

de Rham Homotopy による Open Variety の
Rational type の決定

東大 理学部 河野俊丈

X, Y を複体とし、 X と Y が有理ホモトピー同値であるとは、 $A_{PL}^*(X), A_{PL}^*(Y)$ の minimal model m_X, m_Y が $\mathbb{Q}$ -differential graded algebra ($\mathbb{Q}$ -d.g.a.) として同型であると定義する。ここで、 $A_{PL}^*(X)$ とは Sullivan の意味での X 上の $\mathbb{Q}$ -polynomial forms の空間とする。([5]) X, Y が単連結の場合には、 $m_X \simeq m_Y$ より、 $\pi_1(X) \otimes \mathbb{Q} \simeq \pi_1(Y) \otimes \mathbb{Q}$ が導かれる。 X が compact Kähler 多様体であるときには、 m_X は X の有理コホモロジー環 $H^*(X, \mathbb{Q})$ の minimal model と同型であることが知られている ([1]) が、ここでは Morgan のスペクトル列 ([3]) を explicit に計算することによつて、Divisor の補集合の有理ホモトピー型を normal Euler 類の立場から論ずることにする。

1° V を smooth complex projective variety とし
 D を divisor で normal crossing であるとする.

$$D^P = \{ x \in D \ ; \ \text{mult}_x D \geq P \} \quad (P \geq 1)$$

$$D^0 = V$$

とおいて V の filtration を定める. この filtration に
 共調な V の三角形分割をとる. D^P の 正則近傍を N^P と

$$\nu : \tilde{D}^P \longrightarrow D^P$$

$$\tilde{\nu} : \tilde{N}^P \longrightarrow N^P$$

を normalization とする.

$$A_n = \bigoplus_{q-p=n} H^{q-2p}(\tilde{D}^P; \mathcal{E}_\mathbb{Q}^P) \quad (\mathcal{E}_\mathbb{Q}^P \text{ は divisor}$$

の順序に関する局所系). とおき

$A = \bigoplus_n A_n$ に, 次のように $\mathbb{Q}$ -d.g.a. の 構造
 を導入する.

$$(\text{積構造}) \quad H^{q-2p}(\tilde{D}^P; \mathcal{E}_\mathbb{Q}^P) \ni x$$

$$H^{q'-2p'}(\tilde{D}^{P'}; \mathcal{E}_\mathbb{Q}^{P'}) \ni x' \quad \text{と} \quad$$

x が ω ($N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_p}$ 上の form), x' が ω'

($N_{j_1} \cap \dots \cap N_{j_{p'}}$ 上の form) で 実現されているとき,

$$x \cdot x' = [i^* \omega \wedge j^* \omega'] \in H^{(q+q')-2(p+p')}(\tilde{D}^{P+P'}; \mathcal{E}_\mathbb{Q}^{P+P'})$$

ここで

$$\begin{array}{ccc} & & \xrightarrow{i^*} N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_p} \\ N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_p} \cap N_{j_1} \cap \dots \cap N_{j_{p'}} & & \\ & & \xrightarrow{j^*} N_{j_1} \cap \dots \cap N_{j_{p'}} \end{array}$$

ただし, $(i_1, \dots, i_p) \cap (j_1, \dots, j_p) \neq \emptyset$ のときは, $x \cdot x = 0$ とする。

(微分 d)

$$j: D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_p} \xrightarrow{\quad} D_{i_1} \cap \dots \overset{k}{\cap} D_{i_p}$$

埋め込み j の管状近傍を N_k , Thom class を τ_k とする。次の図式を可換にする d を微分とする。

$$\begin{array}{ccc} H^{g-2p}(D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_p}) & \xrightarrow{d} & \bigoplus_k H^{g-2p+2}(D_{i_1} \cap \dots \overset{k}{\cap} D_{i_p}) \\ \downarrow \alpha & & \nearrow j^* \\ \bigoplus_k H^{g-2p}(N_k, N_k - 0) & & \\ \downarrow \parallel \text{ exc.} & & \\ \bigoplus_k H^{g-2p}(D_{i_1} \cap \dots \overset{k}{\cap} D_{i_p}, D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_p}) & & \end{array}$$

$$\alpha(x) = \sum_k (-1)^{g-2p} x \cup \tau_k$$

以上により, A は, $\mathbb{Q}$ -d.g.a. の構造をもつが, これについて, 次の定理が成立する。

定理 1 $X = V - D$ とすると, $\mathbb{Q}$ -d.g.a. A の minimal model は, M_X と同型である。

この定理は, X の有理ホモトピー型が,

$$\{ H^{g-2p}(D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_p}; \mathbb{Q}) \}$$

という形の、有理コホモロジー、および normal Euler 類によって定まる degree 1 map によって決定されることを示している。

2° C, C' を $\mathbb{P}^2$ の既約曲線とし、定理 1 を非特異モデルについて適用すると、次の定理を得る。

定理 2 $\mathbb{P}^2 - C$ と $\mathbb{P}^2 - C'$ が有理ホモトピー同型であることは、次の i) ii) と同値である。

$$i) \quad \deg C = \deg C'$$

ii) $\# \text{Sing } C = \# \text{Sing } C'$ で、それらの間に、局所解析的同型が存在する。

Zariski は、既約 6 次曲線 C で cusp 6 つの場合、

$$\pi_1(\mathbb{P}^2 - C) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 & \dots\dots (1) \\ \mathbb{Z}_6 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

(1) は、6 つの cusp が、ある conic 上にあるとき、(2) はそれ以外るとき、

となることを示しているが、この例では、定理 2 によって、両者は、有理ホモトピーの観点からは、区別できない。

3° 一般に、次のような状況を考える。

$\omega: X \longrightarrow Y$ は、smooth projective variety の間の分岐被覆で、 C を critical set、 $D = \omega(C)$ とする。次の i) - iii) を仮定する。

i) C, D は normal crossing divisor として

$$C^P = \omega^{-1}(D^P).$$

ii) $\omega|_{X-C}: X-C \longrightarrow Y-D$ は、universal abelian covering.

iii) $\pi_1(Y-D)/[\pi_1(Y-D), \pi_1(Y-D)] = \mathbb{Z}_d$

$\mathbb{Q}\langle t \rangle$ を Laurent polynomial ring とし、 $\Lambda_d = \mathbb{Q}\langle t \rangle / (t^d - 1)$ とおく。 Λ_d は X に被覆変換として作用し、これにより、 A_X は Λ_d -algebra の構造をもつ。 $\mathbb{P}^2$ 内に既約曲線が与えられたとき、Zariski の意味の cyclic multiple plane を考えると、blowing up process によって、上のような状況を作ることが、できる。基本群と、本質的に関連するのは、 A_X の degree 1 part

$$(A_X)_1 \cong \left(\bigoplus_j H^0(C_j) \right) \oplus H^1(X)$$

で、knot theory との類似で、 $(A_X)_1$ の Λ_d -module としての構造を、決定することを考えよう。

4° $C \subset \mathbb{P}^2$ を degree d の 既約曲線とし

$\text{Sing } C = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ とする. 以下のように notation を定める.

$\mu(j)$: C の P_j における Milnor 数

S_j^3 ; P_j を中心とする十分小さな球面

$e_j^1, \dots, e_j^{\mu(j)}$; vanishing cycles

$\Phi_j(t)$; $K_j = C \cap S_j^3$ の Alexander polynomial

3° の条件を満たし $Y - D \simeq \mathbb{P}^2 - C$ となるような 分岐被覆 $X \rightarrow Y$ をとり. このような X を $\tilde{X}^d$ とかく

定義 $\Lambda_d^M \xrightarrow{\bar{\Phi}} \Lambda_d^N \longrightarrow H^1(\tilde{X}^d; \mathbb{Q}) \longrightarrow 0$

を $H^1(\tilde{X}^d; \mathbb{Q})$ の Λ_d -module としての 1 つの presentation とする. $\bar{\Phi}$ の $(N-j)$ 次 小行列式で 生成される Λ_d の ideal を $F_j(\tilde{X}^d)$ とかく. $F_j(\tilde{X}^d)$ の生成元 $f_j(t)$ を j -th Alexander polynomial とよぶ.

$j \leq j'$ のとき $F_j(\tilde{X}^d) \supset F_{j'}(\tilde{X}^d)$

$$f_j(t) \mid f_{j'}(t)$$

が 成立している. この global な Alexander polynomial は. local な Alexander polynomial $\{\Phi_k(t)\}_k$ と 次のような関係をもつ.

定理 3i) $\mu = \mu(j)$ ならば

$$f_{N-\mu}(t) \mid \phi_j(t) \quad \left(N = \sum_{j=1}^k \mu(j) \right)$$

ii) $\pi_1(\mathbb{P}^2 - C)$ が abel 群ならば

$$f(1)f(\xi_d) \cdots f(\xi_d^{d-1}) \neq 0 \quad (f(t) = f_0(t))$$

また m 次の cyclic multiple plane $\tilde{X}^m$ についてiii) $\prod_{j=1}^{m-1} \phi_1(\xi_m^j) \cdots \phi_k(\xi_m^j) \neq 0$ ならば

$$b_1(\tilde{X}^m) = 0.$$

(ξ_k は 1 の原始 k 乗根)

C の singularity が すべて cusp である場合を考える。
 と $\phi_j(t) = t^2 - t + 1$. したがって iii) より $6 \nmid m$
 のときは $b_1(\tilde{X}^m) = 0$ となる. (Zariski は この
 結果を linear system を用いて示している) また 同い
 仮定の下で $6 \mid \deg C$ と仮定すると.

$$f_{N-2}(t) = \begin{cases} t^2 - t + 1 & \cdots \textcircled{1} \\ 1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① は $\pi_1(\mathbb{P}^2 - C)$ が non-abelian のとき② は $\pi_1(\mathbb{P}^2 - C)$ が abelian のとき. を得る.

5° 定理 1-3 の 証明の概略を述べる. 詳細は [2], [3] を 参照されたい.

定理 1 polynomial form の空間 $E(X)$ を 次のように定義する. 単体 $\sigma \subset \overline{V-N^1}$ については, σ 上の forms とは, $\mathbb{Q}$ -polynomial forms とし, $\sigma \subset \overline{N^P-N^{P+1}}$ については,

$$\{ \mathbb{Q}\text{-polynomial forms over } \sigma \} \otimes \wedge (\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \dots, \theta_{i_p})$$

ここで: $\deg \theta_{i_1} = \dots = \deg \theta_{i_p} = 1$ かつ $d\theta_{i_j} = \tau_{i_j} |_{\sigma}$
 (τ_{i_j} は 埋め込み $D_{i_j} \rightarrow V$ の Thom form かつ $D_{i_1}, \dots, D_{i_p}$ は σ をとる divisors)

$$W_{-j}(E(X)) = \left\{ \sum \alpha \wedge \theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_t} \mid \begin{array}{l} \alpha \text{ は } V \text{ 上の } \mathbb{Q}\text{-polynomial} \\ \text{form かつ } t \leq j \end{array} \right\}$$

として, $E(X)$ の weight filtration を 導入する.

Step 1 1) ${}^w E_0^{-P,8} = Gr_w^{-P}(E^{-P,8}(X)) \cong^{res} \mathcal{E}^{8-2P}(\tilde{N}^P; \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}^P)$
 2) ${}^w E_1^{-P,8} \cong H^{8-2P}(\tilde{D}^P; \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}^P)$ を示す.

Step 2 スペクトル列の E_1 -term の微分 d_1 が $\mathbb{Q}$ -d.g.a. A の 微分 d と 一致することを 証明する.

Step 2 については $x \in H^{8-2P}(D_{i_1} \wedge \dots \wedge D_{i_P})$ とし
 $[\omega] = x$ とすると.

$$\begin{aligned} & d(\omega \wedge \theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_P}) \\ &= d\omega + (-1)^{8-2P} \left\{ \sum_{k=1}^P \tau_{i_k} \wedge (\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \overset{k}{\omega_{i_P}}) \right\} \end{aligned}$$

また, $[\omega \wedge \theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_P}] \in {}_W E_0^{-P, 8}$ について.

$$d_0[\omega \wedge \theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_P}] = [d\omega \wedge \theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_P}]$$

$$\begin{aligned} d_1[\omega] &= d_1[\text{res}(\omega \wedge \theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_P})] \\ &= (-1)^{8-2P} \sum_{k=1}^P x \wedge \tau_{i_k} \end{aligned}$$

これによつて, 主張が示された.

E_1 -term からつくられる d.g.a の minimal model の構成は, Morgan による.

定理 2 $\mu: (\hat{\mathbb{P}}^2, \hat{C}) \longrightarrow (\mathbb{P}^2, C)$ を, 非特異モデルとすると, $A_{\mathbb{P}^2, C}$ は, 次のような構造をもつ.

$H^2(\hat{\mathbb{P}}^2)$ の基底を, $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_g$ ($\beta_j^2 + \alpha^2 = 0$)

C の既約成分 C_j の proper transform $\hat{C}_j$ について,

$H^0(C_j)$ の基底を b_j .

exceptional divisor E_k について,

$H^0(E_k)$ の基底を e_k .

また, $H^1(\hat{C}_j)$ の基底を,

$c_{j1}, \dots, c_{j2g}$ ($g = \text{genus}(\hat{C}_j)$) とおく.

i) d.g.a. A は.

$$\{\beta_j\}_j, \{\epsilon_k\}_k, \alpha, \{\beta_k\}, \{C_{j_1}, \dots, C_{j_{2j}}\} \\ (1 \leq k \leq \ell)$$

によ, τ 生成される.

ii) 微分 d は, 次の式を満足する

$$d\epsilon_k = \beta_k$$

$$d\alpha = d\beta_1 = \dots = d\beta_\ell = 0$$

$$d\beta_j = \delta_j \alpha - m_1 \beta_1 - m_2 \beta_2 - \dots - m_\ell \beta_\ell$$

ここで $\delta_j = \deg C_j$ で m_j は 無限に近い特異点における重複度.

iii) 積構造は, intersection form によ, て 算かれる.

以上の A の構造より, 定理の 主張は 示される.

定理3 , 各特異点 p_j について $S_j - K_j$ の d -fold cyclic covering を構成し, これを $\tilde{X}_j^d$ とする. $H_1(\tilde{X}_j^d)$ の生成元 $[e_j], \dots, [e_j^{H_j}]$ について, これらの 基本関係式と global な $\tilde{X}^d$ に関する $H_1(\tilde{X}^d)$ の presentation を 比較することによ, て証明される. (詳細は [2])

References

- 1 P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan, D. Sullivan,
Real Homotopy theory of Kähler manifolds, Invent. math.
29 (1975), 245- 247
- 2 T. Kohno, Alexander Polynomials of Plane algebraic curves,
(preprint)
- 3 J.W. Morgan, The algebraic topology of smooth algebraic
varieties, Publ. math. I.H.E.S. (1978) 137 - 204
- 4 M. Schlessinger, J. Stasheff
Deformation theory and rational homotopy type (preprint)
- 5 D. Sullivan, Infinitesimal Computations in Topology,
Publ. math. I.H.E.S. 47 (1977) 269 - 331
- 6 O. Zariski, On the existence of algebraic functions of two
variables possessing a given branch curve, Amer. J. of
Math. 51 (1929) 305 - 328
- 7 ----- On the linear connection index of the algebraic sur
surfaces $z^n = f(x, y)$, Proc. of Nat. Acad. of Sci. 15
(1929)
- 8 ----- On the irregularity of cyclic multiple planes
Ann. of Math. 32 (1931) 485 - 511