

パターン形成における非平衡の程度に応じた形態転移

山口大学教育学部

古川浩

はじめに：パターン形成の研究は空間的な変化を時間とともに眺めることである。いろいろな境界条件によって規則的なもの、あるいは乱れたものが出現する。このような一つの例として特殊な冷却条件をもった相分離を考える。急冷された *mixture* は相分離する。この現象は理論的にもここ数十年詳しく調べられてきた。ただし、ほとんどの場合、巨視的な系を一様に急冷した場合に限られている。一方、部分的に急冷して、その境界を一定の速度で動かすと、このとき形成されるパターンは一様な急冷によるものとは本質的に異なる場合がある。ここで急冷と云う言葉を使ったが、組成の違いによっても同じことである。従って多成分系の結晶成長といったものも対象となるだろう。また、この問題は熱統計学的に見ても面白い。というのは一様な急冷が準せいの過程と相対するものであが、境界の速度を調節することは準せいの過程とその逆を連続的に結ぶことに相当する。観測される現象としては、流体の乱流への転移との類似があり大変興味深い。

シミュレーション：一様な急冷の場合とどのような違いがあるかを見るためにまずシミュレーションの結果を示す。シミュレーションは *Oono-Puri* によるセルダイナミックスを用いた。これは差分型 *Gibb's-Zuruburg-Landau-Cahn-Hilliard equation* と等価である。温度差、あるいは組成差は次のようにして与えた。不安定領域は従来通りであるが、安定領域は系を 1) 繰り返し初期化する、または 2) オーダーパラメタを固定する、ことによって実現させた。その時初期化は適当な揺らぎをあたえる。さらに不安定領域と安定領域の境界（以後単に境界と呼ぶ）を一定の速度で動かす。形成されるパターンは三つに分類できる。それらは図1に見られる通りである。1a、1b、1cはそれぞれ境界速度 v が大、中、小の場合に相当する。1aは本質的に一様冷却の場合に相当する。のこりは一様冷却の場合には無いもので、不均一冷却特有なものである。このようなパターンの違いは境界の形が違って出てくる。この三つの場合の移り変わりは初期化における揺らぎ（熱ゆらぎ）が小さいとき v のきわめてせまい範囲でおこる。一般に規則的なパターンは時間的に余り変化せず安定化する。鉱物の写真等で見かけるパターンはここで得られたように規則的なものがよくあるが、何等かの関連があるのかもしれない。

理論的考察：次にこのようなパターンが出てくる理由を考え、パターンの変化が起こる v の値を求めてみよう。考える対象は v が中位の場合と小さい場合である。

1. 中位の v ：境界の移動に伴い安定領域が不安定領域に入り込むとき、相分離

は二種類の揺らぎによって引き起こされる。その一つは熱揺らぎであり、もう一つはすでに不安定化している場所から伝播する規則的なdisturbanceである。後者は一様冷却では見過ごされているものであるが、不均一冷却では大変興味深いものである。かりに熱的揺らぎがないとしたとき、disturbanceは不安定相をラメラ的パターンを作りながらかなりの速度で伝播する。伝播方向とラメラの軸は互いに直交している。これはオーダーパラメータが保存することによる。このときの伝播速度 v_0 は（ミクロな長さのスケール）／（ミクロな時間のスケール）で与えられる。境界の移動によって新たに不安定化した領域が狭いほど規則的disturbanceの影響を受けやすく、パターンは規則的である。但しパターンの変化は不連続のようにみえる。この規則的disturbanceがある場所に到達するまでに要する時間はdisturbanceの（伝播距離）／（伝播速度）であたえられる。一方この間に熱的揺らぎは線形理論に従って指数関数的に成長する。二つの揺らぎの大小関係によってパターンがランダムになるか規則的になるかがきまる。境界の移動は一定時間間隔になされるとすれば境界の臨界速度は規則的disturbanceの伝播可能距離に比例する。その結果ランダムパターンと規則的パターンは次で与えられる臨界速度 V_0 を境として分かれる：

$$(1) \quad V_0 = V_0 \ln (X_0 / X)$$

ここで X は熱的揺らぎの大きさを表し、 V_0 及び X_0 は常数である。

2. 小さい v ： この場合境界は固定されたものと見なすことができる。それ故境界付近のドメインの形は境界を含めた系のエネルギー極小できまる。今のモデルではドメインは境界に垂直になる。さてそこでドメインの幅と境界速度の関係を求めてみる。ドメイン幅があまり大きくない場合ドメインは境界付近の粒子を集めて成長する。したがって粒子の拡散係数 D は（ドメインの幅） $\times$ （ドメイン幅成長速度）とおける。一方ドメインの形がエネルギー的に決まるためには境界速度はドメイン幅成長速度より小さいか同じくらいでなければならない。したがって

$$(2) \quad \text{ドメイン幅} = D / (\text{境界速度 } v)$$

安定なドメイン幅の最小値を L_0 としてもう一つの臨界境界速度は $V_1 = D / L_0$ となる。これは熱的揺らぎの影響を受けにくい。図2に $v - X$ 面の相図がしめされている。理論的予想とよい一致がみられる。図3に（2）式が検証されている。

