもののみを記す. 他の関連文献は[1]の末尾の文献表を見られたい.)

- [1] M. Ohtsuka, *An elementary introduction of Kuramochi boundary*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, Vol. 28 (1964), 271-299.
- [2] Z. Kuramochi, *Mass distributions on the ideal boundaries of abstract Riemann surfaces, II*, Osaka Math. J., Vol. 8 (1960), 145-186.
- [3] S. Itô, *Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problems*, Jap. J. Math., Vol. 27 (1957), 55-102.
- [4] S. Itô, *Martin boundary for linear elliptic differential operators of second order in a manifold*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 16 (1964), 307-334.