

単一システムの最適予防保全方式について

名古屋工業大学 児玉 正徳
安達 公一

1. はじめに

一般にシステムの信頼性解析では修理によってユニットまたはシステムは再生し、新品同様になると仮定している。この仮定が成立しないこともあるので、仮定が成立しないとき信頼性への影響を考察することは重要である。ここでは予防取替を考慮した修理によって必ずしも再生しない単一システムの時点アベイラビリティのラプラス変換形、定常アベイラビリティを求め、さらに定常アベイラビリティを最大にする事前取替時期(予防保全時期)を決定するという意味での最適予防保全方式を考察する。

Barlow, R and L. Hunter [1]は“稼働時間が T (一定値)に達すると取替を行なうがそれまでに起った故障に対しては小修理(minimal repair)のみ行なう”という方針を提案した。小修理というのは普通取われている修理のように新品同様(再

生)の状態に戻るのではなく、小修理直前の状態に戻るものをいう。これに対して Makabe, H and H. Morimura^[2]は“ n 回目の故障までは小修理を行ない、 $(n+1)$ 回目の故障時に取替を行なう”という方策を考えた。しかし、現実には小修理の仮定が成立しない場合も多いので、本論文ではこの仮定をはずし、修理を受けたシステムは修理を受ける前の故障分布とは必ずしも同一でない故障分布に従って稼働するものとする。

2. 記号とモデルの定義

記号

X_i : 再生後、第 i 回目の稼働中のシステムの寿命を表わす確率変数 ($1 \leq i \leq n$)

Y_j : 再生後、第 j 回目の修理中のシステムの修理時間を表わす確率変数 ($1 \leq j \leq n-1$)

Y : 再生後、第 n 回目の故障 (major breakdown) による取替が完了するまでの時間を表わす確率変数

Z_1 : 予防取替 (事前取替) を行なう時間間隔を表わす確率変数

Z_2 : 予防取替が完了するまでの時間を表わす確率変数

$F_i(t), f_i(t), \lambda_i(t), m_i$: X_i の分布関数, 密度関数, $f_i(t)/F_i(t)$ (瞬間故障率), 期待値 (有限)。

$G(t), g(t), \mu(t), \lambda$: Y_j の分布関数, 密度関数, $g(t)/g_j(t)$ (瞬間修理率), 期待値 (有限).

$A(t), a(t), \alpha(t), T$: Z_1 の分布関数, 密度関数, $a(t)/A(t)$, 期待値 (有限).

$B(t), b(t), \beta(t), T$: Z_2 の分布関数, 密度関数, $b(t)/B(t)$, 期待値 (有限).

$E^*(t), e^*(t), \rho^*(t), T^*$: Y の分布関数, 密度関数, $e^*(t)/E^*(t)$, 期待値 (有限).

$$F_{i \dots i}(y) = \int_0^y F_i(y-x) dF_{i \dots i}(x), \quad (2 \leq i \leq n).$$

$$f_{i \dots i}(y) = dF_{i \dots i}(y)/dy, \quad (2 \leq i \leq n).$$

$$Y_{i \dots i}(y) = f_{i \dots i}(y)/F_{i \dots i}(y), \quad (2 \leq i \leq n).$$

一般に $C(x)$ が分布関数のとき, $\bar{C}(x)$ は $1-C(x)$ を表す.

$P_i(t; x) \Delta x_i$: P {時刻 t で再生後, 1 回目の稼働中のシステムの稼働経過時間が x_i と $x_i + \Delta x_i$ の間にある},

$p_i(t; \sum_{j=1}^{i-1} y_j, x_i) \Delta x_i$: P {時刻 t で再生後, $(i-1)$ 回目までの全稼働経過時間が $\sum_{j=1}^{i-1} y_j$ で, i 回目の稼働中のシステムの稼働経過時間が x_i と $x_i + \Delta x_i$ の間にある}, $(2 \leq i \leq n)$.

$\bar{p}_j(t; \sum_{k=1}^j y_k, z_j) \Delta z_j$: P {時刻 t で再生後 j 回目までの全稼働経過時間が $\sum_{k=1}^j y_k$ で, j 回目の修理中のシステムの修理経過時間が z_j と Δz_j の間にある}, $(1 \leq j \leq n-1)$

$r(t; z) \Delta z$: P {時刻 t で予防取替中のシステムの取替経過

時間が Z と $Z+\Delta Z$ の間にあり

$r^*(t; Z) \Delta Z$: P {時刻} t で major breakdown による取替中のシステム
の取替経過時間が Z と $Z+\Delta Z$ の間にあり

$p_i(t)$: P {時刻} t でシステムが再生後 i 回目の動作の状態

$p_A(t)$: P {時刻} t でシステムが動作の状態 $\{ = \sum_{i=1}^n p_i(t)$

$\delta_{ij} = 1 \quad (i=j) ; \quad 0 \quad (i \neq j)$

一般に関数 $f(x)$ のラプラス変換を $\tilde{f}(s)$ とする。

モデルの定義

予防取替を考慮した単一システムを考えろ。 $t=0$ (再生点) で新品のシステムを稼働させる。稼働システムの寿命は一般分布 $f_1(t)$ に従う。システムが稼働時間が予防取替を行なう時間に達しないとき、第1回目の故障が起きると、ただちに修理を行なう。修理分布を一般分布 $G_1(t)$ とする。修理完了後必ずしも再生しないでシステムの寿命は $f_1(t)$ と必ずしも同一でない一般分布 $f_2(t)$ に従うとする。稼働時間の合計 (x_1+x_2) が予防取替を行なう時間に達しないとき、第2回目の故障が起きるとただちに修理を行なう。このときの修理時間分布を一般分布 $G_2(t)$ とする。修理完了後必ずしも再生しないでシステムの寿命は一般分布 $f_1(t)$ に従うとする。以下稼働時間の合計 $(x_1+x_2+\dots+x_i)$ が予防取替を行なう時間に

達しないとき第 i 回目 ($i \leq n-1$) の故障が起きただちに修理を行なう。修理分布は一般分布 $G_i(t)$ とする。修理完了後必ずしも再生しないでシステムの寿命は一般分布 $F_{n+1}(t)$ に従うとする。稼働時間の合計が予防取替を行なう時間に達しないとき n 回目の故障が起きると *major breakdown* が起ったといひ、ただちに事後取替 (故障後の取替) を行なう。このときの取替時間の分布は一般分布 $B^*(t)$ に従う。事後取替後システムは再生し、システムは寿命分布 $F_i(t)$ に従って稼働する。システムの稼働時間の合計が予防取替を行なう時間に達したときシステムに対して予防取替を行なう。予防取替を行なう時間間隔の分布と完了までの時間分布はそれぞれ一般分布 $A(t)$, $B(t)$ に従うものとする。予防取替を行なう事後システムは再生し、寿命分布 $F_i(t)$ に従う。再生後は上記と同様な動作をくり返す。以上のシステムの稼働に対する保全政策は次のように記述できる。「次の (i), (ii) のいずれか早い方が起った時点で、(i) に対しては事後取替, (ii) に対しては事前取替を行ない、それ以前の故障に対しては修理を行なう。

(i) 稼働時間の合計が事前取替を行なう時間に達する前に n 回目の故障 (*major breakdown*) が起る。

(ii) 稼働時間の合計が事前取替を行なう時間に達する。

修理によつてはシステムは必ずしも再生しないで、事前取

替，事後取替によつてはシステムは再生する。システムの
状態推移は図1のようになら。

3. システムの解析

システムの状態より次の差分方程式を得る。

$$P_i(t+\Delta; x_i+\Delta) = P_i(t; x_i) \{1 - [\lambda_i(x_i) + \alpha(x_i)]\Delta\} + o(\Delta) \quad (1)$$

$$P_i(t+\Delta; \sum_{k=1}^{i-1} y_k, x_i+\Delta) = P_i(t; \sum_{k=1}^{i-1} y_k, x_i) \{1 - [\lambda_i(x_i) + \alpha(\sum_{k=1}^{i-1} y_k + x_i)]\Delta\} + o(\Delta), \quad (2 \leq i \leq n) \quad (2)$$

$$g_j(t+\Delta; \sum_{k=1}^j y_k, z_j+\Delta) = g_j(t; \sum_{k=1}^j y_k, z_j) \{1 - \mu_j(z_j)\Delta\} + o(\Delta) \quad (1 \leq j \leq n-1) \quad (3)$$

$$r(t+\Delta; z+\Delta) = r(t; z) \{1 - \beta(z)\Delta\} + o(\Delta) \quad (4)$$

$$r^*(t+\Delta; z+\Delta) = r^*(t; z) \{1 - \beta^*(z)\Delta\} + o(\Delta) \quad (5)$$

(1) - (5)より次の差分方程式をうる。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda_i(x_i) + \alpha(x_i) \right] P_i(t; x_i) = 0 \quad (6)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda_i(x_i) + \alpha(\sum_{k=1}^{i-1} y_k + x_i) \right] P_i(t; \sum_{k=1}^{i-1} y_k, x_i) = 0 \quad (2 \leq i \leq n) \quad (7)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z_j} + \mu_j(z_j) \right] g_j(t; \sum_{k=1}^j y_k, z_j) = 0, \quad (1 \leq j \leq n-1) \quad (8)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} + \beta(z) \right] r(t; z) = 0 \quad (9)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} + \beta^*(z) \right] r^*(t; z) = 0 \quad (10)$$

これらの方程式は次の境界条件, 初期条件のもとで解かれる。

$$P_i(t; 0) = \int_0^t r(t; z) \beta(z) dz + \int_0^t r^*(t; z) \beta^*(z) dz \quad (11)$$

$$P_i(t; \sum_{k=1}^{i-1} y_k, 0) = \int_0^t p_{i-1}(t; \sum_{k=1}^{i-1} y_k, z_{i-1}) \mu_{i-1}(z_{i-1}) dz_{i-1} \quad (2 \leq i \leq n) \quad (12)$$

$$q_i(t; x_i, 0) = P_i(t; x_i) \lambda_i(x_i) \quad (13)$$

$$q_j(t; \sum_{k=1}^{j-1} y_k + x_j, 0) = p_j(t; \sum_{k=1}^{j-1} y_k, x_j) \lambda_j(x_j) \quad (2 \leq j \leq n-1) \quad (14)$$

$$P_i(t; 0, 0) = q_j(t; 0, 0) = 0, \quad (2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} r(t; 0) = & \int_0^t P_i(t; x_1) \alpha(x_1) dx_1 + (1 - \delta_{in}) \left[\int_0^t \int_0^{t-y_1} P_2(t; y_1, x_2) \alpha(y_1 + x_2) \right. \\ & \times dx_2 dy_1 + \cdots + \int_0^t \int_0^{t-y_1} \cdots \int_0^{t - \sum_{k=1}^{n-1} y_k} p_n(t; \sum_{k=1}^{n-1} y_k, x_n) \alpha(\sum_{k=1}^{n-1} y_k + x_n) dx_n dy_{n-1} \\ & \left. \cdots dy_1 \right] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} r^*(t; 0) = & \delta_{in} \int_0^t P_i(t; x_1) \lambda_1(x_1) dx_1 + (1 - \delta_{in}) \left[\int_0^t \int_0^{t-y_1} \cdots \int_0^{t - \sum_{k=1}^{n-1} y_k} \right. \\ & \left. \cdot p_n(t; \sum_{k=1}^{n-1} y_k, x_n) \lambda_n(x_n) dx_n dy_{n-1} \cdots dy_1 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$P_i(0, 0) = 1 \quad (18)$$

(6)-(7)の両辺をラプラス変換すると

$$\left[s + \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_1(x_1) + \alpha(x_1) \right] \tilde{P}_1(s; x_1) = 0 \quad (19)$$

$$\left[s + \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda_i(x_i) + \alpha\left(\sum_{k=1}^{i-1} y_k + x_i\right) \right] \tilde{P}_i(s; \sum_{k=1}^{i-1} y_k, x_i) = 0 \quad (2 \leq i \leq n) \quad (20)$$

$$\left[s + \frac{\partial}{\partial z_j} + \mu_j(z_j) \right] \tilde{P}_j(s; \sum_{k=1}^j y_k, z_j) = 0 \quad (1 \leq j \leq n-1) \quad (21)$$

$$\left[s + \frac{\partial}{\partial z} + \beta(z) \right] \tilde{F}(s; z) = 0 \quad (22)$$

$$\left[s + \frac{\partial}{\partial z} + \beta^*(z) \right] \tilde{F}^*(s; z) = 0 \quad (23)$$

$$\tilde{P}_i(s; 0) = \int_0^\infty \tilde{F}(s; z) \beta(z) dz + \int_0^\infty \tilde{F}^*(s; z) \beta^*(z) dz \quad (24)$$

$$\tilde{P}_i(s; \sum_{k=1}^{i-1} y_k, 0) = \int_0^\infty \tilde{P}_{i-1}(s; \sum_{k=1}^{i-1} y_k, z_{i-1}) \mu_{i-1}(z_{i-1}) dz_{i-1} \quad (2 \leq i \leq n) \quad (25)$$

$$\tilde{P}_1(s; x_1, 0) = \tilde{P}_1(s; x_1) \lambda_1(x_1) \quad (26)$$

$$\tilde{P}_j(s; \sum_{k=1}^{j-1} y_k + x_j, 0) = \tilde{P}_j(s; \sum_{k=1}^{j-1} y_k, x_j) \lambda_j(x_j), \quad (2 \leq j \leq n-1) \quad (27)$$

$$\tilde{P}_i(s; 0, 0) = \tilde{P}_j(s; 0, 0) = 0, \quad (2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(s; 0) = & \int_0^\infty \tilde{P}_1(s; x_1) \alpha(x_1) dx_1 + (1 - \delta_{in}) \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{P}_2(s; y_1, x_2) \alpha(y_1 + x_2) \right. \\ & \times dx_2 dy_1 + \dots + \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \tilde{P}_n(s; \sum_{k=1}^{n-1} y_k, x_n) \alpha\left(\sum_{k=1}^{n-1} y_k + x_n\right) dx_n dy_{n-1} \\ & \left. \dots dy_1 \right] \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}^*(s; 0) = & \delta_{in} \int_0^\infty \tilde{P}_1(s; x_1) \lambda_1(x_1) dx_1 + (1 - \delta_{in}) \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \tilde{P}_n(s; \sum_{k=1}^{n-1} y_k, x_n) \\ & \times \lambda_n(x_n) dx_n dy_{n-1} \dots dy_1 \end{aligned} \quad (30)$$

(19)-(23)の解が

$$\tilde{F}_i(s; x_i) = \tilde{F}_i(s; 0) e^{-sx_i} \bar{F}_i(x_i) \bar{A}_i(x_i) \quad (31)$$

$$\tilde{F}_i(s; \sum_{k=1}^{i-1} y_k, x_i) = \tilde{F}_i(s; \sum_{k=1}^{i-1} y_k, 0) e^{-sx_i} \bar{F}_i(x_i) \bar{A}(\sum_{k=1}^{i-1} y_k + x_i) / \bar{A}(\sum_{k=1}^{i-1} y_k) \quad (32)$$

$$\tilde{G}_j(s; \sum_{k=1}^j y_k, z_j) = \tilde{G}_j(s; \sum_{k=1}^j y_k; 0) e^{-sz_j} \bar{G}_j(z_j) \quad (33)$$

$$\tilde{F}(s; z) = \tilde{F}(s; 0) e^{-sz} \bar{B}(z) \quad (34)$$

$$\tilde{F}^*(s; z) = \tilde{F}^*(s; 0) e^{-sz} \bar{B}^*(z) \quad (35)$$

であるこゝを用いると式(24), 式(25), 式(26) および 式(27)より
 恒式を得る。

$$\tilde{F}_i(s; 0) = \tilde{F}_i(s; 0) \tilde{b}(s) + \tilde{F}^*(s; 0) \tilde{b}^*(s) + 1 \quad (36)$$

$$\tilde{G}_i(s; x_i, 0) = \tilde{F}_i(s; 0) e^{-sx_i} f_i(x_i) \bar{A}(x_i) \quad (37)$$

$$\tilde{G}_j(s; \sum_{k=1}^j y_k, 0) = \tilde{F}_j(s; \sum_{k=1}^j y_k, 0) f_j(y_j) e^{-sy_j} \bar{A}(\sum_{k=1}^j y_k) / \bar{A}(\sum_{k=1}^{j-1} y_k) \quad (38)$$

$$\tilde{F}_i(s; \sum_{k=1}^{i-1} y_k, 0) = \tilde{G}_{i-1}(s; \sum_{k=1}^{i-1} y_k, 0) \tilde{F}_{i-1}(s) \quad (39)$$

式(32), 式(38) および 式(39)より恒式を得る

$$\tilde{F}_i(s; \sum_{k=1}^{i-1} y_k, x_i) = \tilde{F}_i(s; 0) e^{-sx_i} \bar{F}_i(x_i) \bar{A}(\sum_{k=1}^{i-1} y_k + x_i) \prod_{m=1}^{i-1} \tilde{F}_m(s) f_m(y_m) e^{-sy_m} \quad (40)$$

式(40)を式(29) および 式(30)に代入して恒式を得る

$$\begin{aligned} \tilde{F}(s; 0) = \tilde{F}_i(s; 0) & \left\{ \int_0^\infty e^{-sx_i} \bar{F}_i(x_i) dA(x_i) + (1 - \delta_{in}) \left[\tilde{F}_1(s) \int_0^\infty e^{-sy} (F_1(y) \right. \right. \\ & - \int_0^y F_2(y-x_2) dF_1(x_2)) dA(y) + \tilde{F}_2(s) \tilde{F}_1(s) \int_0^\infty e^{-sy} (F_{12}(y) \\ & - \int_0^y F_3(y-x_3) dF_{12}(x_3)) dA(y) + \cdots + \tilde{F}_1(s) \cdots \tilde{F}_{n-1}(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^\infty e^{-sy} \left(F_{1\dots n-1}(y) - \int_0^y F_n(y-x_n) dF_{1\dots n-1}(x_n) \right) dA(y) \Big\} \\
& = \tilde{P}_1(s; 0) \Big\{ \int_0^\infty e^{-sx} \bar{F}_1(x) dA(x) + (1-\delta_{1n}) \left[\tilde{g}_1(s) \int_0^\infty e^{-sy} F_1(y) dA(y) \right. \\
& \quad + \tilde{g}_1(s) (\tilde{g}_2(s) - 1) \int_0^\infty e^{-sy} F_{12}(y) dA(y) + \dots + \tilde{g}_1(s) \dots \tilde{g}_{n-2}(s) \\
& \quad \times (\tilde{g}_{n-1}(s) - 1) \int_0^\infty e^{-sy} F_{1\dots n-1}(y) dA(y) - \tilde{g}_1(s) \dots \tilde{g}_{n-1}(s) \\
& \quad \times \int_0^\infty e^{-sy} F_{1\dots n}(y) dA(y) \Big\} \tag{41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{P}^*(s; 0) &= \tilde{P}_1(s; 0) \Big\{ \delta_{1n} \int_0^\infty e^{-sx} \bar{A}(x) dF_1(x) + (1-\delta_{1n}) \prod_{m=1}^{n-1} \tilde{g}_m(s) \\
& \quad \times \int_0^\infty e^{-sy} \bar{A}(y) dF_{1\dots n}(y) \Big\} \tag{42}
\end{aligned}$$

式(36), 式(41) および 式(42) から式(43) および 式(44)を得る

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(s; 0) &= \left\{ 1 - \tilde{b}(s) \right\} \Big\{ \int_0^\infty e^{-sx} \bar{F}_1(x) dA(x) + (1-\delta_{1n}) \left[\tilde{g}_1(s) \int_0^\infty e^{-sy} F_1(y) dA(y) \right. \\
& \quad + \tilde{g}_1(s) (\tilde{g}_2(s) - 1) \int_0^\infty e^{-sy} F_{12}(y) dA(y) + \dots + \prod_{m=1}^{n-2} \tilde{g}_m(s) \\
& \quad \times (\tilde{g}_{n-1}(s) - 1) \int_0^\infty e^{-sy} F_{1\dots n-1}(y) - \prod_{m=1}^{n-1} \tilde{g}_m(s) \int_0^\infty e^{-sy} F_{1\dots n}(y) \\
& \quad \times dA(y) \Big\} - \tilde{b}(s) \Big\{ \delta_{1n} \int_0^\infty e^{-sx} \bar{A}(x) dF_1(x) + (1-\delta_{1n}) \prod_{m=1}^{n-1} \tilde{g}_m(s) \\
& \quad \times \int_0^\infty e^{-sy} \bar{A}(y) dF_{1\dots n}(y) \Big\} \Big\}^{-1} \tag{43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{P}_1(s; 0) &= \text{Tr} \left[\int_0^\infty \bar{F}_1(x) dA(x) + (1 - \delta_{1n}) \int_0^\infty (F_1(y) - F_{1 \dots n}(y)) dA(y) \right] \\
&+ \int_0^\infty x \bar{F}_1(x) dA(x) + (1 - \delta_{1n}) \left[l_1 \int_0^\infty \bar{F}_1(y) dA(y) + \int_0^\infty x F_1(x) dA(x) \right. \\
&+ l_2 \int_0^\infty \bar{F}_{12}(y) dA(y) + \dots + l_{n-1} \int_0^\infty \bar{F}_{1 \dots n-1}(y) dA(y) \\
&+ (l_1 + \dots + l_{n-1}) \int_0^\infty \bar{F}_{1 \dots n}(y) dA(y) - \int_0^\infty y F_{1 \dots n}(y) dA(y) \Big] \\
&+ \text{Tr}^* \left[\delta_{1n} \int_0^\infty \bar{A}(x) dF(x) + (1 - \delta_{1n}) \int_0^\infty \bar{A}(y) dF_{1 \dots n}(y) dy \right] \\
&+ \delta_{1n} \int_0^\infty x \bar{A}(x) dF(x) + (1 - \delta_{1n}) \left[(l_1 + \dots + l_{n-1}) \int_0^\infty \bar{A}(y) dF_{1 \dots n}(y) \right. \\
&+ \left. \int_0^\infty y \bar{A}(y) dF_{1 \dots n}(y) \right] \\
&= \text{Tr} \int_0^\infty \bar{F}_{1 \dots n}(y) dA(y) + \text{Tr}^* \int_0^\infty \bar{A}(y) dF_{1 \dots n}(y) \\
&+ \int_0^\infty \bar{A}(y) \bar{F}_{1 \dots n}(y) dy + (1 - \delta_{1n}) \left[l_1 \int_0^\infty \bar{F}_1(y) dA(y) \right. \\
&+ \dots + l_{n-1} \int_0^\infty \bar{F}_{1 \dots n-1}(y) dA(y) \Big] \quad (44)
\end{aligned}$$

また $\tilde{P}_i(s)$ ($1 \leq i \leq n$) は式(31) および式(32)を用いて式(45)で与えられる。

$$\begin{cases} \tilde{P}_1(s) = \int_0^\infty \tilde{P}_1(s; x) dx = \tilde{P}_1(s; 0) \int_0^\infty e^{-sx} \bar{A}(x) \bar{F}_1(x) dx \\ \tilde{P}_i(s) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \tilde{P}_i(s; \sum_{k=1}^{i-1} y_k, x_i) dx_i dy_{i-1} \dots dy_1 \end{cases} \quad (45)$$

$$\left| = \tilde{P}_i(s; 0) \prod_{m=1}^{i-1} \tilde{g}_m(s) \int_0^\infty e^{-sy} \bar{A}(y) \left[F_{1 \dots i-1}(y) - F_{1 \dots i}(y) \right] dy \right. \\ \left. 2 \leq i \leq n \right.$$

時点アベイラビリティ $P_A(t)$ (時刻 t でシステムが稼動している確率) は $P_1(t) + \dots + P_n(t)$ で与えられるから $\tilde{P}_A(s)$ および定常アベイラビリティ $P_A(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{P}_A(s)$ が式(45), 式(46) および式(44) を用いて得られる。従って次の定理を得る。

【定理1】 システムの時点アベイラビリティ $P_A(t)$ のラプラス変換 $\tilde{P}_A(s)$ および定常アベイラビリティ $P_A(\infty)$ は式(46) および式(47) で与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_A(s) = \tilde{P}_i(s; 0) \left\{ \int_0^\infty e^{-sy} \bar{A}(y) \left[\bar{F}_1(y) + \tilde{g}_1(s) (F_1(y) - F_{12}(y)) + \tilde{g}_1(s) \right. \right. \\ \times \tilde{g}_2(s) (F_{12}(y) - F_{123}(y)) + \dots + \prod_{m=1}^{n-1} \tilde{g}_m(s) (F_{1 \dots n-1}(y) \\ \left. \left. - F_{1 \dots n}(y)) \right] dy \right\} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} P_A(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{P}_A(s) \\ &= \int_0^\infty \bar{A}(y) \bar{F}_{1 \dots n}(y) dy \left\{ \text{Tr} \int_0^\infty \bar{F}_{1 \dots n}(y) dA(y) + \text{Tr}^* \int_0^\infty \bar{A}(y) \right. \\ &\quad \times dF_{1 \dots n}(y) + \int_0^\infty \bar{A}(y) \bar{F}_{1 \dots n}(y) dy + (1 - \delta_{1n}) \\ &\quad \times \left[l_1 \int_0^\infty F_1(y) dA(y) + \dots + l_{n-1} \int_0^\infty F_{1 \dots n-1}(y) dA(y) \right] \Big\}^{-1} \end{aligned} \quad (47)$$

ここに $\tilde{p}(s; 0)$ は 式(43) で与えられる。

4. 最適予防保全策

いままでは確率的事前取替を議論したが この節ではよく使用されている定期事前取替に限定しよう。 つまり、

$$A(t) = 0 \quad (t < T) ; 1 \quad (t \geq T_0) \quad (48)$$

を仮定することである。 前節では確率密度 $a(t)$ の存在を仮定したが 式(48) が成立する場合でも式(47) が成立することは容易に確かめられるから このとき式(47)は

$$\begin{aligned} P_A(\infty) = & \int_0^T \bar{F}_{1 \dots n}(y) dy \left\{ T_r \bar{F}_{1 \dots n}(T) + T_r^* \int_0^T dF_{1 \dots n}(y) \right. \\ & \left. + \int_0^T \bar{F}_{1 \dots n}(y) dy + (1 - \delta_m) [l_1 F_1(T) + \dots + l_{n-1} F_{1 \dots n-1}(T)] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (49)$$

となる。

[定理2]

$$\delta_{1 \dots n}(T) + (1 - \delta_m) [l_1 f_1(T) + \dots + l_{n-1} f_{n-1}(T)] / [(T_r^* - T_r) \bar{F}_{1 \dots n-1}(T)] \quad (50)$$

は増加関数であって, $T_r^* > T_r$ と仮定する。

$$(i) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \delta_{1 \dots n}(T) + (1 - \delta_m) [l_1 f_1(T) + \dots + l_{n-1} f_{n-1}(T)] / [(T_r^* - T_r) \times \bar{F}_{1 \dots n}(T)] \right\}$$

$$> \left[1 + (\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_{n-1} + T_r) / (T_r^* - T_r) \right] / (m_1 + \dots + m_n) \quad (50)$$

ならば、次式

$$\begin{aligned} & \left\{ \gamma_{1\dots n}(T) + (1 - \delta_m) \left(\ell_1 f_1(T) + \dots + \ell_{n-1} f_{1\dots n-1}(T) \right) / \left[(T_r^* - T_r) \right. \right. \\ & \quad \times \bar{F}_{1\dots n}(T) \left. \left. \right] \right\} \int_0^T \bar{F}_{1\dots n}(y) dy - \left\{ F_{1\dots n}(T) + (1 - \delta_m) \right. \\ & \quad \times \left(\ell_1 F_1(T) + \dots + \ell_{n-1} F_{1\dots n-1}(T) \right) / (T_r^* - T_r) \left. \right\} = T_r / (T_r^* - T_r) \end{aligned} \quad (52)$$

を満たす唯一で有限な解 T_0 が最適予防保全時間(定常アベイラビリティを最大にする予防保全時間)となる。このとき

$$\begin{aligned} PA(\infty) &= \left\{ 1 + (T_r^* - T_r) \gamma_{1\dots n}(T_0) + (1 - \delta_m) \left[\ell_1 f_1(T_0) + \dots + \ell_{n-1} f_{1\dots n-1}(T_0) \right] \right. \\ & \quad \left. / \bar{F}_{1\dots n}(T_0) \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (53)$$

となる。

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} & \left\{ \gamma_{1\dots n}(T) + (1 - \delta_m) \left[\ell_1 f_1(T) + \dots + \ell_{n-1} f_{1\dots n-1}(T) \right] \right. \\ & \quad \left. / \left[(T_r^* - T_r) \bar{F}_{1\dots n}(T) \right] \right\} \\ & \leq \left[1 + (1 - \delta_m) (\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_{n-1} + T_r) / (T_r^* - T_r) \right] / (m_1 + \dots + m_n) \end{aligned} \quad (54)$$

ならば最適予防保全時間は $T_0 \rightarrow \infty$ となる。即ち事前取替をしない方がよい。このとき

$$R_A(\infty) = \frac{m_1 + \cdots + m_n}{m_1 + \cdots + m_n + (1 - \delta_{in})(l_1 + \cdots + l_{n-1}) + T_r^*} \quad (55)$$

証明 式(49)の右辺を T に関して微分して、0とおき

$\gamma_{1 \dots n}(T) = f_{1 \dots n}(T) / \bar{F}_{1 \dots n}(T)$ を用いて書き直せば、式(52)を得る。

式(52)の左辺を $g_n(T)$ とおけば

$$\begin{aligned} \frac{dg_n(T)}{dT} = & \int_0^T \bar{F}_{1 \dots n}(y) dy \cdot \frac{d}{dT} \left\{ \gamma_{1 \dots n}(T) + (1 - \delta_{in}) [l_1 f_1(T) \right. \\ & \left. + \cdots + l_{n-1} f_{1 \dots n-1}(T)] / [(T_r^* - T_r) \bar{F}_{1 \dots n}(T)] \right\} \end{aligned}$$

となり、 $g_n(T)$ と関数(50)の単調性は一致する。仮定より

$g_n(T)$ は単調増加関数となる。関数(50)を $k_n(T)$ とおけば

$$\begin{aligned} (i) \lim_{T \rightarrow \infty} g_n(T) = & \left[\lim_{T \rightarrow \infty} k_n(T) \right] (m_1 + \cdots + m_n) - \left[1 + (1 - \delta_{in})(l_1 + \cdots + l_{n-1}) \right. \\ & \left. / (T_r^* - T_r) \right] > T_r / (T_r^* - T_r) \end{aligned}$$

すなわち、式(51)が成立すれば $g_n(0) < T_r / (T_r^* - T_r) < g_n(\infty)$

となり、式(52)を満たす唯一で有限な解 T_0 が存在し、それが最適予防保全時間となる。そして式(52)を式(49)に代入して式(53)を得る。

$$(ii) \quad g_n(\infty) = f_n(\infty) (m_1 + \dots + m_n) - \left[1 + (1 - \delta_{in}) (l_1 + \dots + l_{n-1}) \right]$$

$$\left/ (T_r^* - T_r) \right] \leq T_r / (T_r^* - T_r)$$

であるから，式(49)の右辺は T の単調増加関数となり，最適予防保全時間は $T_0 \rightarrow \infty$ となる。式(49)で $T \rightarrow \infty$ として式(55)を得る。

[例] $n=2$, $f_1(t) = \lambda^3 t^2 e^{-\lambda t} / 2$, $f_2(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$ とする，
このとき， $m_1 = 3/\lambda$, $m_2 = \lambda/2$, $F_2(t) = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}$,

$$F_{12}(t) = \int_0^t F_2(t-x) f_1(x) dx = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^4 (\lambda t)^k / k!$$

$$\bar{F}_{12}(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^4 (\lambda t)^k / k! \quad , \quad f_{12}(t) = \lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^4 / 4! \quad \text{となり}$$

$$f_2(T) = \gamma_{12}(T) + l_1 f_1(T) / [(T_r^* - T_r) \bar{F}_{12}(T)]$$

$$= \left\{ \lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^4 / 4! + [l_1 / (T_r^* - T_r)] \lambda^3 t^2 e^{-\lambda t} / 2 \right\} / \left[e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^4 (\lambda t)^k / k! \right] \quad (56)$$

$$\begin{aligned} f_2'(T) = & \lambda^3 t \left\{ l_1 (1 + \lambda t / 2) / (T_r^* - T_r) + (\lambda t)^2 / 6 + (\lambda t)^3 [3 - 2l_1 / (T_r^* - T_r)] / 24 \right. \\ & \left. + (\lambda t)^4 [1 - l_1 / (T_r^* - T_r)] / 24 \right. \\ & \left. + (\lambda t)^5 / 144 \right\} / \left[\sum_{k=0}^4 (\lambda t)^k / k! \right]^2 \end{aligned} \quad (57)$$

を得る。

$3 - 2\ell_1 / (T_r^* - T_r) > 0$ かつ $1 - \ell_1 / (T_r^* - T) > 0$ ならば
 $\kappa_2'(T) > 0$ であることより

$$T_r^* > T_r + \ell_1 \quad (58)$$

ならば $\kappa_2'(T) > 0$, $T > 0$ を得る。また

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \kappa_2(T) \int_0^T \bar{F}_{12}(y) dy = \lambda(m_1 + m_2) = 5 \quad \text{より}$$

$$4 > (\ell_1 + T_r) / (T_r^* - T_r) \quad (59)$$

のとき式(51) が成立し,

$$4 \leq (\ell_1 + T_r) / (T_r^* - T_r) \quad (60)$$

のとき式(54) が成立する 式(58), 式(59). および式(60) より

$T_r^* > \max(T_r + \ell_1, (5T_r + \ell_1)/4)$ ならば 式(51) が成立し,
 唯一有限な $\chi_0 (= T_0 \lambda)$ が存在し, χ_0 は次の方程式の根として
 求めらる。

$$\left\{ \chi^2 \left[\sigma / (\rho^* - \rho) + \chi^2 / 12 \right] \left[5 - e^{-\chi} \sum_{k=0}^4 (5-k) \chi^k / k! \right] \right\} \\
/ \left[2 \sum_{k=0}^4 \chi^k / k! \right] - \left\{ \left[1 + \sigma / (\rho^* - \rho) \right] \left[1 - e^{-\chi} (1 + \chi + \chi^2 / 2) \right] \right. \\
\left. - e^{-\chi} \chi^3 (1 + \chi / 4) / 6 \right\} = \frac{\rho}{\rho^* - \rho} \quad (61)$$

ここに $\chi = T \lambda$, $\rho = T_r \lambda$, $\rho^* = T_r^* \lambda$, $\sigma = \ell_1 \lambda$. このとき

$$P_A(\infty) = \frac{\sum_{k=0}^4 x_0^k / k!}{\sum_{k=0}^4 x_0^k / k! + (p^* - p)x_0^4 / 24 + \sigma x_0^2 / 2} \quad (62)$$

となる。

$T_r + d_1 < T_r^* \leq (5T_r + d_1)$ ならば式(54) が成立し, $T_0 \rightarrow \infty$ となり, 事前取替をしない方がよい。このとき

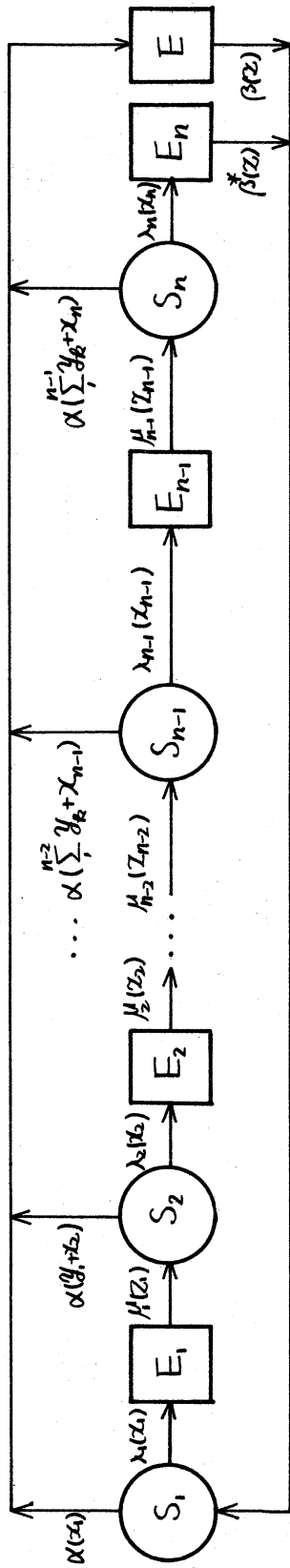
$$P_A(\infty) = \frac{5}{5 + \sigma + p^*}$$

となる。

図2に, $p = 10^{-2}$, $\sigma = 10^{-3}$ のときの最適解 x_0 を p^* の関数として図示し, またそのときの定常アバイラビリティを $P_A(x_0, \infty)$ (式(62)の値) と書き, 図示した。

参考文献

- [1] Barlow, R. and L. Hunter; "Optimum Preventive Maintenance Policies", *Ops.*, 8 (1960), pp. 90-100
- [2] Makabe, H. and H. Morimura; "A new Policy for Preventive Maintenance", *Journ. Op. Res. Soc. Japan*, 5 (1963), pp. 110-124



S_i ; 再生後, システムが i 回目の動作の状態, ($1 \leq i \leq n$)

E_i ; 再生後, システムが i 回目の故障をし修理の状態, ($1 \leq i \leq n-1$)

E_n ; 再生後, major breakdown (n 回目の故障) して取替の状態,

E ; 再生後, 事前取替の状態,

図1. システムの状態の推移

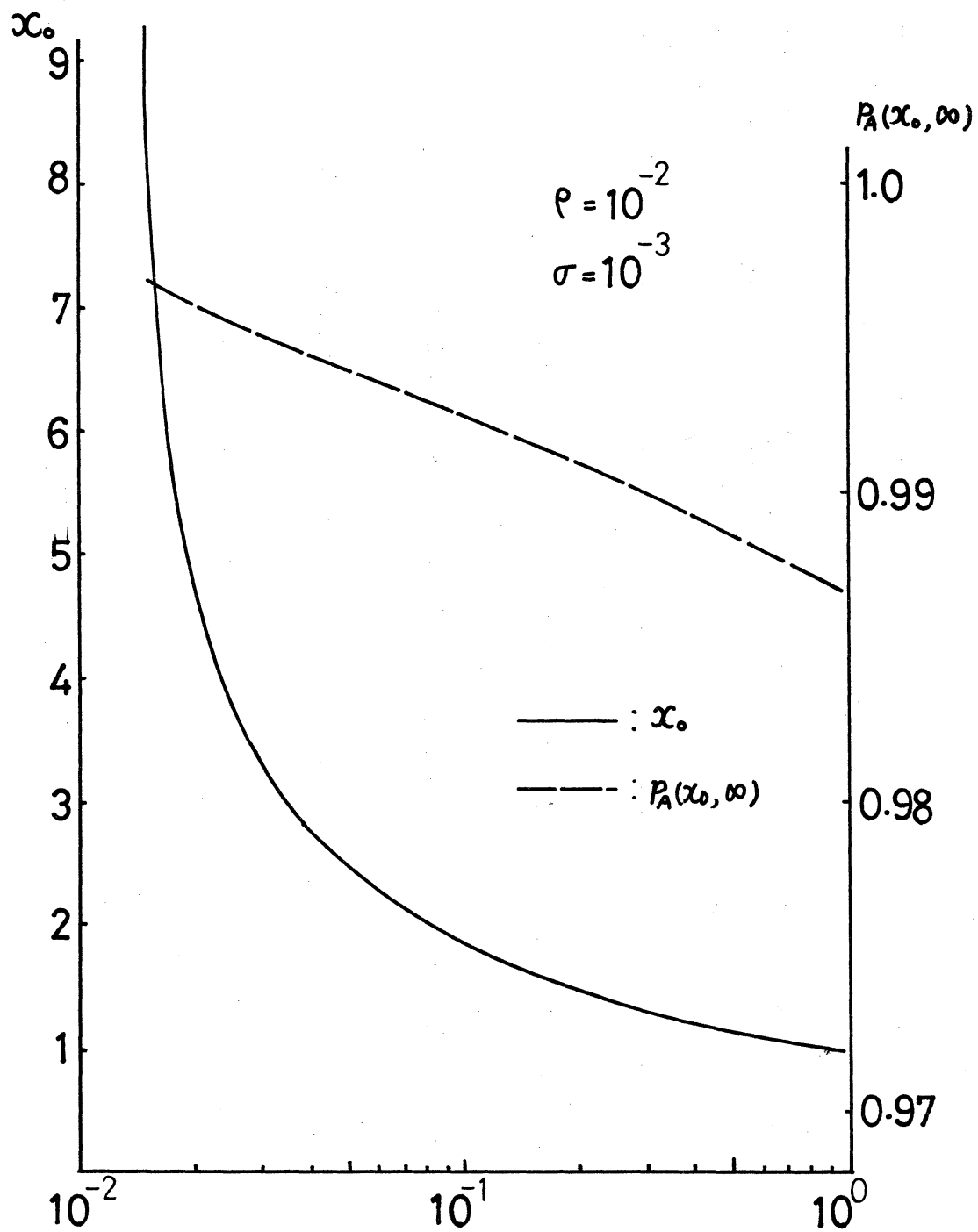


図2. 最適解 x_0 および定常アベラ

ビリティ $P_A(x_0, \infty)$ の数値例