

Spin^c -多様体上の semi-free な S' -作用について

東工大(理)北田 泰彦

§ 1.

M^n を oriented な n 次元 (可微分) 多様体とし、あるリーマン計量に関する oriented orthonormal tangent n -frames のなす $SO(n)$ -bundle を F_M で表わす。 M に compact 群 G が作用している時は、リーマン計量は G -不変であるものを考えてよいから、 G は F_M にも作用し、その作用は M 上の作用と compatible である。 M^n が Spin^c -構造 P_M を持つとは、 F_M が $\text{Spin}^c(n)$ -reduction を持つこと、すなわち P_M は M 上の $\text{Spin}^c(n)$ -bundle であり、 $F_M \cong P_M \times_{\text{Spin}^c(n)} SO(n)$ が成立つことである。ここに $\text{Spin}^c(n)$ は自然な射影 $\text{Spin}^c(n) \rightarrow SO(n)$ により $SO(n)$ に左から作用する。群 G が Spin^c -構造を持つ多様体 M^n に作用 (左から) するとは、

- (1) G は M , F_M 及び P_M への作用 φ をもち
- (2) F_M , P_M における作用は bundle map であり、

(3) 作用 φ は射影 $P_M \rightarrow F_M \rightarrow M$ と compatible である
 こととする。このような object を (M^n, P_M, φ) で表わし、
 Spin^c -構造を保つ G 作用をもつ多様体とよぶ。

群 G の subgroup の families $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ ($\mathcal{F} \supset \mathcal{F}'$) が与え
 られたとき、 Spin^c -構造を保つ G -作用をもつ多様体 $(M^n,$
 $P_M, \varphi)$ で、その isotropy groups が $G_x \in \mathcal{F}$ ($x \in M$),
 かつ $G_x \in \mathcal{F}'$ ($x \in \partial M$) であるものの全体を考え、それら
 に自然な cobordism relation を入れて得られたアーベル群を
 $\Omega_n^{\text{Spin}^c}(G; \mathcal{F}, \mathcal{F}')$ と書く。また $\partial M = \emptyset$ のものを考え
 ることにより、 $\Omega_n^{\text{Spin}^c}(G; \mathcal{F}) = \Omega_n^{\text{Spin}^c}(G; \mathcal{F}, \emptyset)$ を定義
 する。

定理 1.

$$\Omega_n^{\text{Spin}^c}(S^1; \{S^1, 1\}) \cong \Omega_{n-2}^{\text{Spin}^c}(\mathbb{Z}^* \times BU(1)) \oplus \sum_{q \geq 1} \Omega_{n-2q}^{\text{Spin}^c}(\mathbb{Z} \times BU(q))$$

ここで $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ である。

(注) Free な S^1 -作用の場合には、 $\Omega_n^{\text{Spin}^c}(S^1; \{1\}) \cong \Omega_{n-1}^{\text{Spin}^c}(BU(1))$
 が成立つ。

定理 2.

S^1 -作用が semi-free で M^n の Spin^c -構造を保つとき、
 M の Todd genus は次の式で与えられる。

$$T(M) = \sum_{r_i \geq 0} \left\{ (1 + \text{ch } \nu_i)^{r_i} \mathcal{T}(X_i) \right\} [X_i] \\ + \sum_{r_i \leq -(q_i+1)} (-1)^{q_i+1} \left\{ (1 + \text{ch } \bar{\nu}_i)^{-(r_i+q_i+1)} \mathcal{T}(X_i) \right\} [X_i].$$

ここで、 $\{X_i\}$ は fixed point set の component の family, $q_i = \text{codim } X_i / 2$, r_i は作用より定まる整数 (後出), ν_i は X_i の normal bundle に S^1 -作用による自然な複素構造を入れたものである。

系 3

M^n が複素多様体で、 S^1 が複素構造を保つように semi-free に作用するとき、

$$T(M) = \sum_{d_i^+ = q_i} T(X_i) = \sum_{d_i^- = q_i} (-1)^{q_i} T(X_i)$$

が成立つ。ここに d_i^+ (d_i^-) は S^1 が complex number (その conjugate) として X_i の normal bundle に作用する次元である。 (Kosniowski [2])

系 4.

M^n が Spin-構造を持ち、 S^1 がその Spin-構造を保ちなから semi-free に M^n に作用するとき、 $\hat{A}(M) = 0$ である。 (Atiyah - Hirzebruch [1])

§ 2. Equivariant ω -class と free S' -作用

左からの S' -作用をもつ空間 Y に対し、 $Y_{S'} = ES' \times_{S'} Y$ と定義する。ここに、 ES' は base を $BS' \simeq \mathbb{P}^\infty$ とする 普遍 S' -bundle の total space である。 $P \xrightarrow{p} X$ を $\text{Spin}^c(n)$ -bundle としたとき、 $\omega_2(P) \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$ の integral は reduction $\omega(P) \in H^2(X; \mathbb{Z})$ が定まる。 P が X の Spin^c -構造 (この場合 X は多様体) であるときは $\omega(P)$ を ω_X と書くことにする。今、 S' -作用が P と X に compatible なように与えられているとき、 $p_{S'} : P_{S'} \rightarrow X_{S'}$ もまた $\text{Spin}^c(n)$ -bundle となる。その ω -class $\omega(P_{S'})$ を P の S' -equivariant ω -class と呼び $\omega^{S'}(P) \in H^2(X_{S'}; \mathbb{Z})$ で表わす。 P が多様体 X の Spin^c -構造であるときには、 $\omega_X^{S'}$ と表わす。

補題 1.

$p : P \rightarrow X$ を $\text{Spin}^c(n)$ -bundle とし、 S' が P, X に左から作用し、その作用は p と compatible かつ P 上の作用は $\text{Spin}^c(n)$ の右からの作用と可換であるとする。

$\pi : ES' \times X \rightarrow X_{S'}$ を自然な射影、

$p_2 : ES' \times X \rightarrow X$ を第 2 項への射影とすると、

$$\pi^*(\omega^{S'}(P)) = p_2^* \omega(P) \text{ が成立つ。}$$

(証明) ω -class の naturality と $\omega^{S'}$ -class の定義より明らかである。 ■

この補題は $\omega^{S'}$ -class が ω -class の拡張であることを示す。

補題 2.

(M^n, P_M, φ) を Spin^c -構造を保つ S' -作用とし、作用は free であるとする。そのとき orbit space $\bar{M} = M/S'$ はまた Spin^c -構造 $P_{\bar{M}}$ をもち、 $\pi: M \rightarrow \bar{M}$ を orbit map とすると、 $\text{Spin}^c(n-1)$ -bundle $\pi^* P_{\bar{M}}$ の $\text{Spin}^c(n)$ -bundle への拡大と P_M は一致する。

(証明) M^n の tangent bundle τ_M の subbundle τ'_M を S' -orbits に直交する tangent vector 全体として定義する。 τ'_M は S' -不変であり、その $(n-1)$ -frames の作る $SO(n-1)$ -bundle を F'_M とすると、 F'_M は F_M の reduction であり、 $P_M \rightarrow F_M$ と $F'_M \rightarrow F_M$ の fibered product を P'_M とすると、 P'_M は F'_M の $\text{Spin}^c(n-1)$ への reduction である。一方、 S' は F_M , P_M 及び F'_M に compatible に作用するから、 P'_M へも作用し、その作用は free かつ、 P'_M の bundle map となっている。 $\bar{P}'_M = P'_M/S'$ を考えると、これは、 $\bar{M}$ 上の $\text{Spin}^c(n-1)$ -bundle であり、 $\bar{M}$ の frame bundle として $\bar{F}'_M = F'_M/S'$ がとれることから、 $\bar{P}'_M$ が $\bar{M}$ の Spin^c -構造 $P_{\bar{M}}$ としてとれる。逆に作り方より $\pi^* P_{\bar{M}} \cong P'_M$ である

から P_M は $\pi^* P_{\bar{M}}$ の拡大である。 ■

(M^n, P_M, φ) を同じく Spin^c -構造を保つ free な S^1 -作用とする。
 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$, $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ とみなして、
 $W^{n+1} = M \times D^2 / S^1$ ($(x, v) \sim (gx, gv)$ $g \in S^1$) とする。
 $i: M \rightarrow W$, $p: W \rightarrow \bar{M}$ 及び $j: \bar{M} \rightarrow W$ を $i(x) = [x, 1]$, $p([x, v]) = [x]$ 及び $j([x]) = [x, 0]$ で定義すると、 i, p, j は S^1 -equivariant である。但し、 W 上の S^1 -作用は $g[x, v] = [gx, v]$ で定義する。

補題 3.

$Q = p^*(P_{\bar{M}} \oplus M^*)$ は W^{n+1} の tangent bundle の $\text{Spin}^c(n-1) \times U(1)$ -reduction であり、従って W に $\text{Spin}^c(n+1)$ -構造 P_W を与える。 W 上の S^1 -作用はこの Spin^c -構造を保ち、 W の Spin^c -構造及び M の Spin^c -構造は compatible である。ここに M^* は M に右からの $U(1)$ -作用を $x \cdot g = g^{-1}x$ で与えた $\bar{M}$ 上の $U(1)$ -bundle である。更に次の公式が成立つ。

$$i^*(\omega_W) = \omega_M = \pi^*(\omega_{\bar{M}})$$

$$\omega_W = p^*(\omega_{\bar{M}} + c)$$

但し、 c は bundle $M^* \rightarrow \bar{M}$ の Chern class とする。

(証明) 作りオから容易にわかる故略する。 ■

次にいくつかの ω^{S^1} -class を計算する。これまでのこの § の記法をそのまま用いる。

補題 4.

Spin^c -構造を保つ S^1 -作用 (M^n, P_M, φ) が free であるとする。 $ES^1 \times M \xrightarrow{\bar{p}_2} M$ は $M_{S^1} \xrightarrow{\bar{p}_2} \bar{M}$ を induce し、

$\bar{p}_2$ は homotopy 同値で、 $\bar{p}_2^*(\omega_{\bar{M}}) = \omega_M^{S^1}$ が成立つ。

(証明) $P_M \cong P'_M \times_{\text{Spin}^c(n-1)} \text{Spin}^c(n)$ であるから、

$$(P_M)_{S^1} \cong (P'_M)_{S^1} \times_{\text{Spin}^c(n-1)} \text{Spin}^c(n)$$

従って $\omega_M^{S^1} = \omega^{S^1}(P'_M)$ が成立つ。

一方、 $\bar{p}_2^*(P_{\bar{M}}) \cong P'_M$ であることから結論を得る。 ■

$$W_{S^1} = ES^1 \times_{S^1} W \simeq ES^1 \times_{S^1} \bar{M} = BS^1 \times \bar{M}$$

$$\text{により、 } H^2(W_{S^1}; \mathbb{Z}) \cong H^2(BS^1 \times \bar{M}; \mathbb{Z})$$

$$\cong H^2(\bar{M}; \mathbb{Z}) \oplus H^2(BS^1; \mathbb{Z})$$

と見做すとき、次の補題を得る。

補題 5.

$$\omega_W^{S^1} = (\omega_{\bar{M}} + c) - \alpha.$$

ここで α は $H^2(BS^1; \mathbb{Z})$ の生成元。

(証明) 補題3及び、 $\omega^{S^1}(M^*) = c - \alpha$ であることから知られる。 ■

§3. 定理の証明の概略

まず、補題2により、定理1の(注)

$$\Omega_n^{Spin^c}(S'; \{1\}) \cong \Omega_{n-1}^{Spin^c}(BU(1))$$

が成立することに注意する。

次に定理1を示すために、よく知られた完全系列

$$0 \rightarrow \Omega_n^{Spin^c}(S'; \{S', 1\}) \xrightarrow{\beta} \Omega_n^{Spin^c}(S'; \{S', 1\}, \{1\}) \xrightarrow{\partial} \Omega_{n-1}^{Spin^c}(S'; \{1\}) \rightarrow 0$$

を考える。 $\Omega_n^{Spin^c}(S'; \{S', 1\}, \{1\})$ の代表元 (V, P_V, φ) として

次の条件をみたすものかといえる。 V は $X = \text{Fix } \varphi$ 上の linear な

disk bundle であり、 S' は linear map $V \rightarrow V$ を与える。

$q = \frac{1}{2} \text{codim } X$ とする。 $H^2(V_{S'}; \mathbb{Z}) \cong H^2(X_{S'}; \mathbb{Z}) \cong$

$H^2(X; \mathbb{Z}) \oplus H^2(BS'; \mathbb{Z})$ により $\omega_V^{S'} = \xi + l\alpha$ ($l \in \mathbb{Z}$)

とあらわす。 $l \equiv q \pmod{2}$ であることがわかるから、

$r = (l - q)/2$ とおく。一方、 S' -作用による V の自然な

複素構造を考えることにより、 (V, P_V, φ) に対して、

(X, V, τ) が $\Omega_{n-2q}^{Spin^c}(\mathbb{Z} \times BU(q))$ の代表元として決まる。

この操作により、 $\Omega_n^{Spin^c}(S'; \{S', 1\}, \{1\}) \cong \sum_{q \geq 1} \Omega_{n-2q}^{Spin^c}(\mathbb{Z} \times BU(q))$

が言える。 ∂ の右逆写像は associated D^2 -bundle を作ることで得られ、その image は $\Omega_{n-2}^{Spin^c}(0 \times BU(1))$ であるから定理

1 が証明できる。

定理2を示すためには、 β の左逆写像 $\mathbb{P}$ を作ることを行な

う。 $\Omega_n^{Spin^c}(S'; \{S', 1\})$ の代表元 (M^n, P_M, φ) をとり、

φ の fixed point の成分の family を $\{X_i\}$ とする。各 X_i の S^1 -不変な closed tubular neighborhood V_i をとり、 $M_0 = M - \bigcup_i \text{int } V_i$ とする。 $H_i = (\partial V_i \times D^2)/S^1$, $W = (M_0 \times D^2)/S^1$ と定め、 ∂V_i と ∂H_i を同一視して $K_i = V_i \cup (-H_i)$ とする。ここで “-” の符号は H_i の向きを逆にすることを示す。各 K_i は自然な Spin^c -構造 P_{K_i} 及び自然な S^1 -作用 φ_i をもち、 $\Omega_n^{\text{Spin}^c}(S^1; \{S^1, 1\})$ の元 $(K_i, P_{K_i}, \varphi_i)$ を定める。(一般の $\Omega_n^{\text{Spin}^c}(S^1; \{S^1, 1\}, \{1\})$ の元に対しても同様な構成法により β の左逆写像 P が作れるが定理 2 の証明のためには β の image 上のみで P を作るだけでよい。) (W, P_W, φ) は (M, P_M, φ) と $\bigcup_i (K_i, P_{K_i}, \varphi_i)$ の間の cobordism を与えるから、 $\Omega_n^{\text{Spin}^c}(S^1; \{S^1, 1\})$ の元として、

$$[M, P_M, \varphi] = \sum_i [K_i, P_{K_i}, \varphi_i]$$

が成立つ。 Spin^c -多様体 M^n の Todd-genus $T(M)$ を

$$T(M) = \left\{ e^{\frac{\omega}{2}} \hat{\Omega}(M) \right\} [M]$$

で定義すると、上の場合には、

$$T(M) = \sum_i T(K_i)$$

であり各 K_i についての ω_{K_i} を求めればよいことがわかる。

(V_i, P_{V_i}, φ) を $\Omega_{n-2q_i}^{\text{Spin}^c}(\mathbb{Z} \times BU(q_i))$ ($q_i = \text{codim } X_i/2$) の元

として (X_i, V_i, γ_i) で表わし、§2 の補題を用いて、 $\omega_{K_i}^{S^1}$ を求めることができ、更に補題 1 により ω_{K_i} を得る。すなわち、

$e_i: X_i \rightarrow M$ を inclusion, $p_i: K_i \rightarrow X_i$ を fiber が

CP^{g_i} と diffeo な fiber bundle の射影とすると、

$$\omega_{K_i} = (g_i + 2r_i) \alpha_i + f_i^* \epsilon_i^*(\omega_M)$$

が得られる。($\alpha_i = K_i$ 上の canonical $\mathbb{C}$ line bundle の Chern class.) 以後、Borel-Hirzebruch "Characteristic classes and homogeneous spaces" § 22 に従って計算を行なうと定理 2 を得る。

系 3. は $r_i = -d_i$ なることを定義に従って行なえばよい。
Kosniowski [2] の公式と比べて $(-1)^{g_i}$ が異なるが、これは X_i の向き付けの違うためである。

系 4. は $r_i = -\frac{g_i}{2}$ 従って、 $-g_i \leq r_i \leq -1$ であることから明らかである。

- [1] Atiyah, Hirzebruch; Spin-manifolds and group actions, Essays on Topology and Related Topics, 18-28.
- [2] Kosniowski; Applications of the holomorphic Lefschetz formula, Bull. London Math. Soc., (1970), 43-48.