

Transcendental radius and Mirsky functional

大阪教育大学 藤井 正俊

Masatoshi FUJII

0. Introduction. Non-normal operator の理論は、初期の段階において、次の不等式

$$(1) \quad r(T) \leq w(T) \leq \|T\|$$

を中心に発展してきました。cf. Halmos [11]。($r(T)$, $w(T)$ は、それぞれ、 T の spectral radius, numerical radius です。) 例えば、normal operator T に対しては、不等式(1)において等号が成立します:

$$(2) \quad T; \text{normal} \iff T; \text{normaloid} \iff w(T) = \|T\|$$

i.e., $r(T) = \|T\|$

ところで、不等式(1)は、次の包含関係より導びかれます:

$$(1)' \quad \text{co } \sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$$

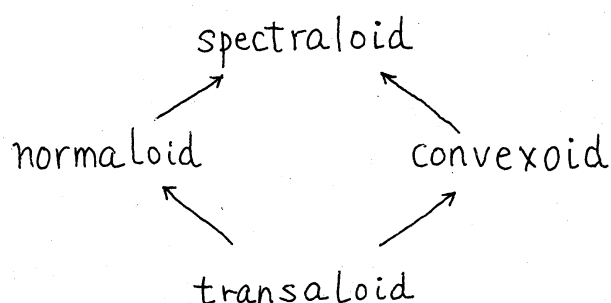
ここで、 $\text{co } \sigma(T)$ は、 T の spectrum $\sigma(T)$ の convex hull、 $\overline{W(T)}$ は、 T の numerical range

$$W(T) = \{ (Tx, x) ; \|x\| = 1 \}$$

の closure とします。そして、normal operator のもう一つの側面は、

$$\text{co } \sigma(T) = \overline{W(T)}$$

が成り立つこと、すなわち、normal operator は convexoid であることがあげられます。これらのことをまとめてみると operator の class の間に、次のような平行四辺形ができています:



ここで、spectraloid とは、 $r(T) = w(T)$ をみたす class、transaloid は、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、 $T - z$ が normaloid によって定義されます。この diagram は、Furuta - Nakamoto [9] による convexoid の特徴付け

$$T; \text{convexoid} \iff T - z; \text{spectraloid} \quad (z \in \mathbb{C})$$

によって意味を持ちます。実際、上の平行四辺形が考えられる根拠は、

$$(3) \quad \begin{aligned} \sigma(T - z) &= \sigma(T) - z \\ W(T - z) &= W(T) - z \end{aligned} \quad (z \in \mathbb{C})$$

であります。そして、(3)より $r(T)$, $w(T)$ が translation に関して不変でないことも明らかでしょう。

それならば、translation-invariant な半径で、(1)の不等式に当ることを考えるとどうなるでしょうか？ (3)を利用しますと、 $r(T)$, $w(T)$ に対応するものは、次のように簡単に定義することができます：

$$R_T = \min \{ r \geq 0 ; \sigma(T) \subseteq r\mathbb{D} \}$$

$$W_T = \min \{ r \geq 0 ; W(T) \subseteq r\mathbb{D} \}$$

ただし、 $r\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} ; |z| \leq r \}$ とします。

ここでは、norm $\|T\|$ に対応する translation-invariant な operator の半径で、不等式(1)の translatable 版が成り立つようなもの — transcendental radius — を提示したいと思います。実際には、operator 自身が考えられた時真で、その時すでにそれが存在していたことが知られるでしょう。そして、それに関連して、Mirsky による行列に対する半径を C^* -algebra の枠の中で議論したいと思います。

1. Transcendental radius.

まず、歴史的なことを少し述べてみましょう。1963年 Björck-Thomée は、Hörmander の指導の下で、エネルギー積分の maximalizing problem から、次のような定数

$$B_T = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 - |(Tx, x)|^2$$

を代入し、

$$B_T = R_T^2 \quad \text{for normal } T$$

を示しました。その後、1972年になり、Istratescu が

$$B_T = R_T^2 \quad \text{for transaloid } T$$

であることを。また、convexoid に対しては、一般に、 $B_T \neq R_T^2$ であることが、2年後、Sheth によって示されました。

1980年になり、Prasanna-Sheth は、 $T - z_T$ が normaloid, i.e., T が centroid であれば、十分であることを指摘しました。 $(z_T$ は、 $\sigma(T)$ を含む最小の円板の中心です。)

$$(4) \quad B_T = R_T^2 \quad \text{for centroid } T$$

そして翌年、Prasanna は、(4)の逆も成立することを証明しました。これによって、Björck-Thomée に始まった等式 $B_T = R_T^2$ に関する operator の一従来 of non-normal operator の理論における一 class の決定という問題は、片付きました。しかし、それが完全にということになりますと、(1)に対応した不等式を提示することと、(2)に対応することが言えなければならぬでしょう。

Prasanna の idea は、 B_T と Stampfli の derivation に関する論文[22]を結びつけたところにありました。Stampfli に従って、

$$\|T - m_T\|^2 + |z|^2 \leq \|T - m_T + z\|^2 \quad (z \in \mathbb{C})$$

をみたす $m_T \in \mathbb{C}$ (唯一つ存在する) を T の center of mass と呼びます。

Lemma 0. (Prasanna)

$$B_T = \|T - m_T\|^2$$

そこで、 $M_T = \sqrt{B_T}$ とおきますと、 M_T は、 T と $\mathbb{C}$ との距離 $d(T, \mathbb{C})$ に他ならず;

$$(5) \quad M_T = d(T, \mathbb{C})$$

T の center of mass m_T は、 T の unique scalar approximant ということになります。我々は、それ故、 M_T を T の transcendental radius と呼びたいと思います。この半径は、 B_T を T の分散と考えるならば、 T の標準偏差ということになります。直接計算より、 $B_{T-z} = B_T$ 、よって、 $M_{T-z} = M_T$ 、及び、 $m_{T-z} = m_T$ が判ります。

(1)に対応する不等式は、次の形で得ることができます。

Theorem 1. [7]

$$R_T \leq W_T \leq M_T$$

Theorem 1 の原形は、1980年に Garske [10] によつて、 $R_T \leq M_T$ という形で得られています。この証明は、もとの Björck-Thomée のものを再検討してできたものですが、さらに逆のぼつて、

$$R_T \leq M_T \quad \text{for convexoid } T$$

という注意を [12] に見ることができます。

次に、(2)に対応する事実としましては、最初の " $\Rightarrow$ " は、Björck-Thomée そのものですし、その次の " $\Leftarrow$ " に当るものは、Furuta-Izumino-Prasanna [8] によつて、(2)と同様のやり方で証明されています。

Theorem 2.

$$T; \text{ centroid, i.e., } R_T = M_T \iff W_T = M_T$$

2. Proofs.

Lemma 0 の証明は、次の通りです。

$$\begin{aligned} B_T &= B_{T-m_T} = \sup_{\|x\|=1} \|(T-m_T)x\|^2 - |((T-m_T)x, x)|^2 \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|(T-m_T)x\|^2 = \|T-m_T\|^2 \end{aligned}$$

逆の不等号の証明には、次の Stampfli の結果を使いますと簡単になります：

$$z = m_T \iff 0 \in W_0(T-z)$$

ここで、 $W_0(S)$ は、 S の maximal numerical range

$$W_0(S) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (Sx_n, x_n) \rightarrow \lambda \text{ for some } \{x_n\}; \|x_n\|=1, \|Tx_n\| \rightarrow \|T\|\}$$

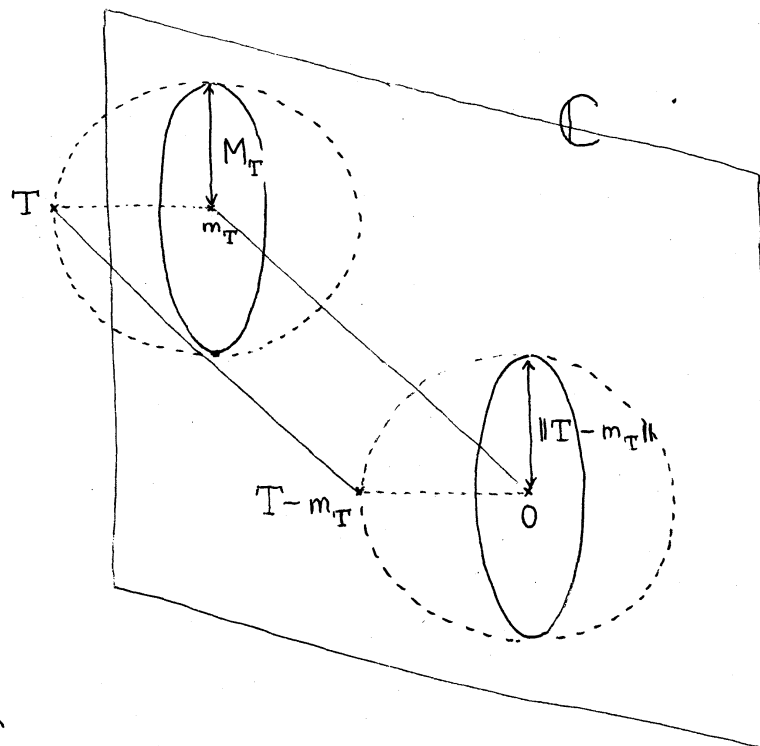
です。従って、 $0 \in W_0(T - m_T)$ なので、

$$\exists \{x_n\}; \|x_n\|=1, ((T - m_T)x_n, x_n) \rightarrow 0, \|(T - m_T)x_n\| \rightarrow \|T - m_T\|$$

$$\begin{aligned} B_T = B_{T - m_T} &\geq \lim [\|(T - m_T)x_n\|^2 - |(T - m_T)x_n, x_n|^2] \\ &= \|T - m_T\| \end{aligned}$$

Proof of Theorem 1.

T の代りに $T - m_T$ を考えることにしましょう。



明らかに、

$$W(T - m_T) \subseteq \|T - m_T\| \mathbb{D} = M_T \mathbb{D}$$

よって、

$$W_T = W_{T - m_T} \leq M_T$$

Remark.

Prasanna の Lemma は、実際には、Asplund-Ptak [2] により、もっと一般的な形の定理として与えられています:

$$\sup_{\|x\|=1} \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|Ax + \lambda Bx\| = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \sup_{\|x\|=1} \|Ax + \lambda Bx\| \quad \forall A, B \in \mathcal{L}(E, F)$$

$\Leftrightarrow E, F$; inner product spaces.

この節を閉じるにあたり、 G_1 -operator と centroid の関係について、少し述べておきたいと思います。 T が

$$\|(T - z)^{-1}\| \leq 1/d(z, \sigma(T)) \quad (z \notin \sigma(T))$$

をみたすとき、 T を G_1 -operator と呼びます。一般に、

$$G_1\text{-operator} \not\Rightarrow \text{normaloid}$$

はよく知られていることですが、やはり同様に、

$$G_1\text{-operator} \not\Rightarrow \text{centroid}$$

が Garske によって示されています。例えば、

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \text{the simple unilateral shift}$$

とすれば、Luecke principle [5] より、 T が G_1 -operator は明らかで、 $M_T = \|T\| = 2 > 1 = W_T$ となっています。

ところが、spectraloid でない centroid も存在します;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3i$$

それにもかかわらず、quasinilpotent centroid は 0 以外にはありません。実際、 $M_T = 0$ なので、

$$\|Tx\| = |(Tx, x)| \quad \text{for } \|x\| = 1$$

よって、 $T = 0$ 。さらに、この事実は、Fialkow の question [4; 4.16] が negative であることも示しています。

3. Mirsky functionals.

もう一度話を 1950 年代に戻しましょう。1956-7 年にかけて、Mirsky [16, 17] は、matrix A に対して、 A の spread を

$$s(A) = \max \{ |\lambda - \mu|; \lambda, \mu \in \sigma(A) \}$$

によって定義し、 A が Hermitian の場合には

$$s(A) = 2 m(A)$$

を示しています。ここで、

$$m(A) = \sup \{ |(Ax, y)|; \|x\| = \|y\| = 1, x \perp y \}.$$

これを Mirsky's constant と呼ぶことにします。

一応、1973 年 Ando は、 $d(T, \mathbb{C})$ を次の形で与えています：

Theorem 3. (Ando)

$$(6) \quad d(T, \mathbb{C}) = \sup \{ \|P^\perp T P\|; P; (\text{rank one}) \text{ projection} \}$$

ところが、 $M_T = \sup_{\|x\|=1} \|Tx - (Tx, x)x\|$

及び、 $\|x\| = 1$ に対して、

$$\|T_x - (Tx, x)x\| = \|P_{x^\perp}^\perp T x\| = \sup\{|(Tx, y)|; x \perp y, \|y\|=1\}$$

に注意すれば、($P_{x^\perp}$ は、 x の span する subspace への projection)

Theorem 4. [6], [7]

$$M_T = m(T) = \sup\{\|P^*TP\|; P; (\text{rank one}) \text{ projection}\}$$

なお、 $M_T = m(T)$ は、Izumino [13] によって簡単な証明が与えられています。

次に、この定理を C^* -algebra の枠の中で見ることにしましょう。まず、linear functional

$$f(T) = (Tx, y)$$

を見直さねばなりません。明らかに、 f は、

$$(7) \quad f(1) = 0, \quad \|f\| = 1.$$

をみたしています。

$\mathcal{A}$ を unital C^* -algebra とするとき、(7) をみたす $\mathcal{A}$ 上の linear functional を Mirsky functional といい、それらの全体のなす集合を $\mathcal{M}$ とかくことにします。そのとき、 $M_T = d(T, \mathcal{C})$ とみれば、Theorem 4 の C^* -version は、次のようになるでしょう、[15]。

Theorem 4'.

$$M_T = \max \{ |f(T)| ; f \in \mathcal{M} \} \quad (T \in \mathcal{A})$$

証明は、 $\mathcal{A}/\mathbb{C}$ に対して、Hahn-Banach の定理を適用し、 $(\mathcal{A}/\mathbb{C})^* = \{ f \in \mathcal{A}^* ; f(1) = 0 \}$ に注意するだけのことです。

ところが、Stampfli [22] が出たその年に、Williams [23] が Björck-Thomée constant B_T の C^* -版について議論しています。

Theorem 5. (Williams)

$$M_T^2 = \max \{ f(T^*T) - |f(T)|^2 ; f; \mathcal{A} \text{ の state } \}$$

実際に、彼は、これを使って、次の同値を示しています：

- (a) $\|T\| \leq \|T - z\| \quad (z \in \mathbb{C})$
- (b) $\exists \text{ state } f ; f(T^*T) = 1, f(T) = 0$
- (c) $\|T\|^2 + |z|^2 \leq \|T + z\|^2 \quad (z \in \mathbb{C})$

特に、(c)は、 $m_T = 0$ に他ならないこと。また、Theorem 5 の右辺は、Björck-Thomée constant B_T の C^* -版であるにもかかわらず、それらのことに全く触れていないことは、不思議としか言いようがありません。

ところで、Theorem 5 は Theorem 4' から導くことができます。

Lemma 6. unital C^* -algebra $\mathcal{A}$ の Mirsky functional f は、cyclic representation (π, H) と orthonormal vectors $x, y \in H$ を使って

$$f(A) = (\pi(A)x, y) \quad (A \in \mathcal{A})$$

とかけます。

Theorem 4' $\Rightarrow$ Theorem 5 :

仮定より、 $M_T = g(T)$ となる Mirsky functional g があります。 g は、 $g(T) = (\pi(T)x, y)$ とかけますので、

$$\begin{aligned} M_T^2 &= (\pi(T)x, y)^2 \\ &= (\pi(T)x - (\pi(T)x, x)x, y)^2 \\ &\leq \|\pi(T)x - (\pi(T)x, x)x\|^2 \\ &= \|\pi(T)x\|^2 - |(\pi(T)x, x)|^2 \\ &\leq M_{\pi(T)}^2 \leq M_T^2 \end{aligned}$$

従って、 $f(T) = (\pi(T)x, x)$ が求める state になります。

逆に、Theorem 5 $\Rightarrow$ Theorem 4' も、Izumino の手法 [13] を利用して、すぐに示すことができます。実際、

$$\exists \text{ state } f ; \quad M_T = f(T^*T) - |f(T)|^2$$

とすると、GNS construction を使って、

$$f(A) = (\pi(A)x, x) \quad (\|x\|=1)$$

とし、 y を $\pi(T)x - (\pi(T)x, x)x$ を normalize したものとします。 $(\pi(T)x = (\pi(T)x, x)x$ のときは、 $y \perp x$, $\|y\|=1$ をとれば OK)

$$g(A) = (\pi(A)x, y)$$

は、Mirsky functional で、 $M_T = g(T)$ をみたします。

この節を終えるに際し、 2×2 matrix algebra M_2 への completely positive maps と Mirsky functionals の関係について述べておきたいと思います。 C^* -algebra $\mathcal{A}$ から M_2 への completely positive map F は、次の形で表わされることが知られています:

$$F(A) = \begin{pmatrix} f_1(A) & g(A) \\ g(A^*)^* & f_2(A) \end{pmatrix}$$

ここで、 f_i は states, g は Mirsky functional の scalar 倍となっています。逆に、(Lemma 6 より)

Corollary 7. [15]

Mirsky functional g は、unital completely positive map の off-diagonal として表わされる。

4. Mirsky maps and derivations.

前節に続き、Lemma 6 の応用について考えたいと思います。
まず、Mirsky functionals の分解から始めましょう。

Theorem 8. [14]

Mirsky functional f は、state g と derivation D と representation π の合成であらわされます:

$$f = g \circ D \circ \pi$$

Proof. Lemma 6 より、 $f(A) = (Ax, y)$ と仮定できます。ここで、 $g(A) = (Ax, x)$ としますと、 $x \otimes y$ により induce された derivation D によって、

$$\begin{aligned} g(D(A)) &= g(x \otimes A^*y - Ax \otimes y) \\ &= ((x \otimes A^*y)x, x) - ((Ax \otimes y)x, x) \\ &= (x, A^*y) = f(A) \end{aligned}$$

最後に、前定理の linear map への拡張を試みたいと思います。unital C^* -algebra $\mathcal{A}$ から $B(H)$ への linear map L が

$$(a) \quad L(1) = 0$$

$$(b) \quad L \text{ ; completely contractive, i.e., } \|L \otimes 1_n\| \leq 1 \quad \forall n$$

をみたすとき、 L を Mirsky map と呼びます。Paulsen [18]

は、最近、completely contractive map に対する Steinspring 型の分解定理を示しています: completely contractive map $L; \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(H)$ に対して、representation $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(K)$ と isometries $V_1, V_2; H \rightarrow K$ が存在して、

$$L(A) = V_2^* \pi(A) V_1$$

をみたします。

そこで、 L が Mirsky map ならば、 $V_2^* \pi(1) V_1 = 0$ となります。一オ、 V_i は isometries なので、

$$\text{partial isometry } V; \overline{\text{ran } V_2} \rightarrow \overline{\text{ran } V_1}$$

が定義できます。そして、

$$D = D_{V\pi(1)}$$

$$G(T) = V_1^* T V_1 \quad (T \in \mathcal{B}(K))$$

とします。 $V_2^* \pi(1) V_1 = 0$ より、 $V\pi(1)V_1 = VV_2V_2^*\pi(1)V_1 = 0$ となりますので、

$$\begin{aligned} G(D(\pi(A))) &= V_1^* (V\pi(1)\pi(A) - \pi(A)V\pi(1)) V_1 \\ &= V_1^* V\pi(A) V_1 = V_2^* \pi(A) V_1 \\ &= L(A) \end{aligned}$$

Theorem 9. [14]

Mirsky map は、completely positive map と Derivation と representation の合成で表わすことができます。

References.

1. T.Ando : The distance to the set of scalars, unpublished.
2. E.Asplund and V.Ptak : A minimax inequality for operators and a related numerical range, Acta Math., 126(1971), 53-62.
3. G.Bjorck and V.Thomee : A property of bounded normal operators in Hilbert space, Arkiv for Math., 4(1963), 551-555.
4. L.A.Fialkow : A note on norm ideals and the operator $X \rightarrow AX - XB$, Israel J. Math., 32(1979), 331-348.
5. M.Fujii : On some examples of non-normal operators. II, Proc. Japan Acad., 49(1973), 118-123.
6. M.Fujii and R.Nakamoto : An estimation of the transcendental radius of an operator, Math. Japon., 27(1982), 637-638.
7. M.Fujii and S.Prasanna : Translatable radii for operators, Math. Japon., 26(1981), 653-657.
8. T.Furuta, S.Izumino and S.Prasanna : A characterization of centroid operators, Math. Japon., 27(1982), 105-106.
9. T.Furuta and R.Nakamoto : On the numerical range of an operator, Proc. Japan Acad., 47(1971), 279-284.
10. G.Garske : An inequality concerning the smallest disc that contains the spectrum of an operator, Proc. Amer. Math. Soc., 78(1980), 529-532.
11. P.R.Halmos : A Hilbert Space Problem Book, Springer, 1974.
12. V.I.Istratescu : On a class of normaloid operators, Math. Z., 124(1972), 199-202.

13. S.Izumino : An estimation of the transcendental radius of an operator, II, Math. Japon., 27(1982), 645-646.
14. D.Kainuma and E.Kamei : Mirsky's theorem for C^* -algebras, to appear in Math. Japon.
15. A.Matsumoto and Y.Seo : Mirsky's theorem for C^* -algebras, Math. Japon., 28(1983), 135-138.
16. L.Mirsky : The spread of a matrix, Mathematika, 3(1956), 127-130.
17. L.Mirsky : Inequality for normal and hermitian matrices, Duke Math. J., 24(1957), 591-599.
18. V.I.Paulsen : Every completely polynomially bounded operator is similar to a contraction, preprint.
19. S.Prasanna : The norm of a derivation and the Bjorck-Thomee-Istratescu theorem, Math.Japon., 26(1981), 585-588.
20. S.Prasanna and I.H.Sheth : A remark on a paper of V.Istratescu, Indian J. Pure Appl. Math., 11(1980), 212-214.
21. I.H.Sheth : On a conjecture of Istratescu, J. Indian Math. Soc., 38(1974), 337-338.
22. J.G.Stampfli : Norm of a derivation, Pacific J. Math., 33 (1970), 737-747.
23. J.P.Williams : Finite operators, Proc. Amer. Math. Soc., 26 (1970), 129-136.