

Thin set 上の測度について

都大 理学部 佐伯貞浩

G を locally compact abelian group, $\Gamma = \hat{G}$ をその dual とする。 G 上の任意の測度 μ に対して, $\mu^1 = \mu$, $\mu^{n+1} = \mu^n * \mu$ とおく。まず, この主要定理を次の形に述べる。

定理 1. すべての non-discrete locally compact abelian group は, 任意の正整数 n に対して, 次の条件を満たす非負値実測度 $\mu \neq 0$ を持つ:

(a) $\mu^1, \dots, \mu^n$ はすべて Haar 測度に関して特異な測度である。

(b) n だけに関係する正整数 m が存在して, μ^m は Haar 測度に関して絶対連続である。

証明は §6 で与える。この定理の応用を述べるために, G 上の measure algebra を $M(G)$ とし, その max. ideal

space を $\text{Hom}(G)$ とする。又、絶対連続な測度の作る閉 ideal を $M_a(G)$, その Fourier 変換 $\hat{\mu}$ が $\hat{G}$ の外部で 0 となる様な測度 μ の作る閉 ideal を $M_v(G)$ とする。

系. G が non-discrete ならば, 商空間 $M_v(G)/M_a(G)$ は無限次元の Banach 空間である。

証明. 任意の正整数 n に対して, 定理の条件 (a), (b) を満たす測度 $\mu \neq 0$ を取る。もし $\mu \in \text{Hom}(G) \setminus \hat{G}$ とすれば, $\hat{\mu}^n(\mu) = (\hat{\mu}(\mu))^n = 0$ 。よって $\mu \in M_v(G)$ 。又, 条件 (a), (b) より, $\mu^1, \dots, \mu^n$ は mod $M_a(G)$ で 1 次独立である。(Q. E. D.).

§1. 記号, 定義, 及び補助定理.

任意の G に対して, h_G はその Haar 測度を表わし, G が compact のときは常に $h_G(G)=1$ とする。 G の各元 x に対し $\delta(x)$ を x での点測度, 又 $\Delta(x) = \frac{1}{2} \{ \delta(x) + \delta(-x) \}$ とする。 G の任意の集合 P , 及び $n \in \mathbb{Z}^+$ に対して,

$$n P = \{ \sum_{j=1}^n x_j : x_j \in P, 1 \leq j \leq n \}$$

と定義し, $|P|$ は P の濃度を表わす。さらに, 測度 μ の台を $S(\mu)$ で表わすことにする。

さて, compact G で, 次のような部分群の列 Σ を含むものを考える: $\Sigma = \{ G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_m \supset \dots \}$, かつ

$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$ 。この列 Σ に対して、確率空間 (Ω, B, h) を次の族なものとする： $\Omega = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$ ； B は Ω の (位相的) Borel field； h は直積測度 $\bigotimes_{n=1}^{\infty} h_{G_n}$ 。

定義 1. Ω の各元 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots)$ に対して、

$$\mu = \mu_{\omega} = \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mu_n \in M^+(G)$$

とおく。こゝに $\mu_n = \Delta(\omega_n)$ であって、convolution の収束は、 $M(G)$ の弱位相で考える。この族な測度 μ_{ω} を $\Omega(\Sigma)$ 測度という。

補助定理. 正整数 n に対して、 Σ が $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n/m} h_{G_n}(G_{n+1}) = 0$ を満たせば、すべての $\Omega(\Sigma)$ 測度は定理 1 の条件 (a) を満足する。

さて n , $m \in \mathbb{Z}^+$ に対して

$$\sigma(A) = \int_0^1 |\cos 2\pi t|^A dt$$

$$\sigma(A; m) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left| \cos \frac{2\pi}{m} j \right|^A$$

とおく。このとき、 $\sigma(A) = A(A) A^{-\frac{1}{2}}$ とおけば、

$$\lim A(A) = (2/\pi)^{\frac{1}{2}}, \quad A(A) < (2/\pi)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sigma(A; m) \leq A(A) A^{-\frac{1}{2}} + 4/m$$

が成り立つ。

最後に、定理 1 の条件 (a), (b) を満たす非負値測度 μ を

(k, λ) 型の測度と呼ぶことにする：ただし $\mu \neq 0$ 。

§ 2. $G = \mathbb{R}$ 及び $G = \mathbb{T}$ の場合.

定理 2. 各 $k \in \mathbb{Z}^+$ に対し, $\lambda (\in \mathbb{Z}^+) < (2/\pi) 4^k + 1$ が存在し, G は (k, λ) 型の測度を持つ。

証明. 与えられた k に対して, 定数 C_1 を

$$J_m[(2/\pi) 4^k] + 1 > C_1^2 (2/\pi) 4^k$$

となるように定める。こゝに $J_m[\alpha]$ は α の整数部分を表わす。そして, 2つの数列 $\{a_m\}_m^\infty$ と $\{b_m\}_m^\infty$ を定義する:

$$\begin{aligned} a_m &= (\log 2)^{-1} \log C_1 + m^{-1} (\log 3m)^{-1} \\ b_m &= 2^{-(k+a_m)}. \end{aligned}$$

このとき, $1 < C_2 < C_1$, $b'_m = C_2 b_m < 1/2$ なる定数 C_2 を取る。これらに対して, 確率空間 (Ω, B, h) を次の様に構成する: $\Omega = \prod_{n=1}^\infty I_n$, $I_n = [b_n, b'_n]$; B は Ω の Borel field; $h = \bigotimes_{n=1}^\infty h_n$, h_n は $h_n(I_n) = 1$ なる I_n 上の Lebesgue 測度。そして $\omega = (\omega_n) \in \Omega$ に対して, 区間 $[0, 1]$ 上の測度 μ_ω を

$$\hat{\mu}_\omega(\gamma) = e^{i\pi\gamma} \prod_{n=1}^\infty \cos[\pi\gamma \omega_1 \cdots \omega_{n-1} (1 - \omega_n)]$$

によって対応させる。

このとき, 任意の $\omega \in \Omega$ に対して, $S(\mu_\omega^k)$ の測度が 0 であること, 及び 任意の $\lambda > C_1^2 \{A(\lambda)\}^2 4^k$ に対

して, $E\left(\int_{\hat{G}} |\hat{\mu}_\omega(x)|^4 d\gamma\right) < +\infty$ が示される。この

ことから, 測度 μ_ω が a. a. $\omega \in \Omega$ に対して, $(k, 1)$ 型の測度であることが結論される。(Q. E. D.)

§3. $G = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}(p_n)$ の場合 (各 p_n は素数, $p_n < p_{n+1}$).

定理3. この場合も, 定理2が成立する。

証明. k を固定して, 各 $n \in \mathbb{Z}^+$ に対して

$$g_n = \text{Im}[(k \log 2)^{-1} \{ \log(p_1 \cdots p_n) - \log \log 3n \}]$$

とおく。定理を示すには, $0 = g_0 < g_n < g_{n+1}$ と仮定してよい。これを仮定した上で, 数列 $\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$ を

$$K_{g_{n-1}+1} = K_{g_{n-1}+2} = \cdots = K_{g_n} = n$$

で定義し, G の部分群の列 $\Sigma = \{G_n\}$ を $G_n = \prod_{K_j \leq g_n} \mathbb{Z}(p_j)$ で定める。

このとき, 各 $\Omega(\Sigma)$ 測度 $\mu = \mu_\omega$ に対して $h_G[S(\mu^4)] = 0$ が示される。更に, 任意の $\lambda \geq (2/\pi) 4^k$ に対して

$$E\left(\sum_{\gamma \in \hat{G}} |\hat{\mu}(\gamma)|^4\right) < +\infty$$

が示され, 定理の結論を得る。(Q. E. D.)

§4. $G = \mathbb{U}(p)$ の場合 (p -adic integer の作る群, p は任意の素数)。

定理4. この場合も, 定理2が成立する.

証明. 素数 p と $k \in \mathbb{Z}^+$ を固定し, $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$K_n = J_n [(\log p)^{-1} \{ (k \log 2) n + \log \log \log e^{e(n+1)} \}]$$

とおく. G の元 x は

$$x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

—— たゞし, 各 x_n は $0 \leq x_n \leq p-1$ なる整数 —— という形に一意に書き表わせることに注意して, G の部分群の列 $\Sigma = \{G_n\}$ を

$$G_n = \{x \in G : x_j = 0, \forall j < K_n\}$$

で定義する.

このとき, 各 $\Omega(\Sigma)$ 測度 $\mu = \mu_\omega$ に対して, $h_G[S(\mu^k)] = 0$ であること, 又, 任意の $\lambda \geq (2/\pi) 4^{k/2}$ に対して

$$E(\sum_\gamma |\hat{\mu}(\gamma)|^4) < +\infty$$

が示されるから, 定理の結論を得る. (Q.E.D.)

§5. $G = \prod_{j=1}^{\infty} G^{(j)}$ (すべての j に対して, $G^{(j)} = \mathbb{Z}(p)$: p は任意の素数).

定理5. 各 $k \in \mathbb{Z}^+$ に対して, $\lambda = \lambda(k) \in \mathbb{Z}^+$ が存在し G は (k, λ) 型の測度を持つ.

証明. k を固定し, $m_0, \alpha_0 \in \mathbb{Z}^+$ を

$$(2/\pi) \alpha_0^{-\frac{1}{2}} + 4/m_0 < 2^{-k}$$

を満たす任意のものとする。まず最初に次のことを示す。

(A) すべての素数 $p \geq m_0$ に対して, $G = G(p)$ は (k, α_0) 型の測度を持つ。

これを示すために, 素数 $p \geq m_0$ を固定して, 数列 $\{K_m\}_0^\infty$ を次式で定義する。

$$K_m = \ln [(\log p)^{-1} \{ (k \log 2) m + \log(m+1) \}]$$

これに対して, G の部分群の列 Σ を

$$\Sigma = \{G_m\}_0^\infty; \quad G_m = \prod_{j \geq K_m} G^{(j)}$$

によって対応させる。このとき, $\Omega(\Sigma)$ 測度 μ_ω が a.a. $\omega \in \Omega$ に対して, (k, α_0) 型の測度であることが示せる。

次に, 次のことを示す。

(B). 各素数 p に対して, ある $\alpha = \alpha(k, p) \in \mathbb{Z}^+$ が存在して, 群 $G = G(p)$ は (k, α) 型の測度を持つ。

これを示すために, 素数 p を任意に固定する。さて, すべての $L, \alpha \in \mathbb{Z}^+$ に対して,

$$\sigma_L(\alpha; p) = p^{-L} \sum_{j_1=1}^p \cdots \sum_{j_L=1}^p \left\{ \frac{1}{L} \left| \sum_{l=1}^L \cos \frac{2\pi}{p} j_l \right| \right\}^\alpha$$

とおく。更に, 数列 $\{K'_m\}_0^\infty$ を

$$K'_m = K'_m(L) = \ln [(\log p)^{-1} \{ (k \log 2L) m + \log(m+1) \}]$$

で定義し, G の閉部分群の列 Σ' を

$$\Sigma' = \{G_m\}_0^\infty; \quad G_m = \prod_{j \geq K_m} G^{(j)}$$

と定義する。この Σ' に対して, 確率空間 $(\Omega(L), B, h)$ を次の様に構成する: $\Omega(L) = \prod_1^\infty G_m^L$; B は Borel field; $h = \bigotimes_1^\infty h_m$, $\langle \cdot \rangle$ に各 h_m は G_m^L の Haar 測度。このとき $\Omega(L)$ の元 ω は $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m, \dots)$ — ただし $\omega_m = (\omega_m^1, \dots, \omega_m^L) \in G_m^L$ — の形に書ける。そこで, 各 $\omega \in \Omega(L)$ に対して, G 上の 0 でない測度 $\mu' = \mu'_\omega \in M^+(G)$ を次の様に定義する:

$$\mu'_\omega = \bigotimes_1^\infty \mu'_m; \quad \mu'_m = L^{-1} \sum_1^L \Delta(\omega_m^j)。$$

このとき, すべての測度 $\mu' = \mu'_\omega$ が定理 1 の条件 (a) を満たすことが示せる。又, $L \in \mathbb{Z}^+$ を $2/p^L < (2L)^{-k}$ となる L に選んでおくと, 十分大きな $A \in \mathbb{Z}^+$ に対して

$$\sigma_L(A; p) < (2L)^{-k}$$

が成立する。これらのことから, 命題 (B) が得られる。

(A) と (B) から, 容易に定理 5 が得られる。(Q.E.D.).

§6. 定理 1 の完全な証明.

補助定理 6-1. K を loc. compact abelian group, K_1 をその compact な部分群とする。このとき, もし商群 K/K_1 がある正整数の組 (k, A) に対して (k, A) 型の測度を持て

ば, K も又 (n, μ) 型の測度を持つ。

証明. g を K から K/K_1 の上への自然な準同型写像とする。 g は $M(K/K_1)$ から $M(K)$ の中への同型写像 g' を生じる。このとき, g' は (n, μ) 型であるという測度の性質を保つ。このことから, 命題は示される。(Q.E.D.)

補助定理 6-2. K を無限個の元より成る compact 群とする。このとき, K の閉部分群 K_1 が存在して, 商群 K/K_1 は次のいずれかの群と同型である: (i) T , (ii) $\prod_{j=1}^{\infty} Z(p_j)$, ∞ に各 p_j は素数であって $p_j < p_{j+1}$, (iii) $U(p)$, p は素数, (iv) $G(p)$, p は素数。

これは Varopoulos による。

定理 1 の証明. G を non-discrete, n を任意に固定した正の整数とする。 μ として, 定理 2~5 に現われた μ の中で, 最大のものを取る。最初に, G が compact な閉部分群 K を含む場合を考える。このとき補助定理 6-1, 6-2, 及び定理 2~5 から, K は (n, μ) 型の測度を持つ。 K は G の閉部分群であるから, G 自身も (n, μ) 型の測度を持つ。

次に G が上の様な K を含まない場合を考える。このとき, ある $n \in \mathbb{Z}^+$ と compact 群 K に対して, G は $G_1 = \mathbb{R}^n \times K$

を閉部分群として含む。 μ を $\mathbb{R}$ 上の (h, λ) 型の測度として、 $G_1 = \mathbb{R}^n \times K$ 上に直積測度 $\lambda = \mu_1 \times \cdots \times \mu_m \times h_K$ を定義する、こゝに $\mu_j = \mu$ 。このとき、 λ は G_1 上の (h, λ) 型の測度である。又、 G_1 は G の閉部分群であるから、 λ は G 上の (h, λ) 型の測度でもある。 (Q. E. D.)

文 献

- [1] W. Rudin, Measure algebras on abelian groups, Bull. Amer. Math. Soc., 65 (1959), pp. 227-247.
- [2] ———, Fourier-Stieltjes transforms of measures on independent sets, ibid, 66 (1960), pp. 199-202.
- [3] ———, Fourier analysis on groups, Interscience.
- [4] R. Salem, On sets of multiplicity for trigonometric series, Amer. Jour. Math., 64 (1942), pp. 531-538.
- [5] Yu. A. Izreider, The structure of maximal ideals in rings of measures with convolution, Amer. Math. Soc. Translation, 1, 8 (1962), pp. 365-391.
- [6] N. Th. Varopoulos, Sets of multiplicity in loc. compact abelian groups, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 16 (1966), pp. 123-158.