

葉層構造と Gelfand-Fuchs 構造

名大 理 土屋昭博

§0 Introduction.

葉層構造の特性類は Bott による Pontryagin 類の消滅定理をはじめ, Secondary 類の定義等が Bott, Haefliger, Godbillon-Vey, Losik 等によって研究され, それ等は Gelfand-Fuchs による Formal vector fields のなす Lie 環の cohomology 群とも深い関係がつけられている。ここでは葉層構造と Gelfand-Fuchs Cohomology との関係を Cohomology level から cochain level での functor にもちあげて考える。そのために Foliation を定義する。微分式を次々微分する。その時そこに表われる構造方程式が, Formal vector fields のなす Lie 環の Canonical cochain complex の定義にほかならない事を見る。この事と Differential graded algebras の homotopy category の

algebraic topology を利用して束縛する functor とその間の関係が調べられる。その結果たとえば codimension q の framed foliations の分類空間 FP_q についてその homotopy 群 $\pi_i(FP_q)$ が無限に多くの i について, $\pi_i(FP_q)$ から有限次元 (over $\mathbb{R}$) vector space の non-zero な onto 準同型写像が構成される。

§1. Framed foliations.

Def. 1-1. q を正なる整数とする。

1) M を smooth manifold とする。 M 上の codimension q の framed foliation w とは。

i) $w = (w^1, \dots, w^q) : \mathbb{R}^q$ -valued 1-form on M .

ii) $w = (w^1, \dots, w^q)$ は各点で一次独立

iii) integrability condition. M 上の $gl(q, \mathbb{R})$ valued 1-form (w_j^i) が存在して構造方程式 $dw^i = -\sum_j w_j^i \wedge w^j$ をみたす。

2) $f: M \rightarrow N$, smooth map とし w は N 上の codim. q framed foliation とする。 f が w に transversal, $f \perp w$, とは f^*w が M 上各点で一次独立のとき。この時 f^*w は M 上の codim. q の

framed foliation を定義する。

3). $(M, \omega_0), (M, \omega_1) \in M$ 上の 2 つの codim. q の framed foliations とする。 ω_0 と ω_1 とが concordant であるとは、 $\omega_0 \sim \omega_1$, $M \times I$ 上に codim. q framed foliations $\tilde{\omega}$ が存在して次の 2 つをみたすとき。(1) $\tilde{\omega}|_{M \times 0}, \tilde{\omega}|_{M \times 1}$ と transversal
(2) $\tilde{\omega}|_{M \times 0} = \omega_0, \tilde{\omega}|_{M \times 1} = \omega_1$.

この concordant は equivalence relations とする。そこで smooth manifold M について $FP_q(M)$ で、 M 上の codim. q framed foliations の concordance classes A_q のなる set を表わす。

Prop. 1-2. Gromov - Phillips [31].

M : open manifold (i.e. M の各 connected component は compact でない), $f: M \rightarrow N$ は smooth map, $\omega \in N$ 上の framed foliation とする。この時 $f': M \rightarrow N$ smooth map で $f \simeq f'$ homotopia かつ $f' \perp \omega$ なるものが存在する。

記号: $\mathfrak{M}$ で finite simplicial complex と同じ homotopy type をもつ open manifolds とその間の smooth maps の homotopy classes

のなす category. $\mathcal{FM}$ を connected, simply connected なもののなす $\mathcal{FM}$ の full subcategory とする.

今 $\text{ob } \mathcal{FM} \ni M$ について $\text{Sets}, FP_q(M)$ を Def.

1-1) の通りとし,

$f: M \rightarrow N$, smooth map と $FP_q(N)$ の元

$\{w\}$ が与えらることをする. $\{w\}$ の代表元 $w \in \cdot$ と

り. Prop 1-2 により f' を選べ, $\{f'^*w\} \in FP_q(M)$

と考える. Prop 1-2 の relative version

の拡張を考える事により f^*w の属する concordant class

$\{f^*w\} \in FP_q(M)$ は f' の取り方に

よらず well-defined な事がわかる. これを

$f^*\{w\} \in FP_q(M)$ と表わす. 更に Prop 1-2 の

relative version をもう一度使にこれは f の

homotopy classes にしかよらない事がわかる.

こうして次の命題を得る

Prop. 1-3. Haefliger [3].

$FP_q: \mathcal{FM} \rightarrow (\text{Sets})$ なる contravariant functor が定義される.

さて foliation に肉する構造方程式 $dw^i = -\sum_j w_j^0 \omega_j^i$ を高次の構造方程式にまで拡張しよう. そのために少し準備をする.

$n \geq 1$ integer を fix する。

$G_n(g) = \{f: (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0) \text{ differo の } n\text{-jets 全体} \\ \text{の可 Lie 群}\}$. たとえば $G_1(g) = GL_g(R)$, $n \geq 1$.

$\mathcal{O}(g) = \{R^n \text{ 上の formal vector fields 全体の} \\ \text{可 Lie 環}\}$.

$\mathcal{O}_n(g) = \{X \in \mathcal{O}(g) \quad X = \sum a_{\alpha}^i x^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^i}, a_{\alpha}^i \in R \\ \text{と infinite sum に属したとき } a_{\alpha}^i = 0, |\alpha| \geq n+1. \\ \text{とおいて得た } \mathcal{O}_n(g) \text{ の quotient Lie algebra.} \\ \text{たとえば } \mathcal{O}_0(g) \cong R^n, \text{ abelian. } \dots \quad n=0, 1, 2, \dots$

今 M smooth manifold, $\mathcal{F}$ を M 上の $\mathcal{F}$ framed で $\mathcal{F}$, M 上の codim g foliation とする。
 $\tau(M)$, M の tangent bundle, $\tau(\mathcal{F})$ $\mathcal{F}$ の tangent bundle = $\mathcal{F}$ を define する distribution. とする時 $\nu(\mathcal{F}) = \tau(M) / \tau(\mathcal{F})$ として $\mathcal{F}$ の normal bundle が define される。 $P_1(\mathcal{F}) = P_1$ で $\nu(\mathcal{F})$ の frame bundle とする。 P_1 は $\mathcal{F}$ の normal 方向に関する 1-jets の frame bundle と考えられる。normal 方向に関する高次 jets の frame bundles $P_n(\mathcal{F})$ が考えられる。 $n=1, 2, \dots$ 。又各 $P_n(\mathcal{F})$ 上には canonical forms が考えられる。これら合せて

Prop 1-4. M 上の $\text{codim } g$ foliation $\mathcal{F}$ に対して. M 上の principal bundles の列.

$$\rightarrow P_n(\mathcal{F}) \xrightarrow{\pi_{n-1}} P_{n-1}(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots \rightarrow P_1(\mathcal{F}) \xrightarrow{\pi_0} M.$$

で次の性質をもつものが存在する.

0) π_{n-1} は structure 群 $G_n(g)$ をもつ.

1) 各 P_n 上 $\mathcal{O}_{n-1}(g)$ valued 1-form θ_{n-1} が存在し.

(A) $\pi_{n-1}^* \theta_{n-2} = \pi_{n-2} \circ \theta_{n-1}$, B) $\pi_{n-1}^* d\theta_{n-1} = -\frac{1}{2}$

$$\pi_{n-2} \circ [\theta_{n-1}, \theta_{n-1}], \text{ ここに } \pi_{n-1}: \mathcal{O}_n(g) \rightarrow \mathcal{O}_{n-1}(g)$$

も同様に π_{n-1} で表わした. $n=2, 3, \dots$

2) 上の (P_*, θ_*) は foliations に対する transverse map によって natural.

ところで今 (M, ω) を M 上の $\text{codim } g$ の framed foliation とする. この時 $\iota(\omega)$, ω の normal bundle, の frame $X = (X_1, \dots, X_g)$ が $\omega^i(X_j) = \delta_j^i$ を満たすように unique に決る. だからこの X は $P_1(\omega) \rightarrow M$ の cross-section $X_1: M \rightarrow P_1(\omega)$ を unique に決る. bundle $\pi: P_n(\omega) \rightarrow P_1(\omega)$ の fiber は affine space だから X_1 は up to homotopy で unique に cross-section $X_n: M \rightarrow P_n(\omega)$ に extend できる. ここで $X_\infty: M \rightarrow P_\infty(\omega) = \varprojlim P_n(\omega)$ なる X_1 の extension を 1 つ fix する.

この時 M 上の $\mathcal{O}(g)$ -valued 1-form $\theta(w)$ を
 $\theta(w) = \tilde{\theta}(w) \circ X_w$ で define する

Prop 1-5.

M 上の codim g -~~fold~~ framed foliation w に対し
 $\mathcal{O}(g)$ -valued 1-form on M , $\theta(w)$ が
 定まる次の構造方程式をみたす。

$$d\theta(w) = -\frac{1}{2} [\theta(w), \theta(w)].$$

かつこの $\theta(w)$ が次の意味で unique である。
 $\theta'(w)$ をもう一つの $\theta(w)$ とすると, $M \times I$ 上の $\mathcal{O}(g)$ -
 valued 1-form $\tilde{\theta}$ が存在して $d\tilde{\theta} = -\frac{1}{2} [\tilde{\theta}, \tilde{\theta}]$
 かつ $\tilde{\theta}|_{M \times 0} = \theta(w)$, $\tilde{\theta}|_{M \times 1} = \theta'(w)$ が成立する。

§2. Gelfand - Fuchs cohomology.

Formal vector fields の Lie 環 $\mathcal{O}(g)$ に Krull
 topology を与えおく。各 $p \geq 0$ について $C^p(\mathcal{O}(g))$
 を, $\varphi: \mathcal{O}X \cdots X\mathcal{O} \rightarrow R$, anti-commutative,
 p -multilinear, continuous map 全体のある
 vector space とする, $R \in R$ は discrete
 topology を与えおく。differential $d: C^p(\mathcal{O})$
 $\rightarrow C^{p+1}(\mathcal{O})$ を $d\varphi(X_0, X_1, \dots, X_p) = \sum_{i=0}^p \frac{1}{p+1} (-1)^{i+1} \cdot$
 $\varphi([X_i, X_j], X_0, \dots, \check{X}_i, \dots, \check{X}_j, \dots, X_p)$ で define する。

又積 $\wedge : C^p(\Omega) \otimes C^{p'}(\Omega) \longrightarrow C^{p+p}(\Omega)$ を

$$(f \wedge f')(x_0, \dots, x_{p+p'}) = \sum_{\sigma \in S_{p+p'}} \frac{1}{(p+p')!} f(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(p)}) \cdot f'(x_{\sigma(p+1)} \dots x_{\sigma(p+p')})$$

で define する。この時, $d \circ d = 0$, $f' \wedge f = (-1)^{\deg f \cdot \deg f'} f \wedge f'$, 及び $d(f \wedge f') = df \wedge f' + (-1)^{\deg f} f \wedge df'$ が

成立する。 $H^*(\Omega(\mathcal{Q}))$ を Differential graded algebra $C^*(\Omega(\mathcal{Q}))$ の cohomology ring を表わす。

ところで $\Omega(\mathcal{Q}) = \{X = \sum a_{\alpha}^i x^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^i}, \text{ infinite sum, } a_{\alpha}^i \in R\}$ と表わされる。そこで $\theta : \Omega(\mathcal{Q}) \rightarrow \Omega(\mathcal{Q})$

linear map を $\theta = \text{id}$, 恒等写像で表わし

$\theta = \sum \theta_{\alpha}^i x^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^i}$ infinite sum, $\theta_{\alpha}^i \in \text{Hom}_R(\Omega(\mathcal{Q}), R)$, と base で展開する。この時,

$\theta_{\alpha}^i \in C^1(\Omega(\mathcal{Q})) = \text{Continuous Hom}_R(\Omega(\mathcal{Q}), R)$ となる。

$\{\theta_{\alpha}^i\}$ は $C^1(\Omega(\mathcal{Q}))$ の R 上の base となる。故に $C^*(\Omega(\mathcal{Q})) = \text{free commutative algebra generated by } \{\theta_{\alpha}^i\}$ となる。又定義から

$$f \in C^1(\Omega(\mathcal{Q})) \text{ に対して } df(X, Y) = -\frac{1}{2} f([X, Y]).$$

この事から $d : C^*(\Omega(\mathcal{Q})) \rightarrow C^*(\Omega(\mathcal{Q}))$ は $d\theta_{\alpha}^i$ を決めれば決まる。ところで $\Omega(\mathcal{Q})$ 上の $\wedge^2 \Omega(\mathcal{Q})$ valued

$$2\text{-forms } d\theta(X, Y) = \sum d\theta_{\alpha}^i(X, Y) x^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$\text{及び } -\frac{1}{2} [\theta, \theta](X, Y) = -\frac{1}{2} [\theta(X), \theta(Y)] \text{ を考える}$$

と上の事から $d\theta = -\frac{1}{2} [\theta, \theta]$ が成立する。

又 $d\theta = -\frac{1}{2}[\theta, \theta]$ 各 components は unique に $d\theta^\alpha_\alpha$ を決める。

そこで今 (M, ω) を M 上の codim. g -framed foliation とする。Prop. 1-5 の $\Omega(g)$ -valued 1-form $\theta(\omega)$ を取り $\theta(\omega) = \sum \theta^\alpha_\alpha(\omega) x^\alpha \partial/\partial x^i$ と展開し, $\varphi(\omega): C^*(\Omega(g)) \rightarrow \Omega^*(M)$ linear map を $\varphi(\omega)(\theta^\alpha_\alpha) = \theta^\alpha_\alpha(\omega)$ で define し φ を algebra homomorphism $\varphi(\omega): C^*(\Omega(g)) \rightarrow \Omega^*(M)$ に unique に拡張する。上の考察と Prop 1-5 より 次の Prop. を得る。

Prop 2.1.

各 codim g framed foliation (M, ω) に $\mathbb{Z}/2$ differential graded algebra map $\varphi(\omega): C^*(\Omega(g)) \rightarrow \Omega^*(M)$ が対応する。又 $\varphi(\omega)$ は次の意味で unique up to homotopy. $\varphi'(\omega)$ を別の $\varphi(\omega)$ とすると, $\tilde{\varphi}: C^*(\Omega(g)) \rightarrow \Omega^*(M \times I)$ なる differential graded algebra map が存在し $\tilde{\varphi}|_{M \times 0} = \varphi(\omega)$, $\tilde{\varphi}|_{M \times 1} = \varphi'(\omega)$ を満たす。

coboundary ~~環~~ $H^*(\Omega(g))$ の計算は Gelfand-Fuchs によってなされている。今 $W(\Omega(g))$ で次の differential graded algebra を表わす。

$W(\alpha(g)) = \hat{R}[C_1, \dots, C_p] \otimes \Lambda^*(h_1, h_2, \dots, h_p) \cong \mathbb{C}$.
 $\deg C_i = 2i$, $\deg h_i = 2i-1$. $\hat{R}[C_1, \dots, C_p] = R[C_1, \dots, C_p]$
 $\text{mod (ideal of degree } > 2g)$. Λ^* : exterior algebra.
 $\hookrightarrow dh_i = C_i$.

Proposition 2-2. Gelfand-Fuchs [1].

$W(\alpha(g)) \rightarrow C^*(\alpha(g))$. Differential graded algebra map $\hat{v}$ cohomology の同型を induce するものが存在する。

$H^*(W(\alpha(g)))$ を実際に計算するのはむづかしい。たとえば
 Prop 2-3. Vey [2]

Elements $\{h_{i_1} \cdots h_{i_r} C_{j_1} \cdots C_{j_s}\}$.

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq g \quad r=1, \dots, g.$$

$$1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_s \leq g \quad s=1, \dots, g.$$

$$j_1 + \dots + j_s \leq n < i_1 + j_1 + \dots + j_s \quad \text{かつ} \quad i_1 < j_1.$$

が $H^*(\alpha(g))$ の R 上の base をなす。

§3 Homotopy category of D. G. A.

Differential graded algebra A とは, $(A = \sum_{p \geq 0} A_p, d)$
~~differential~~ cochain complex over R で, anti-
 commutative 係数をもつ ^{with unit} differential d
 は $d(u \cdot v) = d(u) \cdot v + (-1)^{\deg u} u \cdot d(v)$ をみたすものとする。

Differential graded algebra を D.G.A. と云い,
D.G.A. の間の differential graded algebra
map を単に D.G.A. map と云う

今後考える D.G.A. は次の仮定を常に満たしている
ものとする。

仮定. D.G.A. は connected, simply connected
かつ cohomologically locally finite である。
 $H^0(A) = H^1(A) = 0$, $H^i(A)$ は各 i について有限次元。

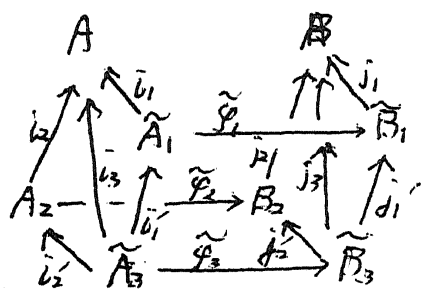
Def 3-1. A, B を 2 つの D.G.A. とする。

1) quasi morphism $\varphi: A \rightarrow B$ とは diagram

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ \uparrow i & & \downarrow j \\ A' & \xrightarrow{\varphi} & B' \end{array} \quad \text{の事である。}$$

ここに $A', B':$ D.G.A., $i, j, \tilde{\varphi}: \text{D.G.A. map}$
かつ $i^*: H^*(A') \rightarrow H^*(A)$, $j^*: H^*(B') \rightarrow H^*(B)$ は
isomorphism.

2) $\varphi_1, \varphi_2: A \rightarrow B$ を 2 つの quasi-morphisms
とする。この時 φ_1 と φ_2 は homotopic $\varphi_1 \sim \varphi_2$ とい
うのである。 $\varphi_3: A \rightarrow B$ なる quasi-morphism
が存在し、又 D.G.A. map $i_1: \tilde{A}_3 \rightarrow \tilde{A}_1$, $i_2: \tilde{A}_3 \rightarrow \tilde{A}_2$
 $j_1: \tilde{B}_3 \rightarrow \tilde{B}_1$, $j_2: \tilde{B}_3 \rightarrow \tilde{B}_2$ が存在し次の commu-
tative diagram を満たす時。



Prop 3-2.

- 1) Quasi morphisms の間の relations $\sim$ は equivalence relation で 同
- 2) $H.C. : \text{D.G.A. 全体 (仮定を与えず.)}$
morphisms とし Quasi morphisms の homotopy classes 全体とすると morphisms の間に composition が定義できて category を成す。

$H.C.$ is the homotopy category of D.G.A.'s である。
又 de Rham cochain complex を得る functor

Ω^* は homotopy category $\mathcal{F}, \mathcal{M} \rightarrow H.C.$ の
間の functor とも考えられる。この時 de Rham
theorem は次のように記述される。 $M \in \mathcal{F}, \mathcal{M}$ に対して
 $H^*(M; \mathbb{R}) \cong H^*(\Omega^*(M))$ 。ここで 左辺は singular
cohomology 右辺は $H.C.$ 上で cohomology とする
functor。

Def 3-3.

D.G.A. の minimal とは H : algebra とし

free (anti) commutative,かつ $\forall x \in M$ について,
 dx : decomposable i.e. $dx \in \bar{H} \circ \bar{H}$, ことに $\bar{H} = \sum_{p \geq 1} M_p$.

Prop 3-4 D. Sullivan [6].

D.G.A. A について minimal model $M(A)$ と
 D.G.A. map $\varphi: M(A) \rightarrow A$ で cohomology の同型を
 induce するものがある。又このような $M(A)$ は同型を
 除いて unique に決る。

今 $n \geq 2$ について $\mathcal{H}_C$ における n 次元 sphere S^n
 を $S^n = H^*(S^n; R)$ with trivial differential で
 define する。又 $A \in \text{ob } \mathcal{H}_C$ について $\pi_0(A) = \pi_1(A) = 0$
 $\pi_n(A) = \text{Hom}_{\mathcal{H}_C}(A, S^n)$, $n \geq 2$, とおいて

homotopy 群 $\pi_*(A) = \sum_n \pi_n(A)$ を define しよう。

この群 $\pi_*(A)$ に自然に R 上の vector space の構造
 が入る。 $\pi_*(A)$ に Whitehead 積を導入しよう。 $p, q \geq 2$

とし $\varphi_1 \in \pi_p(A)$, $\varphi_2 \in \pi_q(A)$ を fix しよう。space
 level での Whitehead 積 $[\varphi_1, \varphi_2]: S^p \vee S^q \rightarrow S^{p+q-1}$
 を考えよう。 $S^p \vee S^q$, S^{p+q-1} と同じ homotopy type を

持つ $\mathcal{H}_C$ の元を X, Y とし, $[\varphi_1, \varphi_2]: Y \rightarrow X$ を

smooth map を fix する。この時 $[\varphi_1, \varphi_2] \in \pi_{p+q-1}(A)$

を $A \xrightarrow{S^p \vee S^q} S^p \vee S^q \simeq \Omega^*(Y) \xrightarrow{[\varphi_1, \varphi_2]^*} \Omega^*(X) \simeq S^{p+q-1}$

の represent する morphism in $\mathcal{H}_C$ とする。

この特異性により up to homotopy, Ω^n homotopy functor である事により Ω^n well defined である。
 今 graded module $s^1\pi_*(A) \in (s^1\pi_*(A))_p = \pi_{p+1}(A)$ で define しよう。

Prop 3-5.

1) A topological space X は $A \in \text{ob } \mathcal{H}_C$ について graded module $s^1\pi_*(A)$ は次の意味での graded Lie algebra over $\mathbb{Z}$ (or over R) となる。

- $[x, y] = (-1)^{p^q} [y, x] \quad \deg x = p, \deg y = q$
- $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{\deg x \deg y} [y, [x, z]]$.

2) Functor $\Omega^*: \mathcal{H}_C \rightarrow \mathcal{H}_C$ は homotopy 群の Lie 環としての準同型 $s^1\pi_*(M) \rightarrow s^1\pi_*(\Omega^*(M))$ を与える。

3) この特異性 $s^1\pi_*(M) \otimes R \rightarrow s^1\pi_*(\Omega^*(M))$ は同型である。

次に $A \in \text{ob } \mathcal{H}_C$ について $\pi_*(A)$ がどのように計算されるかを調てよう。 $A \in \text{ob } \mathcal{H}_C$ について その minimal model $\varphi: M(A) \rightarrow A$ を fix する。

Prop 3-6.

1) $\pi_*(A) \cong \text{Hom}_R(\bar{M}/\bar{M}^2, R)$

2) Bracket $[\cdot, \cdot]: \pi_*(A) \otimes \pi_*(A) \rightarrow \pi_*(A)$ は

$-d: \bar{M}/\bar{M}^2 \rightarrow \Lambda^2(\bar{M}/\bar{M}^2)$ の dual と見る。

さて $C^*(\alpha(q)) \in \text{ob } \mathcal{H}_1 C$ の homotopy type を
 考えてみよう。Prop 2-1, Prop 2-2 により $H^*(\alpha(q))$ の
 積は trivial である事がわかる。この ことにより
 Prop 3-7.

今 $X = S^{2q+1} \vee \dots$, Σ cohomology $H^*(X; R)$ が
 $H^*(\alpha(q))$ と同型となる spheres の one-point
 union となる $\text{ob } \mathcal{H}_1 C$ の $\bar{\alpha}$ とすると $X \simeq C^*(\alpha(q))$
 is the same homotopy type.

そこで spheres の one point union に関する
 Hilton の 結果を利用すると $C^*(\alpha(q))$ の minimal
 model 及び homotopy 群が求められる。

V_q : free graded Lie algebra generated
 by $S^1 \Pi_*(\alpha(q))$ とする。ここに $\Pi_*(\alpha(q)) = \sum_{i \geq 1} \text{Hom}_R(H^i(\alpha(q)), R)$. $\mathcal{M}(q)$ で $\text{Hom}_R(SV_q, R)$ で generate
 される free anti commutative algebra とし。
 $-d: \Lambda^1(\text{Hom}_R(SV_q, R)) \rightarrow \Lambda^2(\text{Hom}_R(SV_q, R))$ の dual
 で define し、 d とは derivation とは differential
 d を定義して $(\mathcal{M}(q), d)$ を D.G.A とする

Prop 3-8 Hilton [57].

- 1) $S^1 \Pi_*(C^*(\alpha(q))) \cong V_q$, as Lie algebras
- 2) $C^*(\alpha(q))$ の minimal model は上の $(\mathcal{M}(q), d)$ である。

§4. Gelfand-Fuchs 構造

Def 4-1. $q \geq 1$ integer について

- $GF_q: H_1 C \rightarrow (\text{sets})$ なる contravariant functor を $GF_q(A) := \text{Hom}_{H_1 C}(C^*(\Omega(q)), A)$ で定義する。
- $GF_q(A)$ の元を A の上の Gelfand-Fuchs 構造とよぶ。 M 6 ob 空間について $GF_q(M) = GF_q(\Omega^*(M))$ とおく。
- $\pi_*(GF_q) = \sum_{n \geq 0} \pi_n(GF_q) = \sum_n \text{Hom}_{H_1 C}(C^*(\Omega(q)), S^n)$ とおく。

Prop 2-1 により

Prop 4-2.

$GF_q, FP_q: \text{ob } M \rightarrow (\text{sets})$ なる
2つの contravariant functors の間の natural
transformation $\Phi: FP_q \rightarrow GF_q$ が存在する。
とれば $FP_q(M) \ni \{w\}$ について $GF_q(M) \ni \{g(w)\}$
 $g(w): C^*(\Omega(q)) \rightarrow \Omega^*(M)$ を対応させる事により
得られる。

この命題により $\pi_*(FP_q) \rightarrow \pi_*(GF_q)$ の image
を調べる事を考えよう。次の事が知られている。

- 1) $\pi_i(FP_q) = 0 \quad 0 \leq i \leq q+1$. Thurston [7].
- 2) $\pi_3(FP_q) \rightarrow R \rightarrow 0$ なる isomorphism が
存在する。 Thurston [7].

3) 各 $k \geq 1$ integers に対し integer $b_k > 0$ と onto homomorphism $H_{4k+1}(FP_{2k+1}, \mathbb{Z}) \rightarrow R^{b_k} \rightarrow 0$ が存在する (J.L. Heitsch [4]).

ところで Heitsch の結果をよくみると.

1) の FP_q に関する connectivity theory と Serre の C -theory を利用すると 次の Prop. を得る.
Prop 4-3. Heitsch.

$\pi_{4k+1}(FP_{2k+1}) \rightarrow H_{4k+1}(FP_{2k+1}) \rightarrow R^{b_k} \rightarrow 0$ は onto homomorphism である。

ところで上の map $\pi_{4k+1}(FP_{2k+1}) \rightarrow R^{b_k}$ は $\pi_{4k+1}(FP_{2k+1}) \rightarrow \pi_{2k+1}(GF_{2k+1}) \rightarrow H_{2k+1}(GF_{2k+1}) \rightarrow R^{b_k}$ と factor される。Prop. 3-8 を使えば 次の命題を得る。

Prop. 4-4.

上の map は onto である Lie 環の homomorphism $S^+ \pi_*(FP_{2k+1}) \rightarrow V((R^{b_k})_{\geq p-2}) \rightarrow 0$. ここに V は free Lie algebra functor, $(R^{b_k})_{\geq p-2}$ は grading $\geq p-2$ となる graded vector space R^{b_k} .

References.

- [1] Gelfand - Fuchs. The cohomology of the Lie algebra of formal vector fields. *Izvestia Ann.* Vol. 34. (1970) p 322 - 337
- [2] G. Godbillon. Cohomologie d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels. *Seminaire Bourbaki* (1972-1973) No 421.
- [3] A. Haefliger. Homotopy and Integrability. *Manifolds Amsterdam 1970. Lecture Note in Math Vol 177* Springer p 133 ~ 163
- [4] J. L. Heitsch. Residue and characteristics classes of foliations. preprint.
- [5] P. J. Hilton. On the homotopy groups of the union of spheres. *J. London Math Soc.* Vol. 30 (1955) p 154 - 171.
- [6] D. Sullivan, Differential forms and the topology of manifolds. *Manifolds - Tokyo 1973.* p 37 ~ 56
- [7] W. Thurston. Foliations and groups of Diffeomorphisms. *Bull. Am. Math Soc. Vol 80* (1974) p 304 ~ 307