

On the special values of certain multiple Dirichlet series

門田 慎也 (新居浜工業高等専門学校)

Shin-ya Kadota (National Institute of Technology, Niihama College)

Abstract

本稿では、2018年10月29日(月)から31日(水)まで行われた研究集会「解析的整数論とその周辺」において講演した「ある種の多重 Dirichlet 級数の特殊値について」の結果を紹介する。

1 導入

まずは、本研究の出発点といえる「多重ゼータ値に対する parity result」の紹介から始めたい。多重ゼータ値 $\zeta(k_1, k_2, \dots, k_r)$ とは自然数 $k_1, k_2, \dots, k_r$ に対して次の多重級数で定義される実数値のことである：

$$\zeta(k_1, k_2, \dots, k_r) := \sum_{0 < m_1 < m_2 < \dots < m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_r^{k_r}}.$$

ただし、級数の収束のために $k_r > 1$ としておく。ここで、 $k_1 + k_2 + \dots + k_r, r$ をそれぞれ多重ゼータ値 $\zeta(k_1, k_2, \dots, k_r)$ の重さ、深さと呼ぶ。これまでの多重ゼータ値の研究において、それらの間の関係式がたくさん発見されたり、興味深い性質・現象がいくつも明らかになっている。以下に述べる parity result とは、そんな興味深い性質のうちの一つである。

Theorem 1.1 (parity result). $k_1 + k_2 + \dots + k_r \not\equiv r \pmod{2}$ を満たす（つまり、重さと深さの偶奇が異なる）多重ゼータ値 $\zeta(k_1, k_2, \dots, k_r)$ は深さが $r - 1$ 以下の多重ゼータ値の有理数係数多項式として表すことができる。

この性質は、1998年に Goncharov[1]により、多重 polylog に関する結果の系として得られており、2004年には津村[4]により解析的な手法を用いて、2006年には井原・金子・Zagier[2]らにより代数的な手法を用いて証明されている。この性質の重要な点は、“深さが小さい多重ゼータ値を用いて表すことができる”という点である。さらに、興味深いことに、重さと深さの偶奇が同じときにはこのような現象が起きるということはまだ証明されていない。以下、本稿では、 r 重 Dirichlet 級数で定義されるものに対して r を「多重度」と呼び、変数の和を「重さ」と呼ぶことにし、“parity result”を以下のような性質だと解釈することにする：

重さ k と多重度 r の偶奇が異なる多重 Dirichlet 級数は、
多重度が $r - 1$ 以下の多重 Dirichlet 級数を用いて表すことができる。

これまでに、様々な多重ゼータ関数が導入されており、上で定義した多重ゼータ値は Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の正の整数点での特殊値になっている。では、他の多重ゼータ関数の正の整数点での特殊値は parity result を満たさないのか、ということを疑問に思うかもしれないが、すでに他の多重ゼータ関数の特殊値に対しても類似した結果が知られている。ここでは、Mordell-Tornheim (MT) 型多重ゼータ値とルート系のゼータ値 (ルート系のゼータ関数の正の整数点での特殊値) に関する結果を紹介する。

MT 型多重ゼータ値とは、自然数 $k_1, k_2, \dots, k_{r+1}$ に対して、下の r 重級数で定義される：

$$\zeta_{MT}(k_1, k_2, \dots, k_{r+1}) := \sum_{m_1, m_2, \dots, m_r > 0} \cdots \sum \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_r^{k_r} (m_1 + m_2 + \cdots + m_r)^{k_{r+1}}}.$$

以下の、MT 型多重ゼータ値に対する parity result は 2005 年に津村 [6] により証明された。

Theorem 1.2. $k_1 + k_2 + \cdots + k_{r+1} \neq r$ である Mordell-Tornheim 型多重ゼータ値は $\zeta_{MT}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_s)$ ($s < r+1$) の有理数係数多項式として表すことができる。

ルート系のゼータ関数とは、簡単に言うと Witten のゼータ関数を変数化したもので、単純 Lie 代数 ($A_r, B_r, C_r, D_r, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ 型) に対して定まり、小森・松本・津村によって導入された。本稿では、ルート系のゼータ関数の一般的な定義を与えることは割愛し、具体例をいくつか紹介することにする。まず、 A_1 型のルート系のゼータ値は Riemann ゼータ値と一致し、 A_2 型は MT 型多重ゼータ値の $r = 2$ の場合と一致する。また、 B_2, G_2 型はそれぞれ次のように定義される：

$$\zeta(k_1, k_2, k_3, k_4; B_2) := \sum_{m, n > 0} \sum \frac{1}{m^{k_1} n^{k_2} (m+n)^{k_3} (m+2n)^{k_4}},$$

$$\zeta(k_1, k_2, \dots, k_6; G_2) := \sum_{m, n > 0} \sum \frac{1}{m^{k_1} n^{k_2} (m+n)^{k_3} (m+2n)^{k_4} (m+3n)^{k_5} (2m+3n)^{k_6}}.$$

B_2 型の多重度は 2 であるので重さ $k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ が奇数であるときの様子が気になるわけだが、この時は Riemann ゼータ値の有理数係数の多項式としてかけることが津村 [5] により証明されている。また、同じく多重度が 2 である G_2 型は $k_1 + \cdots + k_6$ が奇数であるとき 3 を法とする Dirichlet 指標に付随する Dirichlet の L 関数の特殊値 2 つの積と Riemann ゼータ値 2 つの積の有理数係数の線型結合でかけることが筆者・岡本・田坂 [3] により証明されている。さらに、

$$\zeta(k_1, k_2, \dots, k_6; A_3) := \sum_{m, n, \ell > 0} \sum \sum \frac{1}{m^{k_1} n^{k_2} \ell^{k_3} (m+n)^{k_4} (n+\ell)^{k_5} (m+n+\ell)^{k_6}}$$

と定義される多重度が 3 である A_3 型に対しても、 $k_1 + \cdots + k_6$ が偶数であるとき A_2 型および A_1 型の有理数係数の多項式としてかけることが岡本により証明されている。(2017 年 6 月 30 日に名古屋大学で行われた解析数論セミナーにてこの結果が報告された。)

2 主結果

導入で述べたように、様々な多重 Dirichlet 級数が parity result を満たすことがわかる。そこで、自然数の組 $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_r)$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_\ell)$ 、非負整数を成分に持つ $\ell \times r$ 行列 $X = (a_{ij})$ および 実ベクトル $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)$ に対して、以下の形をした多重 Dirichlet 級数について考えてみた：

$$\zeta(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{y}, X) := \sum_{m_1, \dots, m_r > 0} \prod_{j=1}^r \frac{e^{2\pi\sqrt{-1}m_j y_j}}{m_j^{h_j}} \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{(a_{i1}m_1 + \dots + a_{ir}m_r)^{k_i}}.$$

ここで、 X は零行ベクトルも零列ベクトルも含まないものとする。零行ベクトルを含まないことは、分母が 0 になることを防ぐため、零列ベクトルを含まないことは級数の収束性のためである。主結果を述べるために、まずは記号の導入を行う。

自然数 r に対して $[r] := \{1, 2, \dots, r\}$ と定め、自然数の組 $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_r)$ および $[r]$ の部分集合 $J = \{j_1 < j_2 < \dots < j_m\}$ に対して

$$\mathbf{h}_J := (h_j)_{j \in J} = (h_{j_1}, h_{j_2}, \dots, h_{j_m})$$

と定める。 $f \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{C}$ の $\mathbb{R}^m$ の部分を $\vec{f}$ と表し、 $\mathbb{C}$ の部分を $\dot{f}$ と表す。 $\mathbb{R}^m$ の部分集合 V に対して

$$\langle V \rangle := \sum_{\mathbf{v} \in V} \mathbb{Z}\mathbf{v}$$

と定め、 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{C}$ の部分集合 W に対して

$$\vec{W} := \{\vec{f} \mid f = (\vec{f}, \dot{f}) \in W\} \in \mathbb{R}^m$$

と定める。 Λ を $(\mathbb{Z}^m \setminus \{\vec{0}\}) \times \mathbb{C}$ の有限部分集合で $\text{rank}(\vec{\Lambda}) = m$ を満たすものとする。そのような Λ の部分集合 H で $\text{rank}(\vec{H}) = m - 1$ を満たすものに対して

$$\mathfrak{H}_H := \sum_{g \in H} \mathbb{R}\vec{g}$$

と定める。 Λ に対して $\mathcal{B}(\Lambda)$ を Λ の部分集合 B で $\vec{B}$ が $\mathbb{R}^m$ の基底をなすものすべての集まりとする。 $B = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m\} \in \mathcal{B}(\Lambda)$ に対して $B^* = \{\vec{f}_1^B, \dots, \vec{f}_m^B\}$ を $\vec{B} = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m\}$ の双対基底とする。

ここで、実数に対して小数部分を表す $\{\cdot\}$ の高次元への一般化を定義する。 $\mathcal{B}(\Lambda)$ を Λ の部分集合 $R = \{g_1, \dots, g_{m-1}\}$ で $\vec{R} = \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{m-1}\}$ が線型独立となるものすべての集まりとする。さらに、任意の $B \in \mathcal{B}(\Lambda)$ と $f \in B$ に対して $\langle \rho, \vec{f}^B \rangle \neq 0$ を満たすベクトル

$$\rho \in \mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{R \in \mathcal{B}(\Lambda)} \mathfrak{H}_R$$

をひとつ固定する。そして、 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, B \in \mathcal{B}(\Lambda), f \in B$ に対して

$$\{\mathbf{y}\}_{B,f} := \begin{cases} \{\langle \mathbf{y}, \vec{f}^B \rangle\} & , \langle \rho, \vec{f}^B \rangle > 0, \\ 1 - \{-\langle \mathbf{y}, \vec{f}^B \rangle\} & , \langle \rho, \vec{f}^B \rangle < 0 \end{cases}$$

と定める。非負整数を成分に持ち、ゼロ行ベクトルもゼロ列ベクトルも含まない $\ell \times r$ 行列全ての集合を $\mathcal{M}(\ell, r; \mathbb{N}_0)$ で表す。 $X = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(\ell, r; \mathbb{N}_0)$ と空でない $[r]$ の部分集合 J に対して

$$I(J) := \{i \in [\ell] \mid a_{ij} \neq 0 \quad (\exists j \in J)\},$$

$$\bar{J} := [r] \setminus J, \bar{I}(J) := [\ell] \setminus I(J).$$

と定める。今回の主結果は以下である。

Theorem 2.1 (Main Theorem). $[r]$ の任意の部分集合 J に対して、

$$\sum_{\substack{m_1=1 \\ \sum_{j \in J} a_{ij} m_j - \sum_{j \in [r] \setminus J} a_{ij} m_j \neq 0}} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \prod_{j \in [r]} \frac{1}{m_j^{h_j}} \prod_{i \in [\ell]} \frac{1}{|\sum_{j \in J} a_{ij} m_j - \sum_{j \in [r] \setminus J} a_{ij} m_j|^{k_i}}$$

が収束するような、 $X = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(\ell, r; \mathbb{N}_0)$, $\mathbf{h} = (h_j)_{j \in [r]} \in \mathbb{N}^r$, $\mathbf{k} = (k_i)_{i \in [\ell]} \in \mathbb{N}^\ell$ および $\mathbf{y} = (y_j)_{j \in [r]} \in \mathbb{R}^r$ に対して、

$$\zeta(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{y}, X) = (-1)^{\text{wt}(\mathbf{h}) + \text{wt}(\mathbf{k}) + r} \zeta(\mathbf{h}, \mathbf{k}, -\mathbf{y}, X) + \sum_{\emptyset \neq J \subset [r]} T_J(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{y}, X) \quad (2.1)$$

が成り立つ。ここで、

$$T_J(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{y}, X)$$

$$:= (-1)^{\text{wt}(\mathbf{h}_{\bar{J}}) + \text{wt}(\mathbf{k}_{\bar{I}(J)}) + r + n}$$

$$\times \sum_{\substack{m_j=1 \\ j \in \bar{J}}}^{\infty} \prod_{j \in \bar{J}} \frac{e^{-2\pi\sqrt{-1}y_j m_j}}{m_j^{h_j}} \prod_{i \in \bar{I}(J)} \frac{1}{(\sum_{j \in \bar{J}} a_{ij} m_j)^{k_i}} D(\mathbf{h}_J, \mathbf{k}_{I(J)}, \mathbf{y}_J; \Lambda(J)) \prod_{\substack{j \in J \\ i \in I(J)}} \frac{1}{h_j! k_i!}.$$

であり、 $D(\mathbf{h}_J, \mathbf{k}_{I(J)}, \mathbf{y}_J; \Lambda(J))$ は以下の関数を $\mathbf{t}_{I_{\Lambda(J)}} = (t_j)_{j \in I_{\Lambda(J)}}$ に関して原点で Taylor 展開した時の係数である。

$$G(\mathbf{t}_{I_{\Lambda(J)}}, \mathbf{y}_J; \Lambda(J))$$

$$= \sum_{B \in \mathcal{B}(\Lambda(J))} \left(\prod_{k \in \bar{I}_B} \frac{-t_k}{\dot{f}_k - \sum_{j \in I_B} \dot{f}_j \langle \vec{f}_k, \vec{f}_j^B \rangle - (t_k - \sum_{j \in I_B} t_j \langle \vec{f}_k, \vec{f}_j^B \rangle)} \right)$$

$$\times \frac{1}{|\mathbb{Z}^m / \langle \vec{B} \rangle|} \sum_{\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^m / \langle \vec{B} \rangle} \left(\prod_{j \in I_B} \frac{2\pi\sqrt{-1}t_j \exp(2\pi\sqrt{-1}(t_j - \dot{f}_j)\{\mathbf{y}_J + \mathbf{w}\}_{B, f_j})}{\exp(2\pi\sqrt{-1}t_j) - 1} \right)$$

すなわち、

$$G(\mathbf{t}_{I_{\Lambda(J)}}, \mathbf{y}_J; \Lambda(J)) = \sum_{\substack{\mathbf{h}_J \in \mathbb{N}_0^m \\ \mathbf{k}_{I(J)} \in \mathbb{N}_0^n}} D(\mathbf{h}_J, \mathbf{k}_{I(J)}, \mathbf{y}_J; \Lambda(J)) \prod_{\substack{j \in J \\ i \in I(J)}} \frac{t_j^{h_j} t_{r+i}^{k_i}}{h_j! k_i!}.$$

また、 δ_{jk} は Kronecker のデルタ記号であり、

$$\begin{aligned}
 m &= |J|, \\
 n &= |I(J)|, \\
 f_j &= ((\delta_{jk})_{k \in J}, 0) \quad (j \in J), \\
 f_{r+i} &= ((a_{ij})_{j \in J}, -\sum_{j \in \bar{J}} a_{ij} m_j) \quad (i \in I(J)), \\
 \Lambda(J) &= \{f_j, f_{r+i} \mid j \in J, i \in I(J)\}, \\
 \mathcal{B}(\Lambda(J)) &= \{B = \{f_{j_1}, \dots, f_{j_m}\} \subset \Lambda(J) \mid \vec{B} = \{\vec{f}_{j_1}, \dots, \vec{f}_{j_m}\} \text{ が } \mathbb{R}^m \text{ の基底}\}, \\
 I_{\Lambda(J)} &= \{j \mid f_j \in \Lambda(J)\}, \\
 I_B &= \{j \mid f_j \in B\}, \\
 \bar{I}_B &= I_{\Lambda(J)} \setminus I_B
 \end{aligned}$$

である。

Remark 2.2. (1) 一見、 $D(\mathbf{h}_J, \mathbf{k}_{I(J)}, \mathbf{y}_J; \Lambda(J))$ は m_j ($j \in \bar{J}$) に依存していないように見えるので、 $T_J(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{y}, X)$ の定義式において m_j たちに関する和の外に出せるように思えるのだが、 $D(\mathbf{h}_J, \mathbf{k}_{I(J)}, \mathbf{y}_J; \Lambda(J))$ を定める関数 $G(\mathbf{t}_{I_{\Lambda(J)}}, \mathbf{y}_J; \Lambda(J))$ に現れる $\dot{f}_k$ が m_j に依存している可能性があるため、一般的にはそのようなことはできない。

(2) $J \neq \emptyset$ であることから $|\bar{J}| \leq r-1$ なので、 $T_J(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{y}, X)$ の多重度は $r-1$ 以下である。

さて、今回の主結果と parity result との関係性であるが、重さと多重度の偶奇が異なるとき、Eq. (2.1) において $\text{wt}(\mathbf{h}) + \text{wt}(\mathbf{k}) + r$ が奇数になるので、簡単な計算から次の系を得ることができる。

Corollary 2.3. Theorem 2.1 の仮定を満たす $X, \mathbf{h}, \mathbf{k}$ および $\mathbf{y}$ に対して、 $\text{wt}(\mathbf{h}) + \text{wt}(\mathbf{k})$ と r の偶奇が異なるとき、次が成り立つ。

$$\text{Re}(\zeta(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{y}, X)) = \frac{1}{2} \sum_{\emptyset \neq J \subset [r]} T_J(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{y}, X).$$

上で述べたように、 $T_J(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{y}, X)$ の多重度は $r-1$ 以下であるので、この系は「重さと多重度の偶奇が異なる多重 Dirichlet 級数は、多重度が低いある種の多重 Dirichlet 級数を用いて表すことができる」ということを示唆していることがわかる。また、 $X = (\underbrace{1, \dots, 1}_r, \mathbf{y} = \mathbf{0})$ とし、 $D(\mathbf{h}_J, \mathbf{k}_{I(J)}, \mathbf{y}_J; \Lambda(J))$ の形を考えることで、Mordell-Tornheim 型多重ゼータ値に対する parity result を得ることができる。

3 さいごに

Corollary 2.3 の具体例を一つと、今後の課題について述べて本稿を終えたい。

- 具体例

Corollary 2.3 において、 $X = (1 \ 1), \mathbf{y} = \mathbf{0}$ とすると、 $\zeta(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{y}, X)$ は二重 Mordell-Toenheit 型多重ゼータ値になり、 $J = \{1, 2\}, \{1\}, \{2\}$ に対して $T_J(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{y}, X)$ を計算し、二項係数などを整理すると、次の表示を得ることができる。

$$\begin{aligned} \zeta_{MT}(h_1, h_2, k_1) &= (-1)^{h_1} \sum_{\substack{n=0 \\ n:\text{even}}}^{h_1+k_1-1} \left\{ \binom{h_1+k_1-1-n}{k_1-1} + \binom{h_1+k_1-1-n}{h_1-1} \right\} \zeta(h_1+h_2+k_1-n) \zeta(n) \\ &\quad + (-1)^{h_2} \sum_{\substack{n=0 \\ n:\text{even}}}^{h_2+k_1-1} \left\{ \binom{h_2+k_1-1-n}{k_1-1} + \binom{h_2+k_1-1-n}{h_2-1} \right\} \zeta(h_1+h_2+k_1-n) \zeta(n). \end{aligned}$$

- 今後の課題

行列 $X = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(\ell, r; \mathbb{N}_0)$ を特殊化すれば、 $\zeta(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{y}, X)$ がルート系のゼータ値になることはわかるが、 $\zeta(\mathbf{h}, \mathbf{k}, \mathbf{y}, X)$ の定義級数の分母に $m_j^{h_1}$ たちの積があることから、行列をどのように特殊化しても多重ゼータ値を復元できないことがわかる。今後は、多重ゼータ値の一般化になっているような多重 Dirichlet 級数に対して、類似結果が得られないか研究を進めていきたい。

謝辞

この度は、2018 年度 RIMS 共同研究 (公開型) 「解析的整数論とその周辺」の企画・運営をしてくださり、そして講演の機会を与えていただき誠にありがとうございました。この場を借りて、研究代表者である見正秀彦先生と研究副代表者である鈴木正俊先生に心より感謝申し上げます。

References

- [1] A. B. Goncharov, *Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes*, Math. Res. Lett. **5** (1998), no. 4, 497–516.
- [2] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. **142** (2006), no. 2, 307–338.
- [3] S. Kadota, T. Okamoto and K. Tasaka, *Evaluation of Tornheim's type of double series*, Illinois J. Math. **61** (2017), no. 1-2, 171–186.
- [4] H. Tsumura, *Combinatorial relations for Euler-Zagier sums*, Acta Arith. **111** (2004), no. 1, 27–42.
- [5] H. Tsumura, *On Witten's type of zeta values attached to $SO(5)$* , Arch. Math. (Basel) **82** (2004), no. 2, 147–152.
- [6] H. Tsumura, *On Mordell Tornheim zeta values*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 8, 2387–2393.