

自然数の積空間における C^* -埋込された 離散部分集合の濃度の決定不可能性

神奈川大学 工学部

平田 康史 (Yasushi Hirata) 矢島 幸信 (Yukinobu Yajima)

Faculty of Engineering, Kanagawa University

1 はじめに

ここでは、すべての位相空間は T_1 であり、すべての濃度 κ や τ は無限とする。

空間 X に対して、その部分集合 A が X において C^* -埋込される (C -埋込される) とは、 A から閉区間 $[0, 1]$ (実数全体 $\mathbb{R}$) への任意の連続関数が、連続的に X 全体に拡張できるとき。

次の古典的な定理はよく知られている。

定理 1.1 (Tietze-Urysohn の拡張定理, 1925). 空間 X に対して、次は同値である。

- (a) X は正規である。
- (b) X の任意の閉集合は、 X において C^* -埋込できる。
- (c) X の任意の閉集合は、 X において C -埋込できる。

自然数全体の集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ に離散位相を導入して、 $\mathbb{N}$ を無限可算離散空間とみなす。 $\mathbb{N}^\kappa$ は $\mathbb{N}$ の κ 個のコピーによる積空間を表す。

また古典的な結果として、次を思い出す。

定理 1.2 (Stone, 1948). $\mathbb{N}^{\omega_1}$ は正規でない。

定理 1.1 と 1.2 により、次の問題が自然に生じる。

問題 1. $\mathbb{N}^{\omega_1}$ において C^* -埋込された閉集合は、 $\mathbb{N}^{\omega_1}$ において C -埋込されるか？

この問題に対して、2014 年に次の否定的結果が得られていた。これは連続体仮説のもとで、問題 1 が否定されることを意味する。

定理 1.3 (E. Pol-R. Pol [3]). $\mathbb{N}^c$ において C^* -埋込されるが C -埋込されない可算離散閉集合が存在する。

ところがつい最近, 我々[2] は次の結果を証明した。

定理 1.4. マーチンの公理と連続体仮説の否定のもとで, $\mathbb{N}^{\omega_1}$ における任意の C^* -埋込された部分集合は, $\mathbb{N}^{\omega_1}$ において C -埋込される。

これら 2 つの結果は, 問題 1 の解答として次の全く予想外の結果を生じる。

系 1.5. $\mathbb{N}^{\omega_1}$ において C^* -埋込された (閉) 集合が, $\mathbb{N}^{\omega_1}$ において C -埋込されるかどうかは, ZFC の公理系の中では決定できない。

そうすると上記の定理 1.3 のあたりに, もう一つ別の予想外の結果があるのではないかと考えたくなる。そこで思い出すのが, 1990 年と比較的古い次の結果である。

定理 1.6 (Baturlov [1]). 濃度 τ に対して, $2^\tau \leq c$ が成り立つための必要十分条件は, $\mathbb{N}^c$ において濃度 τ の離散閉集合を含む稠密な正規部分空間が存在することである。

マーチンの公理と連続体仮説の否定のもとでは, $2^{\omega_1} = c$ が成り立つこと及び正規性が C^* -埋込で特性化できることに着目して, 定理 1.3 と 1.6 から次の問題が自然に生じてくる。

問題 2. $\mathbb{N}^c$ において C^* -埋込された非可算な離散部分集合は存在するか?

2 問題 2 の解答

問題 2 に関して, 我々は次の結果を主定理として証明した。

定理 2.3. 濃度 κ が $\kappa^\omega = \kappa$ であるとする。このとき, 任意の (Ulam 非可測) 濃度 τ に対して, 次は同値である。

- (a) 不等式 $2^\tau \leq \kappa$ が成り立つ。
- (b) $\mathbb{N}^\kappa$ において C^* -埋込された濃度 τ の離散部分集合が存在する。
- (c) $\mathbb{N}^\kappa$ において C -埋込された濃度 τ の離散部分集合 (閉集合) が存在する。

$\kappa = c$ とおくと $c^\omega = c$ を満たし, $\tau = \omega_1$ は Ulam 非可測だから, 次は定理 2.1 の直接の結果である。

系 2.4. 次は同値である。

- (a) 不等式 $2^{\omega_1} \leq \mathfrak{c}$ が成り立つ。
- (b) $\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$ において C^* -埋込された非可算離散部分集合が存在する。
- (c) $\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$ において C -埋込された非可算離散閉集合が存在する。

連続体仮説を仮定すると, $\omega_1 = \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} = 2^{\omega_1}$ となり, 系 2.4(a) の不等式は満たされない。従って, 次を得る。

系 2.5. 連続体仮説のもとで, $\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$ において任意の C^* -埋込された離散部分集合は可算である。

系 2.4 と 2.5 から, 問題 2 の解答も系 1.5 と同様に, 次の予想外の結果となった。

系 2.6. $\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$ における C^* -埋込された非可算な離散部分集合が存在するかどうかは, ZFC の公理系の中では決定できない。

3 $\mathbb{N}^{\kappa}$ における濃度 κ の C^* -埋込された離散部分集合

任意の濃度 κ に対して, $2^{\kappa} > \kappa$ であるから, $\tau = \kappa$ のとき定理 2.3 のにおける不等式は成り立たない。従って, 次の問題は否定的に解決されるように思える。

問題 3. κ を非可算濃度とするとき, $\mathbb{N}^{\kappa}$ において C^* -埋込された濃度 κ の離散部分集合は存在するか?

濃度 κ に対して, $\text{cf}(\kappa)$ は κ の共終数を表すとして, 予想通りに次を得る。

定理 3.1. 濃度 κ が $\text{cf}(\kappa) > \omega$ であるとする。このとき, $\mathbb{N}^{\kappa}$ において C^* -埋込された濃度 κ の離散部分集合は存在しない。

ところが一方では, そうでない濃度 κ に対しては, 逆の結果が得られる。

命題 3.2. 一般連続体仮説のもとで, 濃度 κ が $\text{cf}(\kappa) = \omega$ であるとする。このとき, $\mathbb{N}^{\kappa}$ において C -埋込された濃度 κ の離散部分集合が存在する。

以上によって, 問題 3 の解答は κ の取り方に依存することがわかる。

4 未解決問題

2点からなる離散空間 $\{0, 1\}$ の κ 個のコピーによる積空間を $\{0, 1\}^\kappa$ で表す。 $\mathbb{N}^\kappa$ の代わりに $\{0, 1\}^\kappa$ を置き換えると、次を得ることができる。

命題 4.1. 任意の2つの濃度 κ と τ に対して、不等式 $2^\tau \leq \kappa$ が成り立つための必要十分条件は、 $\{0, 1\}^\kappa$ における C^* -埋込された濃度 τ の離散部分集合が存在することである。

上記の命題からも上の定理 2.3 において、濃度 κ の条件「 $\kappa^\omega = \kappa$ 」は極めて目障りである。実際、この条件は定理 2.3 の (b) $\rightarrow$ (a) の証明にのみ用いられている。従って、次の問題が自然に提起される。

問題 4. 濃度 κ は $\kappa^\omega > \kappa$ であるとする。もし $\mathbb{N}^\kappa$ において C^* -埋込された濃度 τ の離散部分集合（または C -埋込された濃度 τ の離散閉集合）が存在するならば、不等式 $2^\tau \leq \kappa$ は成り立つか？

注意. 仮定 $2^\omega = 2^{\omega_1} = \omega_3$ のもとで、 $\mathbb{N}^{\omega_2}$ において C^* -埋込された非可算な離散部分集合が存在することが証明できれば、問題 4 は否定的に解決される。

参考文献

- [1] D. P. Baturov, *Normality in dense subspaces of products*, Topology and Appl. **36** (1990), 111–116.
- [2] Y. Hirata and Y. Yajima, *Undecidability of the existence of C^* -embedded but not C -embedded subsets in a product of natural numbers*, preprint.
- [3] E. Pol and R. Pol, *Note on countable closed discrete sets in products of natural numbers*, Topology and Appl. **175** (2014), 65–71.