

Anosov 葉層の C^* -環の K -理論

都立大 理 高井博司

(Hiroshi Takai)

§1. 序

C^* -環の K -理論は、同型問題や指数定理と関連して、最近活発に研究されている分野であるが、その中で特に Connes [1] は次の注目すべき結果を出した: C^* -カテゴリー $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \alpha)$ について、 $\mathcal{G}$ を単連結な可解 Lie 群とすると、接合積 $\mathcal{A} \rtimes_{\alpha} \mathcal{G}$ の K -理論 $K(\mathcal{A} \rtimes_{\alpha} \mathcal{G})$ と $\mathcal{A}$ の K -理論 $K(\mathcal{A})$ との間に

$$(I) \quad K(\mathcal{A} \rtimes_{\alpha} \mathcal{G}) \simeq K^{\dim \mathcal{G}}(\mathcal{A})$$

なる関係が成り立つ。更に (I) の系として、葉層 C^* -環 $C^*(M, \mathcal{F})$ についても、 $\mathcal{F}$ が単連結可解 Lie 群の自由作用による軌道を葉とする葉層ならば、

$$(II) \quad K(C^*(M, \mathcal{F})) \simeq K^{\dim \mathcal{F}}(M)$$

が成り立つ。

一方 Kasparov [4] は独自に開発した KK -理論を用い

て, (I) を次の様に一般化した: C^* -カテゴリー $(\mathcal{A}, \mathcal{G}, \alpha)$ について, $\mathcal{G}$ を従順的連結 Lie 群であるとし, $\mathcal{G}_0$ はその極大コンパクト部分群とする. V を $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0$ 上の $\mathcal{G}_0$ での余接ベクトル空間とし, Ad_* を $\mathcal{G}_0$ の V 上への余随伴表現とする. そのとき V から生成される Clifford 環 C_V 上への Ad_* の自然な拡張を α とすると, 可分な C^* -環 $\mathcal{B}$ に対して,

$$(III) \quad KK(\mathcal{B}, \mathcal{A} \rtimes_{\alpha} \mathcal{G}) \simeq KK(\mathcal{B}, (\mathcal{A} \otimes C_V) \rtimes_{\alpha \otimes \text{id}} \mathcal{G}_0)$$

が成り立つ. 更に Ad_* がスピノールならば,

$$(IV) \quad KK(\mathcal{B}, \mathcal{A} \rtimes_{\alpha} \mathcal{G}) \simeq KK^{\dim \mathcal{G}/\mathcal{G}_0}(\mathcal{B}, \mathcal{A} \rtimes_{\alpha} \mathcal{G}_0)$$

が成り立つ.

これら (I) ~ (IV) の結果をふまえて, 本報告においては次の結果を示すことにする: M を (階数 1 の) 局所対称空間の単位球面バンドルとし, ϕ を M の Anosov 葉層とすると, (II) が成り立つ. 証明の本質的部分は (III) による.

§2. 準備

M を (C^∞) 多様体, ϕ を M 上の流れ (又は微分同相写像) とする. ϕ が Anosov であるとは, M の接バンドル $T(M)$ の部分バンドル E^s, E^u, E^c (又は E^s, E^u) が存在して次の条件を満たすときをいう:

$$(1) \quad T(M) = E^s \oplus E^u \oplus E^c \quad (\text{又は } T(M) = E^s \oplus E^u)$$

$$(n) \quad \|d\theta_t|_{E^s}\| \leq C_1 e^{-tC_2} \quad (t \geq 0) \quad (\text{又は } \|d\theta^n|_{E^s}\| \leq C_1 C_2^n \quad (n \geq 0))$$

$$(m) \quad \|d\theta_t|_{E^u}\| \leq C_1 e^{-tC_2} \quad (t \geq 0) \quad (\text{又は } \|d\theta^n|_{E^u}\| \leq C_1 C_2^n \quad (n \geq 0))$$

$$(n) \quad E_x^s = \mathbb{R} \frac{d\theta_t(x)}{dt} \Big|_{t=0} \quad (x \in M)$$

ただし (n), (m) において C_1, C_2 は正の定数 (微分同相の場合は $0 < C_2 < 1$) である。又 $d\theta_t$ は θ_t の微分を意味する。

そのとき M の葉層 $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ で $T\mathcal{F}^s = E^s, T\mathcal{F}^u = E^u$ を満たすものが存在する。ただし $T\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}$ の接平面場である。

$\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ を M の Horocycle 葉層 という。更に,

$$W_x^{ws} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \theta_t(W_x^s) \quad (x \in M, W_x^s \in \mathcal{F}^s)$$

$$W_x^{wu} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \theta_t(W_x^u) \quad (x \in M, W_x^u \in \mathcal{F}^u)$$

とくと, W_x^{ws}, W_x^{wu} は M の部分多様体となり, $\mathcal{F}^{ws} = \{W_x^{ws}\}_{x \in M},$

$\mathcal{F}^{wu} = \{W_x^{wu}\}_{x \in M}$ も M の葉層となる。これらを M の Anosov

葉層 という。 M 上の流れ θ から導入される Anosov (又は

Horocycle) 葉層は, Tomter [7] により次の様なタイプに分け

られる:

(i) 局所対称空間の単位球面バンドル M の測地線流

θ により導入。

(ii) 可解多様体 M の極大バキ零部分多様体の Anosov 微

分同相写像の M への誘導流 θ により導入。

(iii) 簡約可能 Lie 群のバキ零 Lie 群上への作用による

半直積 Lie 群の格子群による剰余多様体 M の自然な流れ θ に

より導入。

本稿では (I) の場合のみを考える。即ち、 G を実階数 1 の連結半単純 Lie 群 (中心有限) とし、その岩沢分解 $G = KAN$ に対して Riemann 対称空間 G/K を考える。 G の一様格子群 Γ をとり、二重剰余空間 $\Gamma \backslash G/K$ を考えると、階数 1 の局所対称空間になる。 M を $\Gamma \backslash G/K$ の単位球面バンドル $\pi(\Gamma \backslash G/K)$ とし、 $\Gamma \backslash G/K$ の測地線 $\pi gK \rightarrow \pi g(\exp tX)K$ ($g \in G, t \in \mathbb{R}$) の定める M 上の流れ θ は Anosov になる。ただし、 $A = \exp \mathbb{R}X$ とする。 θ による M の Horocycle 及び Anosov 葉層をそれぞれ $\mathcal{F}_H, \mathcal{F}_A$ と書くと次の命題が成り立つ：

命題 1. $(M, \mathcal{F}_H), (M, \mathcal{F}_A)$ は $\Gamma \backslash G/K$ 上の葉層化バンドルになり、ファイバーはそれぞれ $G/C_K(A)N, G/P$ である。ただし、 $C_K(A)$ は A の K における中心化群であり、 P は極小放物型部分群である。

G/K は単連結であるから $\Gamma \backslash G/K$ の基本群は Γ に同型になる。よって夏目-高井 [5] より次の命題が成り立つ：

命題 2. $C^*(M, \mathcal{F}_H), C^*(M, \mathcal{F}_A)$ はそれぞれ $(C_0(G/C_K(A)N) \times_\lambda \Gamma)_r, (C(G/P) \times_\lambda \Gamma)_r$ に安定同型になる。ただし $(\cdot)_r$ は縮約接合積を意味する。又 λ は左移動作用を表わす。

更に $C_K(A)N, P$ は従順的であるので次の系を得る：

系 3. $C^*(M, \mathcal{F}_H), C^*(M, \mathcal{F}_A)$ はそれぞれ $C(\Gamma \backslash G) \times_r C_K(A)N,$

$C(\Gamma) \times_{\beta} P$ に安定同型である。ただし, β は右移動作用を表わす。

§3. K-理論

先ず Kasparov の同変 KK-理論 のなかで, この節に必要な所を簡単に述べることにする。

$(\mathcal{O}, \mathcal{G}, \alpha), (\mathcal{B}, \mathcal{G}, \beta)$ を C^* -カテゴリーとし, Hilbert $\mathcal{B}$ -加群 $\mathcal{E}$ と, その上の有界 $\mathcal{B}$ -作用素の全体 $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ 及びコンパクト $\mathcal{B}$ -作用素全体 $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ を考える。今 $\mathcal{O}$ から $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ への準同型写像 ρ と, (次数1の) $\mathcal{G}$ -連続作用素 $H \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ で次の条件を満たすものを考える:

$$(3.1) \quad [\rho(a), H], (H - H^*)\rho(a), (H^2 - 1)\rho(a), (\tilde{\beta}_\rho(H) - H)\rho(a) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$$

($g \in \mathcal{G}, a \in \mathcal{O}$)。ただし, $\tilde{\beta}$ は β の $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ への自然な持ち上げである。今 (3.1) を満たす $(\mathcal{E}, \rho, H)$ 全体を $\mathcal{E}_\mathcal{G}(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ で表わし, 特に (3.1) が全て 0 作用素であるものの全体を $\mathcal{D}_\mathcal{G}(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ で表わす。そこで $\mathcal{E}_\mathcal{G}(\mathcal{O}, \mathcal{B})$ の要素 $(\mathcal{E}_0, \rho_0, H_0), (\mathcal{E}_1, \rho_1, H_1)$ に対して, 関係 $(\mathcal{E}_0, \rho_0, H_0) \sim (\mathcal{E}_1, \rho_1, H_1)$ を次の様に導入する:

(i) $\mathcal{E}_0$ から $\mathcal{E}_1$ への $\mathcal{G}$ -同変等距離同型 $\mathcal{U}$ (次数0の) で

$$\rho_1(a) = \mathcal{U} \rho_0(a) \mathcal{U}^{-1} \quad (a \in \mathcal{O})$$

を満たすものが存在する。(ユニタリ-同値性)

(ii) $\mathcal{E}_\mathcal{G}(\mathcal{O}, \mathcal{B} \otimes C[0, 1])$ の要素 $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\rho}, \tilde{H})$ で

$$\tilde{\mathcal{E}}_t = \tilde{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{B} \otimes C[t], 1} (\mathcal{B} \otimes C[t]), \quad \tilde{\mathcal{P}}_t = \tau_t^* \cdot \tilde{\mathcal{P}}, \quad \tilde{\mathcal{H}}_t = \tau_t^* (\tilde{\mathcal{H}})$$

($0 \leq t \leq 1$) なるものが存在して

$$(\tilde{\mathcal{E}}_0, \tilde{\mathcal{P}}_0, \tilde{\mathcal{H}}_0) = (\mathcal{E}_0, \mathcal{P}_0, \mathcal{H}_0), \quad (\tilde{\mathcal{E}}_1, \tilde{\mathcal{P}}_1, \tilde{\mathcal{H}}_1) = (\mathcal{E}_1, \mathcal{P}_1, \mathcal{H}_1)$$

を満たす。(ホモトピー同値性) ただし, τ_t^* は

$$\tau_t^*(\tilde{\mathcal{H}})(\xi \otimes b_t) = \tilde{\mathcal{H}}(\xi) \otimes b_t \quad (\xi \in \tilde{\mathcal{E}}, b_t \in \mathcal{B} \otimes C[t])$$

なる $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{E}})$ から $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{E}}_t)$ への制限準同型である。

$\mathcal{E}_q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ の同値関係 $\sim$ による商空間を $\tilde{\mathcal{E}}_q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ と書き, $\mathcal{D}_q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ の $\tilde{\mathcal{E}}_q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ での像全体を $\tilde{\mathcal{D}}_q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ と書く。

今 $[\mathcal{E}_1, \mathcal{P}_1, \mathcal{H}_1], [\mathcal{E}_2, \mathcal{P}_2, \mathcal{H}_2] \in \tilde{\mathcal{E}}_q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ に対して,

$$[\mathcal{E}_1, \mathcal{P}_1, \mathcal{H}_1] + [\mathcal{E}_2, \mathcal{P}_2, \mathcal{H}_2] = [\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2, \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2]$$

とおくと, $\tilde{\mathcal{E}}_q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は可換半群になり, $\tilde{\mathcal{D}}_q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ による剰余半群 $\tilde{\mathcal{E}}_q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) / \tilde{\mathcal{D}}_q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は可換群になる。これを Kasparov の K-群 もしくは KK-群) といい, $KK_q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ と表わす。

注意 1. $KK_q(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \text{Ext}_q(\mathcal{A})$, $KK_q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = K_q(\mathcal{B})$ である。

注意 2. $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{D}$ は C^* -環であり, それぞれ $(\alpha, \beta, \delta$ なる) G の作用があるとき, $KK_q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ から $KK_q(\mathcal{A} \otimes \mathcal{D}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{D})$ への準同型写像 $\sigma_{\mathcal{D}}$ で

$$(3.2) \quad \sigma_{\mathcal{D}}([\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{H}]) = [\mathcal{E} \otimes \mathcal{D}, \mathcal{P} \otimes \text{id}, \mathcal{H} \otimes 1]$$

($[\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{H}] \in \tilde{\mathcal{E}}_q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$) なるものが存在する。

注意 3. $\mathcal{A}_2$ から $\mathcal{A}_1$ への準同型写像 π に対して, $KK_q(\mathcal{A}_1, \mathcal{B})$

から $KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}_2, \mathcal{B})$ への準同型写像 π^* で

$$\pi^*([\varepsilon, \varphi, \pi]) = [\varepsilon, \varphi \circ \pi, \pi] \quad ([\varepsilon, \varphi, \pi] \in \tilde{E}_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$$

を満たすものが存在する。同様に $\mathcal{B}_1$ から $\mathcal{B}_2$ への準同型写像 γ に対して, $KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1)$ から $KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}_2)$ への準同型写像 γ_* で

$$\gamma_*([\varepsilon, \varphi, \pi]) = [\varepsilon \otimes_{\mathcal{B}_1} \mathcal{B}_2, \gamma' \circ \varphi, \gamma'(\pi)]$$

$([\varepsilon, \varphi, \pi] \in \tilde{E}_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$ を満たすものが存在する。ただし, γ' は $\mathcal{I}(\varepsilon)$ から $\mathcal{I}(\varepsilon \otimes_{\mathcal{B}_1} \mathcal{B}_2)$ への $\mathbb{G}$ -準同型写像で

$$\gamma'(T)(\xi \otimes \eta_2) = T(\xi) \otimes \eta_2 \quad (T \in \mathcal{I}(\varepsilon), \xi \in \mathcal{E}, \eta_2 \in \mathcal{B}_2)$$

を満たす。

次に KK -理論で, 基本的でかつ最も重要な性質に次あげる結果がある:

命題 4. (積交叉性) $(\mathcal{A}_i, \mathbb{G}, \alpha_i), (\mathcal{B}_i, \mathbb{G}, \beta_i) \ (i=1,2)$ $(\mathcal{D}, \mathbb{G}, \delta)$ を C^* -カテゴリーとしたとき, $KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{D}) \times KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{D} \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2)$ から $KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ への写像 $\otimes_{\mathcal{D}}$ で次の条件を満たすものが存在する: C^* -カテゴリー $(\mathcal{A}_i, \mathbb{G}, \alpha_i), (\mathcal{B}_i, \mathbb{G}, \beta_i)_{(i=1,2,3)}, (\mathcal{D}_i, \mathbb{G}, \delta_i)_{(i=1,2)}$ に対し, (i) $(x_1 \otimes_{\mathcal{D}_1} x_2) \otimes_{\mathcal{D}_2} x_3 = x_1 \otimes_{\mathcal{D}_1} (x_2 \otimes_{\mathcal{D}_2} x_3)$

$(x_1 \in KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{D}_1), x_2 \in KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2 \otimes \mathcal{D}_2), x_3 \in KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{A}_3, \mathcal{B}_3))$ が成り立つ。注意 2 の $\sigma_{\mathcal{D}}$ について

$$(ii) \quad \sigma_{\mathcal{D}_2}(x_1) \otimes_{\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{D}_2} \sigma_{\mathcal{D}_1}(x_2) = x_1 \otimes_{\mathcal{D}} x_2$$

$$(x_1 \in KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}), x_2 \in KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2))$$

及び

$$(m) \quad \sigma_{\mathcal{D}_1}(x_1 \otimes_0 x_2) = \sigma_{\mathcal{D}_1}(x_1) \otimes_{\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}_1} \sigma_{\mathcal{D}_1}(x_2)$$

$$(x_1 \in KK_{\mathcal{G}}(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{D}), x_2 \in KK_{\mathcal{G}}(\mathcal{D} \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2))$$

が成り立つ。ただし, $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{D}_i, \mathcal{D}$ ($i=1,2,3, j=1,2$) は可分な C^* 環とする。

実際, $x_1 = [\varepsilon_1, \mathcal{P}_1, F_1] \in KK_{\mathcal{G}}(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{D}), x_2 = [\varepsilon_2, \mathcal{P}_2, F_2] \in KK_{\mathcal{G}}(\mathcal{D} \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2)$ に対して, 次の様に $x_1 \otimes_0 x_2$ を定義する:

$$(a) \quad \varepsilon_{12} = (\varepsilon_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes_{\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{D} \otimes \mathcal{A}_2} (\mathcal{B}_1 \otimes \varepsilon_2)$$

(a) $\mathcal{P}_1 \otimes_0 \mathcal{P}_2$ は $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ から $\mathcal{L}(\varepsilon_{12})$ への準同型写像であり, $\mathcal{P}_1 \otimes_0 \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2 \circ (\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ となる $\mathcal{L}(\varepsilon_1) \otimes \mathcal{A}_2$ から $\mathcal{L}(\varepsilon_{12})$ への自然な準同型写像 $\mathcal{P}_2$ がとれる。

$$(c) \quad \mathcal{L}(\varepsilon_{12}) \text{ の元 } M_j \text{ (} j=1,2 \text{) で, } M_j \geq 0, M_1 + M_2 = 1, \text{ かつ}$$

$$[M_j, \mathcal{P}_2(F_1 \otimes 1)], [M_j, 1 \otimes F_2], [M_j, \mathcal{P}_1 \otimes_0 \mathcal{P}_2(a_j \otimes a_j)], \gamma_j(M_j) - M_j, M_j a_j \in \mathcal{C}(\varepsilon_{12})$$

($a_j \in \mathcal{A}_j$ ($j=1,2$), $j \in \mathcal{G}$) を満たすものに対して,

$$F_1 \#_0 F_2 = M_1^k \mathcal{P}_2(F_1 \otimes 1) + M_2^k (1 \otimes F_2) \in \mathcal{L}(\varepsilon_{12})$$

$$\text{とおくと, } x_1 \otimes_0 x_2 = [\varepsilon_{12}, \mathcal{P}_1 \otimes_0 \mathcal{P}_2, F_1 \#_0 F_2] \in KK_{\mathcal{G}}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$$

は M_j の取り方に依らない。この写像 $\otimes_0$ について (i) ~ (m) が成り立つ。ただし, γ_j は $g \in \mathcal{G}$ の ε_{12} 上への作用の $\mathcal{L}(\varepsilon_{12})$ への持ち上げを意味する。

この積に関して, 次の重要な結果がある。

命題 5. $\mathcal{A}_i, \mathcal{D}_j$ ($i=1,2$) を可分な C^* -代数, $\mathcal{B}$ を C^* -代数とする。

もし $\alpha \otimes_{\mathcal{D}_2} \beta = 1_{\mathcal{D}_1}$ を満たす $\alpha \in KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$, $\beta \in KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1)$ が存在すれば, $\gamma = \beta \otimes_{\mathcal{D}_1} \alpha$ は環 $KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_2)$ のベキ等元になり, $KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_1)$ から $KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_2)$ への準同型写像 $\otimes_{\mathcal{D}_1} \alpha$ は 1 対 1 写像である。更に $\otimes_{\mathcal{D}_1} \alpha$ の像 $Im(\otimes_{\mathcal{D}_1} \alpha)$ は

$$Im \gamma = \{ x \in KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_2) \mid x \otimes_{\mathcal{D}_2} \gamma = x \}$$

に一致する。同様に, $\otimes_{\mathcal{D}_2} \beta$ は $KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_2)$ から $KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_1)$ への準同型写像であり, その核 $Ker(\otimes_{\mathcal{D}_2} \beta)$ は

$$Ker \gamma = \{ x \in KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_2) \mid x \otimes_{\mathcal{D}_2} \gamma = 0 \}$$

に一致する。そして

$$KK_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_2) = Im \gamma \oplus Ker \gamma$$

が成り立つ。もし $\gamma = 1_{\mathcal{D}_2}$ ならば, $\otimes_{\mathcal{D}_1} \alpha$, $\otimes_{\mathcal{D}_2} \beta$ は同型写像になる。

上記命題 5 の仮定を満たす $(\mathcal{D}_j, \mathbb{G}, \delta_j)$ ($j=1,2$) 及び α, β は次の様に作られる: 今 $\mathbb{G}$ を従順的連結 Lie 群, $\mathbb{G}_c$ をその極大コンパクト部分群とする。 $\pi = T^*(\mathbb{G}/\mathbb{G}_c)$ を $\mathbb{G}/\mathbb{G}_c$ 上の余接バンドルとし, $C_{\pi}(\mathbb{G}/\mathbb{G}_c)$ を π に随伴して決まる Clifford バンドルの断面で, 無限遠点で 0 になるもの全体の成す C^* 環とする。即ち, V を $\mathbb{G}/\mathbb{G}_c$ 上の $\mathbb{G}_c$ での余接ベクトル空間とし, C_V を V から生成される Clifford 環とすると, $C_{\pi}(\mathbb{G}/\mathbb{G}_c)$ は $\mathbb{G}$ から C_V への連続関数 f で次の条件を満たすもの全体である:

$$(1) \quad f(gh) = \sigma_h^{-1} f(g) \quad (g \in \mathbb{G}, h \in \mathbb{G}_c)$$

$$(ii) \quad \|f(g)\| \rightarrow 0 \quad (g \in G_c \rightarrow \infty),$$

ただし σ は G_c の V への余随伴表現 Ad_* の C_V 上への自然な拡張である。今 G/G_c 上の L^2 -調和形式全体 $L^2(\wedge^*(G/G_c))$ の成す Hilbert 空間を考える。(以下 $\mathcal{H}$ と書く) $C_*(G/G_c)$ から $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$ への準同型写像 φ を $\varphi(\omega) = d\omega + d\omega^*$ ($\omega \in \Omega^1(G/G_c)$) を満たすように定義する。ただし, $d\omega$ は ω による外積作用素を表わし, $d\omega^*$ は ω の共役 1-形式 ω^* の外積作用素 $d\omega^*$ の共役作用素を意味する。 δ を G/G_c 上の滑らかな, 台がコンパクトである形式上の外微分とし, $\Delta = \delta\delta^* + \delta^*\delta$ をラプラシアンとする。そのとき $\frac{\delta + \delta^*}{(1 + \Delta)^{1/2}} \in \mathcal{Z}(\mathcal{H})$ が成り立ち G の $\mathcal{H}$ 上への作用による $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$ 上への自然な持ち上げに関して G -連続となる。

$$\alpha = [\mathcal{H}, \varphi, \frac{\delta + \delta^*}{(1 + \Delta)^{1/2}}]$$

とおくと, $\alpha \in KK_G(C_*(G/G_c), \mathbb{C})$ となる。また $\rho(x)$ を G_c から $x \in G/G_c$ への測地距離とし, $\theta = \frac{\rho \delta \rho}{(1 + \rho^2)^{1/2}} \in \Omega^1(G/G_c)$ とおき, $\varepsilon = C_*(G/G_c)$, $L_\theta f = \theta f$ ($f \in \varepsilon$) とすると,

$$\beta = [\varepsilon, id, L_\theta]$$

は $KK_G(\mathbb{C}, C_*(G/G_c))$ となり, $\alpha \otimes_c \beta = 1_{C_*(G/G_c)}$ が成り立つ。

更に, G が従順的より, $\gamma = \beta \otimes_{C_*(G/G_c)} \alpha = 1_{\mathbb{C}}$ となる。実際, もし $\dim G = 1$ ならば, $G = \mathbb{R}$ 又は T^1 。 γ は $\mathbb{Z}$ 又は $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ のバキ等元より, $\gamma = 1$ 。 $\dim G \leq n$ について $\gamma = 1$ が成り立つと仮定する。もし $\dim G = n+1$ ならば, G は従順的より,

半単純ならばコンパクトであるから, $\gamma = \beta \otimes_{C_\mathbb{F}(M)} \alpha = 1$ となるように選べる。半単純でないならば, T^p は $\mathbb{R}^2$ に同型である G の正規部分群 N が存在する。 $N = T^p$ ならば, $N \subset G_c$ より, $\dim G/N \leq n$ に対して帰納法より $\alpha_{G/N} \in KK_{G/N}(C_\mathbb{F}(G/G_c), \mathbb{C})$ と $\beta_{G/N} \in KK_{G/N}(\mathbb{C}, C_\mathbb{F}(G/G_c))$ で $\alpha_{G/N} \otimes_{\mathbb{C}} \beta_{G/N} = 1_{C_\mathbb{F}(G/G_c)}$, $\gamma_{G/N} = 1_{\mathbb{C}}$ となるものが存在する。 $KK_{G/N}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ から $KK_G(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ への自然な準同型写像により結論が成り立つ。 $N = \mathbb{R}^2$ ならば,

$\alpha_{G_c N} \in KK_{G_c N}(C_\mathbb{F}(G_c N/G_c), \mathbb{C})$, $\beta_{G_c N} \in KK_{G_c N}(\mathbb{C}, C_\mathbb{F}(G_c N/G_c))$ で $\gamma_{G_c N} = 1$ なるものを選び, $\alpha'_{G_c N} = \iota_{G_c N, G} \circ \sigma_{C_W}(\alpha_{G_c N}) \in KK_G(C_\mathbb{F}(G/G_c), C_\mathbb{F}(G/G_c N))$, $\beta'_{G_c N} = \iota_{G_c N, G} \circ \sigma_{C_W}(\beta_{G_c N}) \in KK_G(C_\mathbb{F}(G/G_c N), C_\mathbb{F}(G/G_c))$ を考える。ただし, $W = T_{G_c N}^*(G/G_c N)$ であり, $\iota_{G_c N, G}$ は $KK_{G_c N}(C_\mathbb{F}(G_c N/G_c) \otimes_{C_W} C_W, C_W)$ [又は $KK_{G_c N}(C_W, C_W \otimes_{C_\mathbb{F}}(G_c N/G_c))$] から $KK_G(C_\mathbb{F}(G/G_c), C_\mathbb{F}(G/G_c N))$ [又は $KK_G(C_\mathbb{F}(G/G_c N), C_\mathbb{F}(G/G_c))$] への自然な準同型写像である。これらから, $\alpha = \alpha'_{G_c N} \otimes_{C_\mathbb{F}(G/G_c N)} \tau_{G/N, G}(\alpha_{G/N})$, $\beta = \tau_{G/N, G}(\beta_{G/N}) \otimes_{C_\mathbb{F}(G/G_c N)} \beta'_{G_c N}$ とおくと, $\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \beta = 1_{C_\mathbb{F}(G/G_c)}$, $\gamma = \beta \otimes_{C_\mathbb{F}(G/G_c)} \alpha = 1_{\mathbb{C}}$ が成り立つ。ただし, $\tau_{G/N, G}$ は $KK_{G/N}(C_\mathbb{F}(G/G_c N), \mathbb{C})$ [又は $KK_{G/N}(\mathbb{C}, C_\mathbb{F}(G/G_c N))$] から $KK_G(C_\mathbb{F}(G/G_c N), \mathbb{C})$ [又は $KK_G(\mathbb{C}, C_\mathbb{F}(G/G_c N))$] への自然な準同型写像である。

命題 6. G を従順的連結 Lie 群とし, G_c をその極大コンパクト部分群とする。 ξ を G/G_c 上の余接バンドルとすると,

$$\alpha \in KK_G(C_\mathbb{F}(G/G_c), \mathbb{C}), \beta \in KK_G(\mathbb{C}, C_\mathbb{F}(G/G_c)) \text{ で, } \alpha \otimes_{\mathbb{C}} \beta = 1_{C_\mathbb{F}(G/G_c)},$$

$\beta \otimes_{C_f(G/G_c)} \alpha = 1_G$ を満たすものが存在する。

注意 4. 一般に、従順的連結局所コンパクト群についても命題は成り立つ。

上記命題 6 により、本節の主結果である次の命題を示すことが出来る：

命題 7. (A, G, α) を C^* -力学系とし、 A を可分な C^* -環、 G を従順的連結 Lie 群とすると、 $\alpha \in KK((A \otimes C_V)^{\times_{\alpha \otimes \sigma}} G_c, A \rtimes_\alpha G)$, $\tilde{\beta} \in KK(A \rtimes_\alpha G, (A \otimes C_V)^{\times_{\alpha \otimes \sigma}} G_c)$ で、 $\alpha \otimes_{A \rtimes_\alpha G} \tilde{\beta} = 1_{(A \otimes C_V)^{\times_{\alpha \otimes \sigma}} G_c}$, $\tilde{\beta} \otimes_{A \otimes C_V \times G_c} \alpha = 1_{A \rtimes_\alpha G}$ を満たすものが存在する。ただし、 $V = T_{G_c}^*(G/G_c)$ 。

実際、 $KK_G(A, B)$ から $KK(A \rtimes_\alpha G, B \rtimes_\beta G)$ への自然な準同型写像を考えて、 A, B を $C_f(G/G_c)$, A に対して適用すると、命題 6 より結論を得る。

系 8. 可分な C^* -環 B に対して、 $KK(B, A \rtimes_\alpha G)$ は $KK(B, (A \otimes C_V)^{\times_{\alpha \otimes \sigma}} G_c)$ に同型である。

§4. Thom 同型

本節では §2 で扱った葉層 C^* -環の K -理論を §3, 系 8 を用いて取扱うことにする。

M を局所対称空間の単位球面バンドルとすると、連結半単純 Lie 群 G の岩沢分解 $G = KAN$ と、 G の一樣格子部分群 Γ について、 $M = \Gamma \backslash (M \backslash G/K)$ と書ける。 M の Horocycle 及び Anosov 葉層

を $\mathcal{F}_H, \mathcal{F}_A$ とする。ただし, これらは $\dim A = 1$ の仮定のもとで作られる。系 3 より, $C^*(M, \mathcal{F}_H), C^*(M, \mathcal{F}_A)$ はそれぞれ $C(\pi\mathcal{G}) \times_p C_K(A)N, C(\pi\mathcal{G}) \times_p P$ に安定同型である。よって, K -理論 $K(C^*(M, \mathcal{F}_H)), K(C^*(M, \mathcal{F}_A))$ は K -理論 $K(C(\pi\mathcal{G}) \times_p C_K(A)N), K(C(\pi\mathcal{G}) \times_p P)$ にそれぞれ同型である。

$\mathcal{G}$ の Lie 環 $\mathcal{G}$ が $\mathcal{L}(2, \mathbb{R})$ に同型でなければ $C_K(A)$ は K の連結閉部分群になる。そのとき, $C_K(A)N, P$ は従順的連結 Lie 群になる。これらの極大コンパクト部分群は $C_K(A)$ であるから, 系 8 より $K(C(\pi\mathcal{G}) \times_p C_K(A)N), K(C(\pi\mathcal{G}) \times_p P)$ は $K((C(\pi\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{R}} C_V) \times_{\otimes_{\mathbb{R}}} C_K(A)), V = \mathfrak{n}_{\mathbb{R}}^*, \mathfrak{A}_{\mathbb{R}}^* + \mathfrak{n}_{\mathbb{R}}^*$ にそれぞれ同型である。ただし, $\mathfrak{n}_{\mathbb{R}}^*, \mathfrak{A}_{\mathbb{R}}^*$ は N, A の Lie 環 $\mathfrak{n}, \mathfrak{A}$ の実双対空間を意味する。もし $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$ ならば, C_V は単純になり $M_{2n}(\mathbb{R})$ に同型である。 $C(\pi\mathcal{G}) \cong C(\pi\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, M_{2n}(\mathbb{C}) \cong M_{2n}(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ より

$C(\pi\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{R}} M_{2n}(\mathbb{R}) \cong C(\pi\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{R}} M_{2n}(\mathbb{C})$ となる。よって, その双対空間 $(C(\pi\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{R}} M_{2n}(\mathbb{R}))^\wedge$ は $\pi\mathcal{G}$ に同一視出来る。今 $S \otimes \mathbb{C}$ の $\pi\mathcal{G}$ への作用 $\mathcal{F}$ を考えると, $\pi \cap C_K(A) = \{e\}$ より, 自由作用になる。よって $\mathcal{F}$ の $\xi \in \pi\mathcal{G}$ での安定群 $C_K(A)_\xi$ は自明になる。

$C_K(A)$ はコンパクトであるから, $S \otimes \mathbb{C}$ は (Fell の意味で) 滑らかであるので, 竹崎 [6] により $(C(\pi\mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{R}} M_{2n}(\mathbb{R})) \times_{S \otimes \mathbb{C}} C_K(A)$ の双対空間は $(\bigcup_{\xi \in \pi\mathcal{G}} (C_K(A)_\xi, \omega_\xi)^\wedge) / C_K(A)$ に同一視出来る。ただし, $(C_K(A)_\xi, \omega_\xi)^\wedge$ は $C_K(A)_\xi$ の既約な ω_ξ -射影表現の同値類

の全体である。 $C_K(A)_\xi = \{e\}$ ($\xi \in \pi \backslash G$) より, $(C(\pi \backslash G) \otimes_{\mathbb{R}} M_{2^n}(\mathbb{R})) \times_{\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}} C_K(A)$ の双対空間は $\pi \backslash G / C_K(A)$ に同一視出来る。

このことより $(C(\pi \backslash G) \otimes_{\mathbb{R}} M_{2^n}(\mathbb{R})) \times_{\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}} C_K(A)$ は $\pi \backslash G / C_K(A)$ 上の連続場の C^* -環 $CH(\pi \backslash G / C_K(A), \{C(\mathcal{H}_\xi)\}_\xi)$ に同型である。特に $\mathcal{H}_\xi$ は $L^2(C_K(A))$ に同型にとれる。(実際, Green [3] の手法を使うと, $\mathcal{H}_\xi = L^2(\xi) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2^n}$ ($\xi \in \pi \backslash G / C_K(A)$) と出来るが, $C_K(A) \approx \mathbb{Z}$ であり, $C_K(A)$ は連結コンパクト群であるから, $\dim \mathcal{H}_\xi = 2^n$ となる。) $\pi \backslash G$ は主 $C_K(A)$ -バンドル ($\pi \backslash G / C_K(A)$ 上の) となるから, Dixmier-Douady [2] より $\xi \in \pi \backslash G / C_K(A) \mapsto \mathcal{H}_\xi$ は自明な Hilbert 空間の連続場である。よって Dixmier-Douady [2] より, $CH(\pi \backslash G / C_K(A), \{C(\mathcal{H}_\xi)\}_\xi)$ は $C(\pi \backslash G / C_K(A)) \otimes C(L^2(C_K(A)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2^n})$ に同型になる。だから $K(C^*(M, \mathcal{F}_H))$ (又は $K(C^*(M, \mathcal{F}_A))$) は, $V = \mathcal{N}_{\mathbb{R}}^*$ (又は $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^* + \mathcal{N}_{\mathbb{R}}^*$) が偶数次元の実ベクトル空間ならば, $K(\pi \backslash G / C_K(A))$ に同型である。即ち, $K(M)$ は $K(C^*(M, \mathcal{F}_H))$ (又は $K(C^*(M, \mathcal{F}_A))$) に同型である。 $K(C^*(M, \mathcal{F}_A))$ は $K^{\dim A}(C^*(M, \mathcal{F}_H))$ に同型であるから, $\dim \mathcal{F}_A = \dim AN$, $\dim \mathcal{F}_H = \dim N$ を使うと, もし $C_K(A)$ が連結 ($\neq \mathbb{Z}$) ならば, $K(C^*(M, \mathcal{F}))$ は $K^{\dim \mathcal{F}}(M)$ ($\mathcal{F} = \mathcal{F}_H, \mathcal{F}_A$) に同型である。もし $G \simeq \mathbb{Z}$ ならば, $G = \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) / \Delta$ と書ける。ただし, $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ は $SL(2, \mathbb{R})$ の普通被覆群であり, Δ は G の基本群で $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ の中心の部分群であ

る。 $G = KAN$ を G の岩沢分解とすると, $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) = \widetilde{K}AN$ なる $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ の岩沢分解をとると, $K = \widetilde{K}/\Delta$ となる。 $SL(2, \mathbb{R}) = SO(2, \mathbb{R}) \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbb{R}$ という形より, $\widetilde{K}$ は $SO(2, \mathbb{R})$ の普遍被覆群となる。 $SO(2, \mathbb{R})$ の基本群は $\mathbb{Z}$ であるから, $\Delta = \pi_1(G) = \pi_1(K)$ は $\mathbb{Z}$ の部分群になる。 $C_{SO(2, \mathbb{R})}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}_2$ となり $SL(2, \mathbb{R})$ の中心である。同様にして $C_K(A)$ は G の中心の部分群となる。よって $C(\pi(G)) \times_P, C(\pi(G)) \times_{\bar{P}}, C_K(A)N$ は $(C(\pi(G)) \times_{\bar{P}}, C_K(A)) \times_{\bar{P}} AN, (C(\pi(G)) \times_{\bar{P}}, C_K(A)) \times_{\bar{P}} N$ にそれぞれ同型である。ただし, $\bar{P} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{a}$ である。Connes の Thom 同型定理 (I) より, $K(C^*(M, \mathcal{F}_H)), K(C^*(M, \mathcal{F}_A))$ はそれぞれ $K^{\dim N}(M), K^{\dim AN}(M)$ に同型となる。よって次の結果を得る:

定理 9. $\mathcal{F}_H, \mathcal{F}_A$ を局所対称空間の単位球面バンドル M の Horocycle, Anosov 葉層とすると,

$$K(C^*(M, \mathcal{F})) \simeq K^{\dim \mathcal{F}}(M) \quad (\mathcal{F} = \mathcal{F}_H, \mathcal{F}_A)$$

が成り立つ。

注意 5. $K(M) = K(\pi_1(\pi(G)/K))$ は Thom-Gysin 完全系列により計算される。

文献

[1] A. Connes, An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C^* -algebra by an action of $\mathbb{R}$, *Advances*.

Math., 39 (1981), 31 - 55.

[2] J. Dixmier - A. Douady, Champs continus d'espaces Hilbertiens et de C^* -algèbres, *Bull. Soc. Math. France.*, 91 (1963), 227 - 284.

[3] P. Green, C^* -algebras of transformation groups with smooth orbit space, *Pacific J. Math.*, 72 (1977), 71 - 97.

[4] G. G. Kasparov, K -theory, group C^* -algebras and higher signatures, *Preprint* (1981).

[5] T. Natsume - H. Takaï, Connes algebras associated to foliated bundles, *Preprint*, Univ. Roma (1982).

[6] M. Takesaki, Covariant representations of C^* -algebras and their locally compact automorphism groups, *Acta. Math.*, 119 (1967), 273 - 303.

[7] P. Tomter, On the classification of Anosov flows, *Topology.*, 14 (1975), 179 - 189.