

円柱列を過ぎる流れの安定性

同志社大・工 水島 二郎 (Jiro Mizushima)
同志社大・工 武本 幸生 (Yukio Takemoto)

§1. はじめに

一様流中に置かれた角柱列や円柱列などの柱状物体列を過ぎる流れの性質は、柱状物体の間隔により大きく異なる。 σ を柱状物体の間隔 P と直径 d の比とすると、 σ が大きい場合、柱状物体の間隙を通るジェットは互いに平行である。しかし σ を小さくすると、平行なジェットに不安定性が生じ、ジェットの合流が起こる。 σ が十分大きい場合の柱状物体列の後流は、Olssen¹⁾によって理論的および実験的に調べられた。彼は後流の流れ場を物体の配置と同じ周期をもつ正弦関数によって表現し、その表現が物体から十分離れたところでは、実際の流れを十分精度よく近似していることを実験によって確かめた。

Matsui²⁾は円柱列を過ぎる流れのジェットが合流する現象、特に σ 依存性とレイノルズ数依存性を詳しく調べた。彼は $Re = 2000$ の場合、 $\sigma = 3.0$ のとき平行なジェット、 $\sigma = 2.2, 1.8, 1.6$ のとき、それぞれ2つ、3つ、4つのジェットの合流を観測し、また現象のレイノルズ数依存性も示した。ここでレイノルズ数 Re は $Re \equiv Ud/\nu$ と定義し、 U は円柱列の上流での流速、 d は円柱の直径、 ν は流体の動粘性係数である。

ジェットが合流するメカニズムを明らかにする理論的な試みは、Gotoh, Yamada and Mizushima³⁾によって行われた。彼らは流れ方向と直角に周期を持つ平行流を主流とし、楕円関数で表現された主流に関する線形安定性を調べ、攪乱の臨界モードは主流と同じ周期を持つことを示した。Yamada⁴⁾は弱非線形安定性理論を用いてGotoh, Yamada and Mizushimaの研究を拡張したが、攪乱の臨界モードは主流と同じ周期を持つという結果が得られ、ジェットが合流する現象を説明することはできなかった。このように周期を持つさまざまな平行流に関する安定性は調べられているが、ジェットが合流する現象を説明できる結果は得られていない。

本研究は、数値シミュレーションにより、ジェットの合流現象を理論的に明らかにすることを目的とする。非圧縮性2次元流れを仮定し、角柱列・円柱列を過ぎる流れの、2つのジェットの合流および3つのジェットの合流を調べる。また、数値シミュレーションによる結果と比較するため、可視化実験を行った。

§2. 数値シミュレーション

差分法を用いて角柱列および円柱列を過ぎる流れの数値シミュレーションを行い、柱状物体列間隙から出るジェットの合流現象を調べる。シミュレーションの結果を非線形安定性

ジェットが独立な場合流れ場は y 方向に σ の周期を持ち、ジェットが合流する場合流れ場は y 方向に 2σ 以上の周期を持つ。流れ場に σ の周期を仮定することにより、臨界レイノルズ数以上においても y 方向の周期が σ である不安定な流れ場を得ることができる。ジェットが独立な場合の角柱列を過ぎる流れについては、計算領域はFig. 1(a)におけるEFDAとした。周期性と対称性の仮定から、流れ場はGHについて対称であるとする。このことにより、計算領域をEFDAの半分、すなわちEFGHとすることができる。GHについての境界条件は、次のように与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{at} \quad y = \frac{\sigma}{2}. \quad (3)$$

2つのジェットが合流する場合、角柱列を過ぎる流れの計算領域はFig. 1(a)におけるABCDとした。流れ場は y 方向に σ あるいは 2σ の周期を持つものとする。 2σ の領域を計算することにより、 σ の周期を持つ流れ場を2周期分、あるいは 2σ の周期を持つ流れ場を1周期分得ることができる。流れは中心軸EFに関して対称であると仮定し、次の対称条件を用いる。

$$u(x, y) = u(x, -y), \quad v(x, y) = -v(x, -y), \quad p(x, y) = p(x, -y). \quad (4)$$

周期性と対称性を仮定したことにより、計算領域をABCDの上半分、すなわちEFDAとすることができる。

中心軸EFにおける境界条件は式(4)より

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{at} \quad y = 0. \quad (5)$$

と書くことができ、DAにおいても同様に

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{at} \quad y = \sigma. \quad (6)$$

と書ける。上流境界ABでは一様流を仮定し、次の境界条件を用いる。

$$u = 1, \quad v = 0, \quad p = p_0 \quad \text{at} \quad x = -L_1, \quad (7)$$

ここで p_0 は十分上流での圧力である。下流境界CDでは次の自由流出条件を用いた。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{at} \quad x = L_2. \quad (8)$$

角柱の表面では滑りはないものとし、

$$u = 0, \quad v = 0 \quad (9)$$

とした。境界条件(5)-(9)式と対称条件(4)式の下で(1),(2)式を差分近似し、数値的に解くことにより、ピッチフォーク分岐の臨界レイノルズ数を求める。

3つのジェットが合流する場合、角柱列を過ぎる流れの計算領域はFig. 1(b)におけるABCDとした。流れ場は y 方向に σ あるいは 3σ の周期を持つものとする。 3σ の領域を計算することにより、 σ の周期を持つ流れ場を3周期分、あるいは 3σ の周期を持つ流れ場を1周期分得ることができる。流れは中心軸EFに関して対称であると仮定し、次の対称条件を用いる。

$$u(x, y) = u(x, -y), \quad v(x, y) = -v(x, -y), \quad p(x, y) = p(x, -y). \quad (10)$$

周期性と対称性を仮定したことにより、計算領域をABCDの上半分、すなわちEFDAとすることができる。EF, DA, AEおよびFDと、角柱の表面における境界条件は、2つのジェットが合流する場合と同様のものを用いる。

円柱列を過ぎる流れについては、2つのジェットの合流のみを調べる。計算領域はFig. 2におけるABCDとした。対称条件と境界条件は角柱列を過ぎる流れと同様のものを用いた。

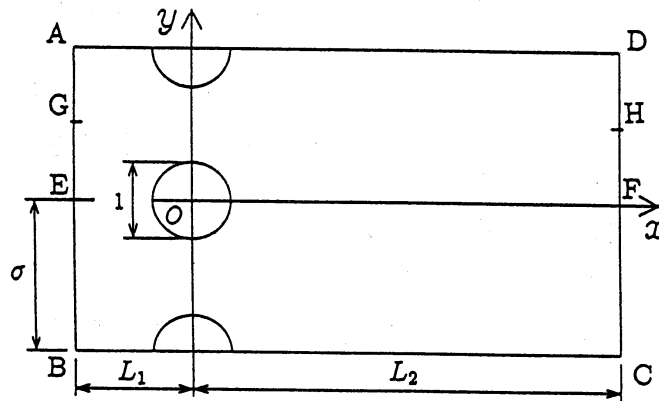


Fig.2. Computational domain for the flow past a row of circular bars. For the calculation of the flow with the period 2σ .

2.2 差分近似

本研究において3つのジェットが合流する場合は非食い違い(non-staggered)格子を用いたMAC法、2つのジェットが合流する場合は流れ関数 ψ と渦度 ω を用いた $\psi - \omega$ 法を用いて数値シミュレーションを行う。計算領域は x 方向、 y 方向に刻み幅 Δx 、 Δy で離散化した。 $\sigma = 2.0$ の場合の2つのジェットの合流についての差分格子の例を、角柱列の場合をFig. 3(a)に、円柱列の場合をFig. 3(b)に示す。見やすくするためにこれらは、実際に計算に用いたものより格子点数を少なくしてある。時間 t は、 Δt で離散化し、ステップ数を n によって示す。 Δx 、 Δy および Δt の大きさは $\Delta x = 0.03 \sim 0.1$ 、 $\Delta y = 0.02 \sim 0.1$ 、 $\Delta t = 0.001$ とした。格子点数は、例えば $\sigma = 2.0$ の場合は 200×40 とした。

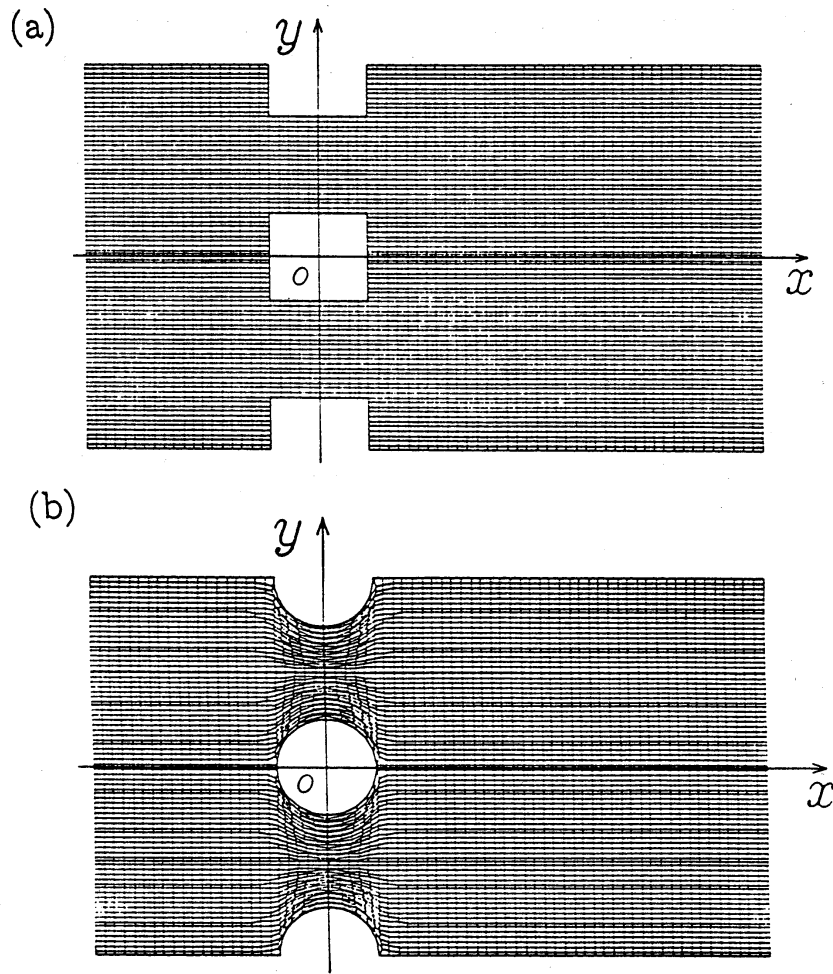


Fig.3. Illustration of the computational mesh. The mesh points adopted in our simulations are much more than illustrated in this figure. (a) For the flow with the period 2σ past a row of square bars. (b) For the flow with the period 2σ past a row of circular bars.

MAC法において基礎方程式はナビエ・ストークス方程式(1)と連続の式(2)である. 式(1)の発散をとることにより, 次のような圧力 p に関するポアソン方程式が得られる.

$$\nabla^2 p = -\nabla \cdot \{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}\} + \frac{1}{Re} \nabla^2 D - \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (11)$$

ここで $D \equiv \nabla \cdot \mathbf{u}$ である. 式(1)において, 時間微分項には1次精度の前進差分, 非線形項には3次精度の風上差分 (Kawamura-Kuwahara スキーム) を用いる. 式(1)におけるそれ以外の項と, 式(11)のすべての項には, 2次精度の中心差分を用いる. p_{ij}^n についての式(11)の解法にはSOR法を用いる. 収束判定については, $|(p_{ij}^n)^k - (p_{ij}^n)^{k-1}| < 10^{-7}$ を満たしたとき収束したものとする. ここで k は繰り返し数である. 流れ場の定常性の判定は $\max_{ij} |\mathbf{u}_{ij}^{n+1} - \mathbf{u}_{ij}^n| < 5.0 \times 10^{-7}$ を満たしたとき流れは定常であるとする.

角柱列あるいは円柱列を過ぎる流れにおいて、2つのジェットが合流する場合、物体間の流量はすべて等しい。したがって2次元性と非圧縮性の仮定により、流れ関数 $\psi(x, y, t)$ と渦度 $\omega(x, y, t)$ を導入することができ、基礎方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad (12)$$

$$\omega = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right). \quad (13)$$

ここで x 方向の流速 u と、 y 方向の流速 v は流れ関数 ψ によって $u = \partial \psi / \partial y$, $v = -\partial \psi / \partial x$ のように表すことができる。

流れ関数を導入すると、角柱列を過ぎる流れにおいて、対称条件(4)式は次のように与えられる。

$$\psi(x, y) = -\psi(x, -y), \quad \omega(x, y) = -\omega(x, -y). \quad (14)$$

同様に境界条件(5)-(9)式にも流れ関数を導入した。

計算領域はMAC法と同様に離散化した。渦度輸送方程式(12)において、時間微分項には1次精度の前進差分、それ以外の項には2次精度の中心差分を用いた。ポアソン方程式(13)は2次精度の中心差分で離散化した。解法にはSOR法を用い、相対誤差が 10^{-5} 以下のとき収束したものとした。流れ場は、 $\max_{i,j} |\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n| < 10^{-9}$ のとき定常に達したと判断した。

§3. 結果

角柱列・円柱列を過ぎる流れを数値シミュレーションにより調べた。初期条件は一様流、あるいは他のレイノルズ数での定常解を用いた。ここでは定常解のみについて扱う。 $\psi-\omega$ 法による2つのジェットの合流についての計算結果の一例として、 $\sigma = 2.0$ の角柱列を過ぎる流れの、 $Re = 25$ の流れ場をFig. 4に示す。充分時間が経過すると、流れ場は定常状態に達し、 y 方向に角柱の配置と同じ周期 σ をもち、角柱間の中心を通る x 方向の軸について対称になる。また、角柱後方の双子渦の長さはすべて等しい。

充分時間が経過した後の $\sigma = 2.0$, $Re = 35$ の流れ場をFig. 5に示す。流れ場は対称性を失い、角柱後方の双子渦の長さに違いがみられる。すなわち流れ場は、 y 方向に角柱の配置の2倍の周期 2σ を持つ。

周期 σ を持つ流れは、常にあらゆるレイノルズ数で存在する。しかし、臨界レイノルズ数以上では周期 σ をもつ流れは安定性を失い、 2σ の周期を持つ流れが現れる。流れ場に y 方向の周期 σ を仮定すると、 $Re = 35$ においても周期 σ の定常解を得ることができる。

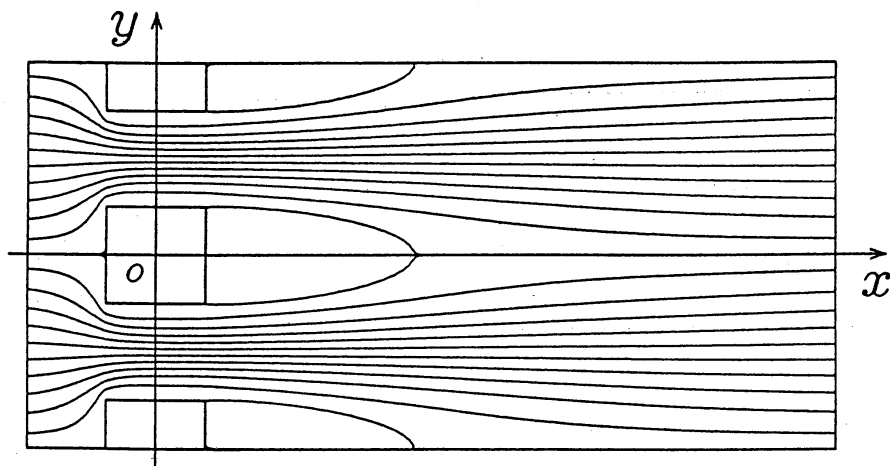


Fig.4. The flow field past a row of square bars with the period σ in the y -direction for $Re = 25$ and $\sigma = 2.0$.

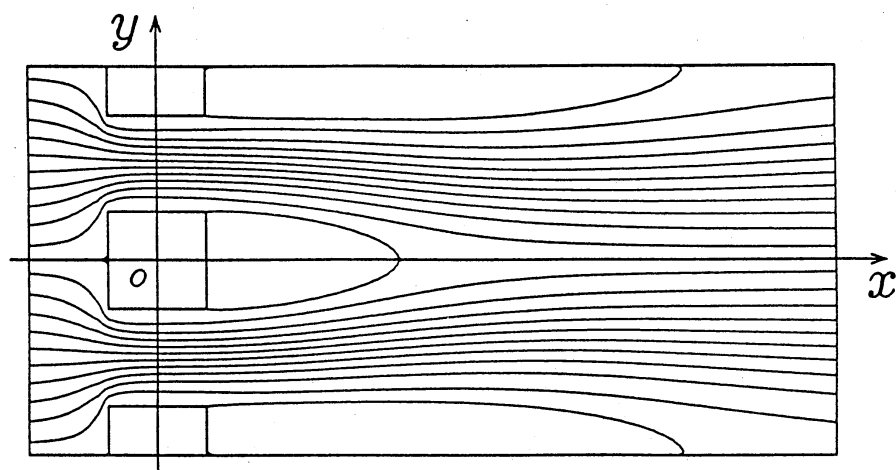


Fig.5. The flow field past a row of square bars with the period 2σ in the y -direction for $Re = 35$ and $\sigma = 2.0$.

これらのことから $Re = 25$ と $Re = 35$ の間にピッチフォーク分岐の臨界点があるものと考えられる。分岐解の非対称性を示す代表振幅として、 $x = 1.5$, $y = \sigma/2$ での y 方向の速度 v を採用しこれを v_1 とする。 Re に対する v_1 の変化を Fig. 6(a) に示す。またピッチフォーク分岐の臨界値 Re_c を決定するため、 Re に対する v_1^2 の変化を Fig. 6(b) に示す。 Fig. 6(b) において、 v_1^2 は臨界点付近で $Re - Re_c$ にほぼ比例し、臨界レイノルズ数は $Re_c = 31.1$ とすることができる。また、MAC法を用いて同様のシミュレーションを行ったところ、臨界レイノルズ数は $Re_c = 31.2$ となり $\psi - \omega$ 法との相対誤差は約0.3パーセントとなり、2つのジェットが合流する場合はどちらの方法を用いてもほぼ同じ結果が得られた。3つのジェットが合流する場合には $\psi - \omega$ 法を用いることができないのでMAC法のみを用いた。

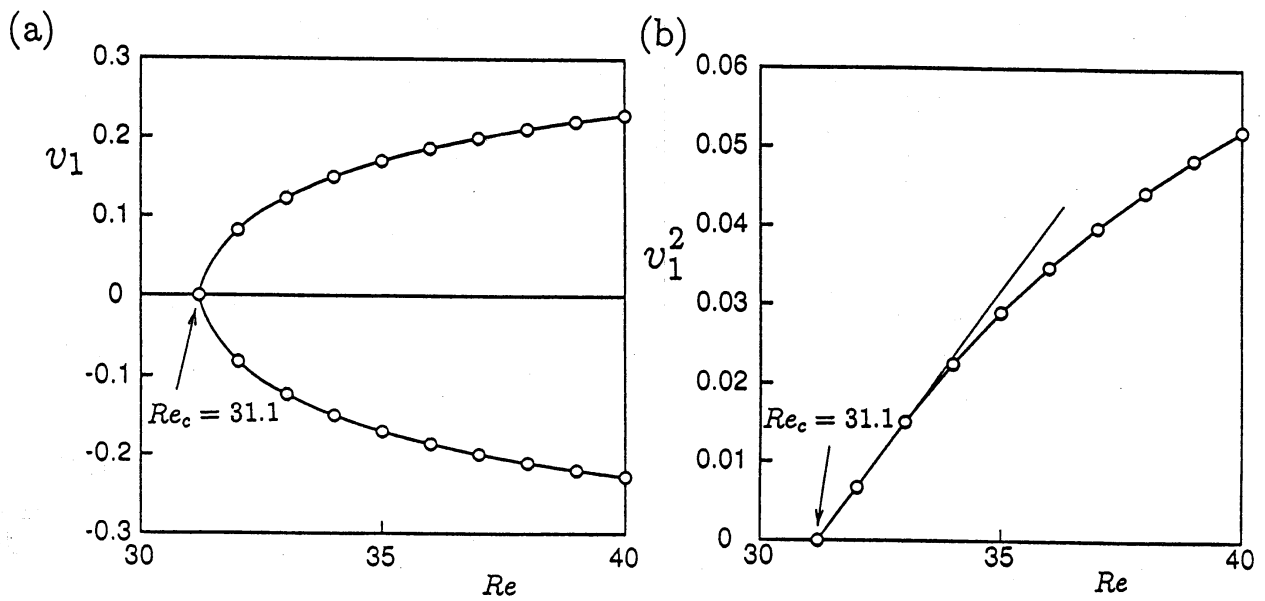


Fig.6. Bifurcation diagram for the flow past a row of square bars. From the flow with the period σ to the one with 2σ . (a) Velocity v_1 vs. the Reynolds number Re for $\sigma = 2.0$. (b) Velocity v_1^2 vs. the Reynolds number Re for $\sigma = 2.0$.

MAC法による3つのジェットの合流についての計算結果の一例として、 $\sigma = 2.0$ の角柱列を過ぎる流れの、 $Re = 40$ の流れ場をFig. 7に示す。ここで計算は十分大きな Re における定常解から Re を段階的に減らして、各 Re での定常解を求めた。

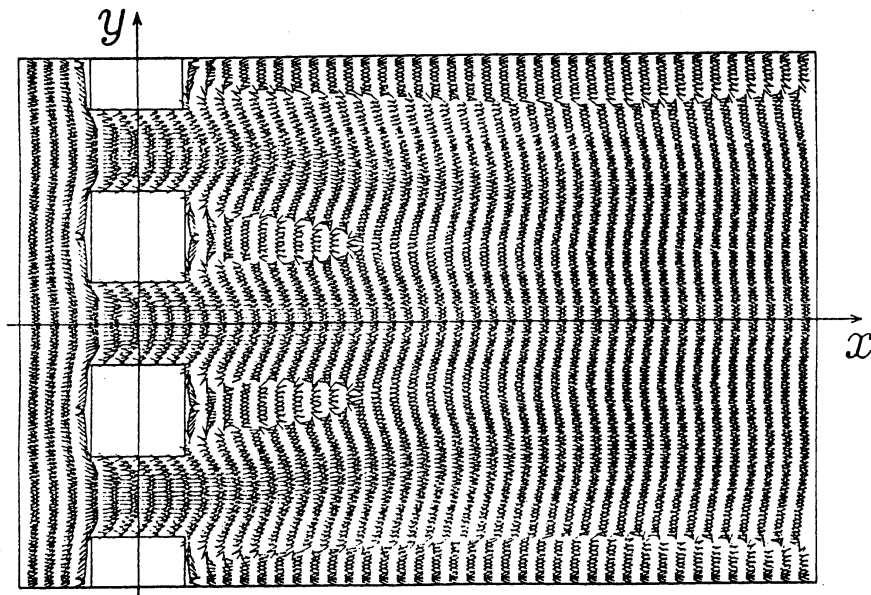


Fig.7. The flow field past a row of square bars. Bifurcated flow with the period 3σ in the y -direction for $Re = 40$ and $\sigma = 2.0$.

2つのジェットの場合と3つのジェットの場合について、同様の数値シミュレーションをさまざまな σ について行い、それぞれの σ の値に対する臨界レイノルズ数 Re_c を決定した。角柱列の場合の σ に対する臨界レイノルズ数 Re_c の変化をFig. 8に示す。Fig. 8において、丸印は2つのジェットの合流する臨界レイノルズ数 Re_{c2} を示し、三角印は3つのジェットの合流する臨界レイノルズ数 Re_{c3} を示す。これらから Re_{c2} および Re_{c3} は σ とともに増加することがわかる。

2つのジェットが合流する場合の、円柱列を過ぎる流れについても、角柱列の場合と同様にそれぞれの σ の値に対する臨界レイノルズ数 Re_c を求めた。円柱列の場合の Re_c をFig. 9に示す。これらから Re_c は σ とともに増加することがわかる。

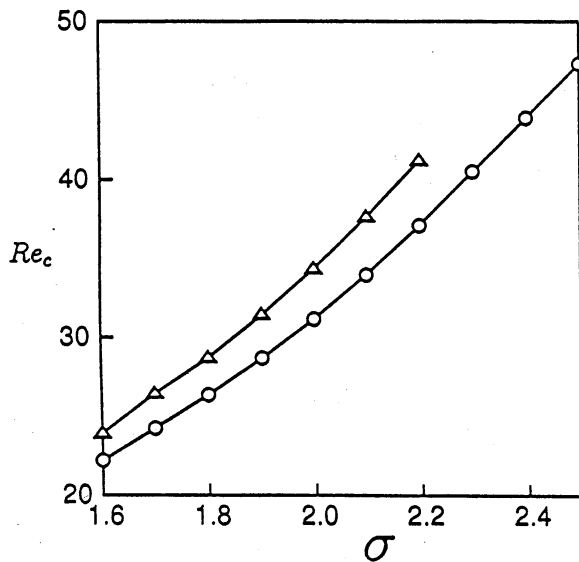


Fig. 8. Critical Reynolds number Re_c vs. the pitch-to-diameter ratio σ for the flow past a row of square bars. Circles denote Re_{c2} and triangles Re_{c3} .

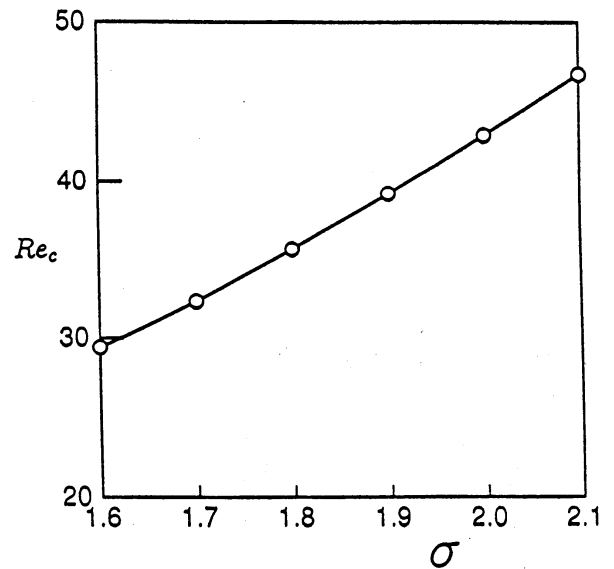


Fig. 9. Critical Reynolds number Re_c vs. the pitch-to-diameter ratio σ for the flow past a row of circular bars.

ここで Re は角柱の十分上流での一様流速 U と角柱の辺長によって定義されている。角柱列を過ぎる流れは、角柱間で最大流速 $u_{\max}$ を持ち、 σ が減少すると、 $u_{\max}$ は増加する。このことから $u_{\max}$ をもう一つの代表速度とすることができ、もう一つの臨界レイノルズ数 $\widetilde{Re}_c$ を $\widetilde{Re}_c \equiv u_{\max}d/\nu$ のように定義する。実験との比較のため、角柱列を過ぎる流れの各 σ ごとの Re_c を、 $\widetilde{Re}_c$ に変換したものをFig. 10に示す。Fig. 10において、白丸は2つのジェットの合流する臨界レイノルズ数 $\widetilde{Re}_{c2}$ 、白い三角は3つのジェットの合流する臨界レイノルズ数 $\widetilde{Re}_{c3}$ を示す。これらから $\widetilde{Re}_c$ は $\sigma = 1.8$ において最小値を持つことがわかる。

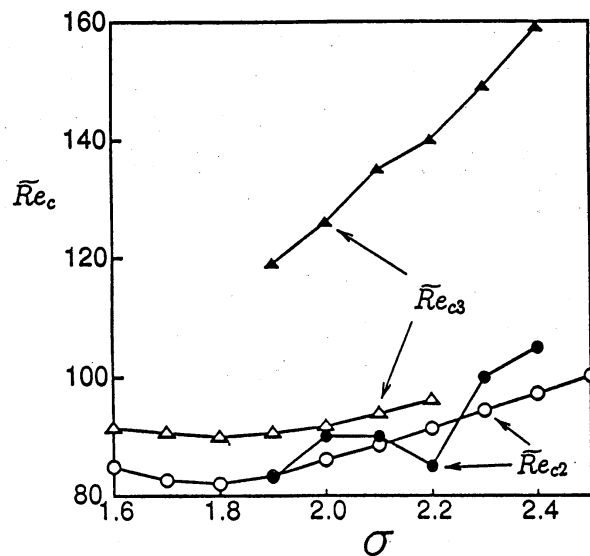


Fig.10. Critical Reynolds number $\widetilde{Re}_c$ defined by $u_{\max}$ vs. the pitch-to-diameter ratio σ . Open circles denote $\widetilde{Re}_{c2}$ and open triangles $\widetilde{Re}_{c3}$ both obtained numerically. Filled circles denote $\widetilde{Re}_{c2}$ and filled triangles $\widetilde{Re}_{c3}$ both obtained experimentally. Critical Reynolds number $\widetilde{Re}_c$ defined by $u_{\max}$ vs. the pitch-to-diameter ratio σ for the flow past a row of square bars.

§4. 可視化実験

角柱列および円柱列を過ぎる流れの可視化実験を行い、現象のレイノルズ数依存性と σ 依存性を調べた。本実験で使用するのは、断面が $290 \times 80\text{mm}$ 、長さが 600mm のテストセクションを持つ吸い込み型の風洞である。柱状物体には辺長 $d = 5\text{mm}$ の角柱あるいは直径 $d = 5\text{mm}$ の円柱を用いた。用いた物体の本数は最小19本から最大30本である。最大流速 $u_{\max}$ の測定には熱線流速計を用い、照明にはレーザー光を用いる。

流れは境界層を除いてほぼ2次元であるので、テストセクションの高さ方向の中央部において実験を行う。流れの可視化はドライアイスの煙による注入トレーサー法で行う。レイノルズ数の定義には、数値シミュレーションの結果の $\widetilde{Re}_c$ との比較のため、角柱間の中心で測定した速度 $u_{\max}$ を代表速度として用い、 $\widetilde{Re}_c \equiv u_{\max} d / \nu$ のように定義する。

実験結果の一例として、角柱列を過ぎる流れの $\sigma = 1.9$ 、 $\widetilde{Re} = 75$ の可視化写真を Fig. 11(a) に示す。角柱後方の双子渦の長さは互いに全て等しい。ジェットは全て平行であり、流れ場は y 方向に σ の周期を持つ。 $\sigma = 1.9$ 、 $\widetilde{Re} = 85$ の流れの可視化写真を Fig. 11(b) に示す。双子渦はひとつおきに等しい長さであり、流れ場は y 方向に 2σ の周期を持つ。 $\sigma = 1.9$ 、 $\widetilde{Re} = 130$ における3つのジェットの合流の様子を Fig. 11(c) に示す。以下同様に $\sigma = 2.0, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4$ における流れ場を可視化し、ジェットの合流が観測されるレイノルズ数の範囲を求めた。

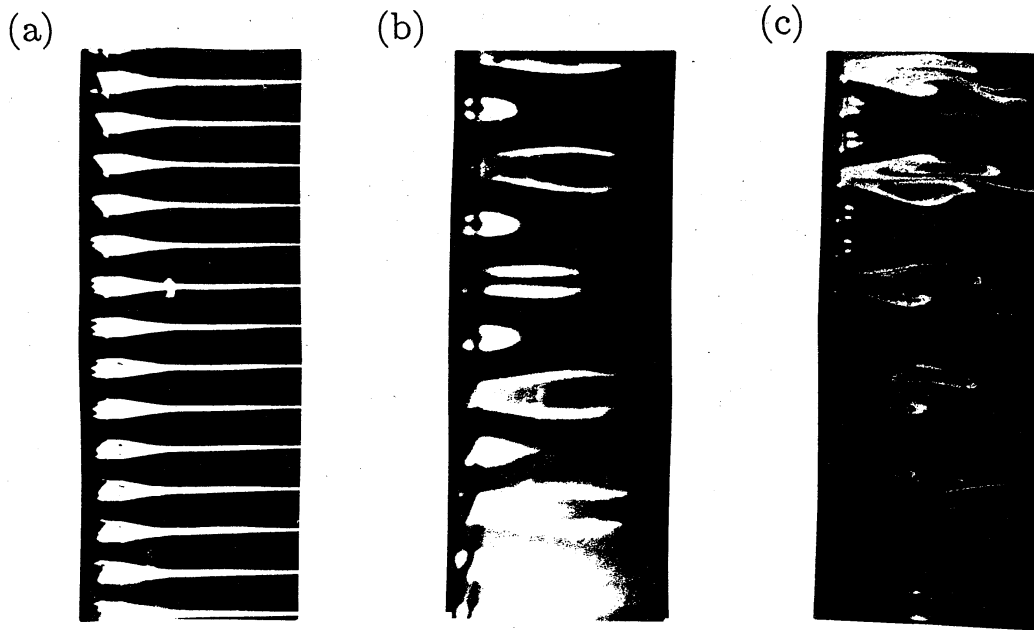


Fig.11. The visualized flow on experiment. (a) Parallel jets for $\widetilde{Re} = 75, \sigma = 1.9$. (b) Joining of two jets for $\widetilde{Re} = 85, \sigma = 1.9$. (c) Joining of three jets for $\widetilde{Re} = 130, \sigma = 1.9$.

Fig. 10 に実験による各 σ の値に対する 2 つのジェットが合流する臨界レイノルズ数 $\widetilde{Re}_{c2}$ を黒丸で、3 つのジェットが合流する臨界レイノルズ数 $\widetilde{Re}_{c3}$ を黒い三角で示す。Fig. 10 から、 σ とともに $\widetilde{Re}_{c2}$ と $\widetilde{Re}_{c3}$ が増加することや、レイノルズ数とともに流れ場の y 方向の周期が増加することがわかる。

実験によって得られた臨界レイノルズ数を、数値シミュレーションによる結果と比較する。Fig. 10 から 2 つのジェットが合流する臨界レイノルズ数 $\widetilde{Re}_{c2}$ は数値シミュレーションによる結果と実験による結果はよく一致することがわかる。このことから y 方向に物体の配置と同じ周期を持つ定常流がピッチフォーク分岐によって、物体の配置の 2 倍の周期を持つ定常流に遷移するという仮定は正しいことが確かめられた。次に 3 つのジェットの合流が現れる臨界レイノルズ数 $\widetilde{Re}_{c3}$ を、数値シミュレーションによる結果と比較する。Fig. 10 から数値シミュレーションによる結果と実験による結果には違いが見られることがわかる。数

値シミュレーションによる結果 $\widetilde{Re}_{c3}$ は σ の周期を持つ流れが 3σ の周期を持つ流れに遷移する臨界レイノルズ数を表しているのに対し、実験による結果 $\widetilde{Re}_{c3}$ は 2σ の周期を持つ流れが 3σ の周期を持つ流れに遷移する臨界レイノルズ数を表している。数値シミュレーションによる結果と実験による結果の違いをFig. 12を用いて説明する。Fig. 12において実線は安定な解を表し、破線は不安定な解を表す。レイノルズ数を十分小さな値から増加させていくと、 Re_{c2} において2つのジェットの合流が起こる。さらにレイノルズ数を増加させると Re_{c3} 以上においても2つのジェットの合流が観測され、 Re'_{c3} において 2σ の周期を持つ流れは不安定となり、 3σ の周期を持つ流れに遷移する。 Re'_{c3} は実験において 2σ の周期を持つ流れが 3σ の周期を持つ流れに遷移する臨界レイノルズ数であると考えられる。これに対してレイノルズ数を十分大きな値から減少させていくと、 Re_{c3} に達するまで 3σ の周期を持つ流れが観測される。レイノルズ数を Re_{c3} よりも小さくすると、 3σ の周期を持つ流れが 2σ の周期を持つ流れに遷移する。実験的には確認されていないが、現象にはこのようなヒステリシスがあると考えられる。

また円柱列を過ぎる流れにおいても、角柱列を過ぎる流れと同様のレイノルズ数依存性と σ 依存性がみられた。

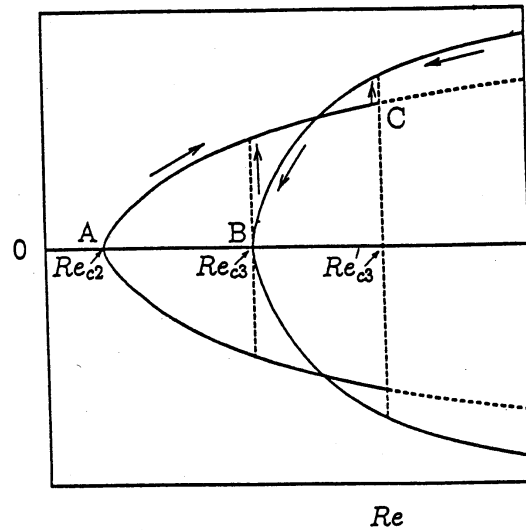


Fig.12. A schematic bifurcation diagram. Solid line shows a stable equilibrium solution and the broken line an unstable equilibrium solution. Re_{c2} is the critical Reynolds number of the pitchfork bifurcation from the flow with the period σ to the one with 2σ . Re_{c3} is the critical Reynolds number of the pitchfork bifurcation from the flow with the period σ to the one with 3σ . Re'_{c3} is the critical Reynolds number where the flow with the period 2σ becomes unstable.

§5. 考察

柱状物体列を過ぎる流れにおいて、2つのジェットあるいは3つのジェットが合流する現象をピッチフォーク分岐によって説明し、実験によってこれを確かめた。

数値シミュレーションにおいては、強制的に境界条件と対称条件を課したことによって、流れは定常となった。この手法は数値シミュレーションにおいて、目的とする解以外の解が現れないようにし、不安定な解を得るために有用である。しかし、このような境界条件や対称条件を課すと、時間的に周期を持つ解は現れない。角柱を過ぎる流れが時間的に周期を持つ臨界レイノルズ数は、Kelkar and Patankar⁵⁾による安定性解析では $Re_c = 53$ であり、Mizushima and Takemoto⁶⁾による数値シミュレーションでは $Re_c = 48.8$ である。円柱を過ぎる流れが時間的に周期を持つ臨界レイノルズ数は、実験では Noack and Eckelmann⁷⁾によると $Re_c = 54$ 、Provansal *et al.*⁸⁾によると $Re_c = 47$ であり、Jackson⁹⁾による安定性解析では $Re_c = 46.184$ である。本研究の σ の範囲において、ジェットが合流する臨界レイノルズ数は、角柱あるいは円柱を過ぎる流れが時間的に周期を持つ臨界レイノルズ数よりも小さく、流れ場が定常であるという仮定は適当であるといえる。

本研究の結論は、2つのジェットあるいは3つのジェットの合流はピッチフォーク分岐によって起こる、ということである。このことは、物体の配置と同じ周期を持つ流れが、常にあらゆるレイノルズ数で存在することを示している。しかし、臨界レイノルズ数では物体の配置と同じ周期をもつ流れは安定性を失い、 2σ 以上の周期を持つ流れが現れる。 $Re = 2000$ などの大きなレイノルズ数での実験において、流れは非定常であるが、時間的に周期を持つことから、この 2σ 以上の周期を持つ流れは、ホップ分岐が起こった後も安定に存在すると思われる。

参考文献

- [1] R. G. Olssen: ZAMM 16 (1936) 257.
- [2] T. Matsui: 1975 Joint JSME-ASME Applied Mechanics Western Conference, Honolulu, Hawaii, 1975 (JSME, Tokyo, 1975) p.415.
- [3] K. Gotoh, M. Yamada and J. Mizushima: J. Fluid Mech. 127 (1983) 45.
- [4] M. Yamada: J. Phys. Soc. Japan 55 (1986) 3073.
- [5] K. M. Kelkar and S. V. Patankar: 1989 National Heat Transfer Conference, HTD 110 (1989) 185.
- [6] J. Mizushima and Y. Takemoto: Submitted to J. Phy. Soc. Japan.
- [7] B. R. Noack and H. Eckelmann: J. Fluid Mech. 270 (1994) 297.
- [8] M. Provansal, C. Mathis and L. Boyer: J. Fluid Mech. 182 (1987) 1.
- [9] C. Jackson: J. Fluid Mech. 182 (1987) 23.