

Finite groups admitting an automorphism of prime order

北大 理 福島 博

G を有限群, $\alpha \in \text{Aut}(G)$, $|\alpha| = p$; prime $(p, |G|) = 1$ とする。以下この設定で議論をすすめる。このとき次の有名な予想がある。

Conjecture $C_G(\alpha)$; nilpotent $\xrightarrow{?}$ G は solvable

これに関連して次の結果がある。

Theorem (B. Rickman)

$C_G(\alpha)$; cyclic q -group
 q ; prime
 $q \geq 5$ } $\rightarrow G$ は solvable

これに関して次の結果が得られた。

Theorem

$C_G(\alpha)$; q -group
 q ; odd prime } $\rightarrow G$ は solvable

The structure of solvable groups satisfying the hypothesis of the theorem.

Shult の定理により次の結果を得る。

$$G = O_{q,q'}(G) C_G(\alpha)$$

Proof of the theorem.

G を最小位数の反例とする。

Lemma 1. G is simple.

Glauberman の "Sufficient condition for p -stability" の結果により, 次の lemma を得る。

Lemma 2. $q = 3$.

$\because$ $q \neq 3$ とすると, G は S_4 -free となり矛盾を得る。

Lemma 3.

$$\forall r \in \pi(G) - \{2, 3\}$$

$$\forall R_0; r\text{-subgroup of } G$$

$$\longrightarrow N_G(R_0)/C_G(R_0) \text{ is } \{3, r\}\text{-group.}$$

Lemma 3 と, minimal simple の分類により G は,

$L_2(7)$ or $L_3(3)$ を, involve することがわかる。

$$r \in \pi(G) - \{2, 3\}$$

R ; α -invariant Sylow r -subgroup とする。

Lemma 4.

$$g \in C_G(\alpha) \cap N_G(R)^\# \longrightarrow C_R(g) = 1.$$

Lemma 4 より 次の lemma を得る。

Lemma 5.

$$1 \neq \alpha; r\text{-element} \longrightarrow C_G(\alpha) \text{ は } r\text{-nilpotent}.$$

Signalizer functor を用いること で 次の lemma をえる。

Lemma 6.

$$SCN_3(R) \neq \emptyset$$

$$\alpha \in R^\# \longrightarrow C_G(\alpha) \text{ は } \{2, 3\}'\text{-group}.$$

R_1 ; α -invariant Sylow 7-subgroup

R_2 ; α -invariant Sylow 13-subgroup とする。

$SCN_3(R_1) = \emptyset$ のときは, $p=2$ or 3 となり G は solvable となる。 よって $SCN_3(R_1) \neq \emptyset$ としてよい。

$$SCN_3(R_2) = \emptyset \text{ のときは, } p=7, \text{ よって } (7, |G|)=1.$$

Lemma 3 と合わせて, $G \cong L_3(3)$ となる。 $L_3(3)$ の automorphism を考えることにより矛盾をえる。

$$\text{よって } SCN_3(R_2) \neq \emptyset \text{ としてよい。}$$

Lemma 6 より, $C_G(t)$ は, $\{7, 13\}$ -group for every involution or 3-element t . 特に $C_G(t)$ は solvable.

Mason の結果により, 次のいずれかが成立する。

Q は α -invariant S_3 -subgroup とする。

- (i) G has 2-local 3-rank at most 1.
- (ii) Q has rank 2.
- (iii) Q normalizes a non-trivial 2-subgroup of G .

(i), (ii), (iii) のいずれの場合も, 矛盾をえる。

問題

$C_G(\alpha)$: 2-group $\xrightarrow{?}$ G は solvable.