

乱数を用いた統計処理手法による 非線形推定理論

九大 工学部 中村 政俊

§ 1. 序 論

非線形系の状態推定を行なうに際して、適当な状態変数の選び方をすれば、形式的に観測系は線形の式であらわせ、非線形性はすべて状態遷移式にもたせることができる。そこで線形推定になるフィルタリングに対しては、周知のカルマンフィルタの推定式をそのまま用いることができる。また非線形推定になる予測値計算に対しては、ある確率特性をもつ乱数を発生させて、その統計処理によって予測平均と予測分散を求める。このフィルタは、近似が少ないので、収束性が優れていることがわかる。つぎに、非線形最適制御問題を解く一つの考えを提起する。つまり、非線形の式にテーラー展開を施し、その1次の項迄とった線形式に対して、線形系に対するDP法を適用して解を求め、ある条件を満足する迄その操作を繰り返すことによって、最適制御を逐次的に見出す。

2. 非線形推定理論

2.1 フィルタ構成

状態遷移系は(1)式の非線形で、状態観測系は(2)式の線形であらわされるとき、状態推定問題を考察する。

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + w_k, \quad (1)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k. \quad (2)$$

ここで、 x_k は n 次元状態ベクトル、 y_k は m 次元観測ベクトル、 f_k は n 次元ベクトル値関数、 H_k は $m \times n$ 観測行列、 w_k と v_k は互に独立で、それぞれ平均値0、分散 W_k と V_k の白色正規分布雑音とする。

いま、推定段数が k において、0段から $k-1$ 段迄の観測値の集合 y^{k-1} に基づく k 段の状態値 x_k の確率分布が、平均 $\hat{x}_{k/k-1}$ 、分散 $C_{k/k-1}$ の正規分布

$$N(\hat{x}_{k/k-1}, C_{k/k-1}) \quad (3)$$

として与えられているものとする。

そこで、 k 段の観測値 y_k が新たに与えられたときの x_k の推定値は、観測系が(2)式の線形であるために

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k (y_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}), \quad (4)$$

$$C_{k/k} = C_{k/k-1} - K_k H_k C_{k/k-1}, \quad (5)$$

$$K_k = C_{k/k-1} H_k^T (H_k C_{k/k-1} H_k^T + V_k)^{-1} \quad (6)$$

なるカルマンフィルタの推定式から求められる。

つぎに、予測値を求めるに際して、確率特性が $N(\hat{x}_{k/k}, C_{k/k})$ の母集団から N 個のランダムサンプル $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N$ を発生させる。そこで、それぞれのサンプルに対して、(1) 式に相応する遷移を施して

$$s_i = f_k(\pi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

を求める。ここで、 w_k は状態値に依存しないので、この段階では、 w_k を無視する。この s の集合平均と集合不偏分散

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i, \quad (8)$$

$$\Sigma = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (s_i - \mu)(s_i - \mu)^T \quad (9)$$

を求めて、つぎのようにおく。

$$\hat{x}_{k+1/k} = \mu, \quad (10)$$

$$C_{k+1/k} = \Sigma + W_k. \quad (11)$$

そこで、 f_k が非線形であれば、 s は正規分布をしないが、 $\hat{x}_{k/k}$ の近傍では f_k は線形式から大きく隔ることなく、また π のほとんどすべての分布は f_k が線形とみなせる範囲に存在するとみなして、 y^k に基づく x_{k+1} の確率分布を

$$N(\hat{x}_{k+1/k}, C_{k+1/k}) \quad (12)$$

によって近似する。

この (12) 式が得られれば、 $k+1$ 段においても、いまの k 段と同様の手順が可能になり、もし先験情報 $N(\hat{x}_{0/-1}, C_{0/-1})$ を与えれば、このフィルタの繰り返し演算が可能となる。

うぎに、状態遷移式と状態観測式とが共に非線形で

$$x_{k+1} = \bar{f}_k(x_k) + \bar{w}_k, \quad (13)$$

$$y_k = h_k(x_k) + v_k \quad (14)$$

によってあらわされているときは

$$x_k = g_k(z_k) \quad (15)$$

なる状態変数変換を施して、状態観測式を線形に直す。そうすれば、系は形式的には(1),(2)式の形であらわされて、上述の理論はそのまゝ適用できる。そこで、このフィルタによって、変換後の状態値の推定値 $\hat{x}$ が求められれば、 g の逆変換 g^{-1} から

$$\hat{z} = g^{-1}(\hat{x}) \quad (16)$$

によって、変換前の状態値の推定値 $\hat{z}$ が得られる。

このフィルタの適用の手順はfig. 1に示す。

2.2 乱数の構成法

2.2.1 相関がある乱数のつくり方 与えられた平均

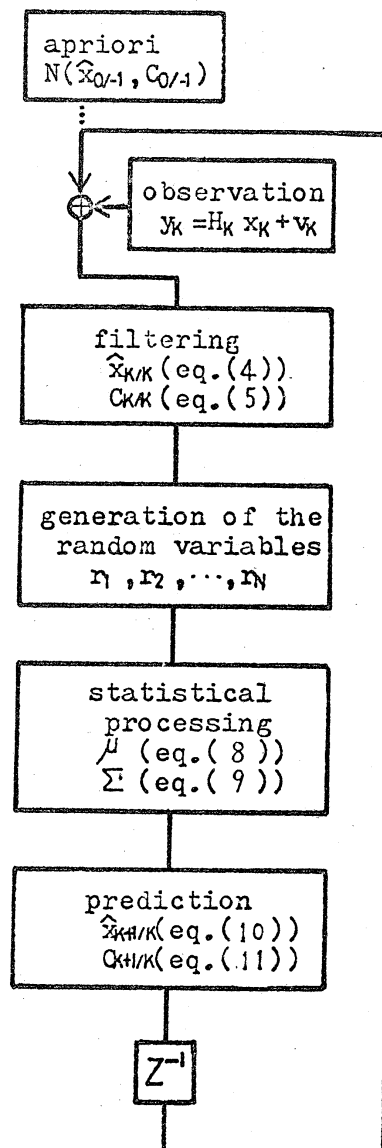


Fig. 1 Estimation algorithm.

$$m = [m_1 \ m_2 \ \cdots \ m_n]^T \quad (17)$$

と分散

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \quad (18)$$

をもつ n 次元正規分布の乱数

$$r = [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_n]^T \quad (19)$$

の構成の一方法を述べる。

まず、平均値 0、分散 1 の互に独立な n 個の正規分布乱数を発生させて、それらを

$$r' = [r'_1 \ r'_2 \ \cdots \ r'_n]^T \quad (20)$$

とする。そこで、行列

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & & & \\ b_{21} & b_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (21)$$

を導入して、つぎの関係式

$$r = m + Br' \quad (22)$$

によって、所望の乱数をつくれればよい。

ここで、 B は以下の関係を満足する行列である。

$$\text{Cov}(\mathbf{y}) = E(\mathbf{B} \mathbf{r} \mathbf{r}^T \mathbf{B}^T) = \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{C}. \quad (23)$$

Bの要素 b_{ij} は, 上式から

$$b_{ii} = \sqrt{C_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (24)$$

$$b_{ij} = \frac{C_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} b_{jk}}{b_{ii}}, \quad j = 1, 2, \dots, i-1 \quad (25)$$

となる。

2.2.2 物理的制約を考慮した乱数のつくり方

いま, 状態変数が

$$u_L^j \leq x_k^j \leq u_U^j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (26)$$

なる制約を受けることがあらかじめわかっている場合には, この情報をフィルタに取り入れるために, 乱数のつくり方に工夫を加える。

そこで, フィルタで予測値を求める際に, 確率特性が $N(\hat{x}_{k/k}, C_{k/k})$ の母集団から取り出したランダムサンプル $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ が

$$u_L^j \leq r_i^j \leq u_U^j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (27)$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

を満足しないサンプルに対して, つぎの何れかの処理を施す。

(a) そのサンプルを捨てる。

(b) $r_i^j < u_L^j$ のとき $r_i^j = u_L^j$ とし, $r_i^j > u_U^j$ のとき $r_i^j = u_U^j$ とする。

(c) u_L^j と u_U^j の間の一様乱数を r_i^j の値として採用する。

2.3 フィルタの特性

2.3.1 標本平均と標本分散の分布

母集団の確率特性が $N(m, C)$ のとき, この母集団からとった N 個のランダムサンプルを $r_1, r_2, \dots, r_N$ とする。この標本平均

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i \quad (28)$$

の分布は正規分布をして, 平均と分散は

$$E(\bar{r}) = m, \quad (29)$$

$$\text{Cov}(\bar{r}) = \frac{1}{N} C \quad (30)$$

である。

また, 標本分散

$$\bar{C} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})(r_i - \bar{r})^T \quad (31)$$

の分布は自由度 $N-1$ のウィシャート分布をして, その平均と分散は

$$E(\bar{C}_{ij}) = C_{ij}, \quad (32)$$

$$\text{Cov}(\bar{C}_{ij}) = \frac{2 C_{ij}^2}{N-1} \quad (33)$$

となる。ここで, $\bar{C}_{ij}$ は $\bar{C}$ の ij 要素を, C_{ij} は C の ij 要素をあらわす。

2.3.2 フィルタの誤差

標本平均 $\bar{r}$ と母集団の平均 r との差を (7) 式の処理を行

なった後には、誤差 e となってあらわれて、それは近似的に

$$e \simeq \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \cdot \varepsilon \quad (34)$$

であらわされる。 $|\partial f(x)/\partial x|$ が有界な値 M でおさえられる場合には

$$|e| \leq M|\varepsilon| \quad (35)$$

となり、(30) 式を考慮すれば、任意の δ に対して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(|e| > \delta) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} P(M|\varepsilon| > \delta) = 0 \quad (36)$$

となる。

また、標本分散 $\bar{C}$ と母集団の分散 C との差に関しては、(33) 式を考慮すれば、いまと同様の議論が行なえる。

2.3.3 フィルタの特長

この統計処理の手法を伴う非線形フィルタの特長をここにまとめる。

- (a) 先験情報が相当雑であっても、フィルタは収束する。
- (b) 同じ精度のフィルタを構成するには、次元数が多くなっても、サンプル個数は一定でよい。
- (c) s の分布を正規分布で近似する以外の近似は、サンプル個数を増しさえすれば、いくらでも小さくしうる。
- (d) 次元数が増した場合の計算時間の増加の割合は、2次近似法フィルタの場合よりも低い。

2.4 数値例

$a \sin(k\omega + \theta)$ なる正弦波予測問題を考える。そこで、状態遷移式と状態観測式が

$$z_{k+1} = \begin{bmatrix} a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} = z_k \quad (37)$$

$$y_k = a \sin(k\omega + \theta) + v_k = z_k^1 \sin(kz_k^2 + z_k^3) + v_k \quad (38)$$

なる形で与えられているとき、変換 g_k として

$$\begin{aligned} g_k^1: x_k^1 &= z_k^1 \sin(kz_k^2 + z_k^3), \\ g_k^2: x_k^2 &= z_k^2 \cos(kz_k^2 + z_k^3), \\ g_k^3: x_k^3 &= z_k^3 \end{aligned} \quad (39)$$

を選べば、(37), (38) 式は

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1}^1 \\ x_{k+1}^2 \\ x_{k+1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k^1 \cos(x_k^3) + x_k^2 \sin(x_k^3) \\ x_k^2 \cos(x_k^3) - x_k^1 \sin(x_k^3) \\ x_k^3 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$y_k = [1 \ 0 \ 0] x_k + v_k \quad (41)$$

となり、このフィルタが適用可能になる。

いま、初期状態は $x_0 = [10 \sin(3\pi/5) \quad 10 \cos(3\pi/5) \quad \pi/5]^T$, v_k の分散は 1, 先験情報として、その平均は全て 0, 分散の対角要素は、それぞれ 5, 5, 1, 非対角要素は全て 0 の下で、サンプル個数を 5, 20, 50 と変えた場合のこのフィルタ

による予測値の結果を fig.2 - fig.4 に示す。さらに, fig.5
では, $10\sin(k\pi/5 + 3\pi/5)$ の予測値の結果を 2 次近似法フイ
ルタを用いた場合の結果と比較している。

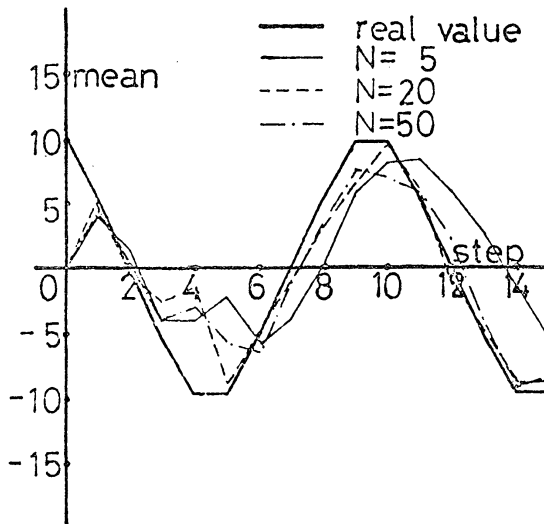


Fig. 2 Predicted mean value of x_k^1
($10\sin(k\pi/5 + 3\pi/5)$).

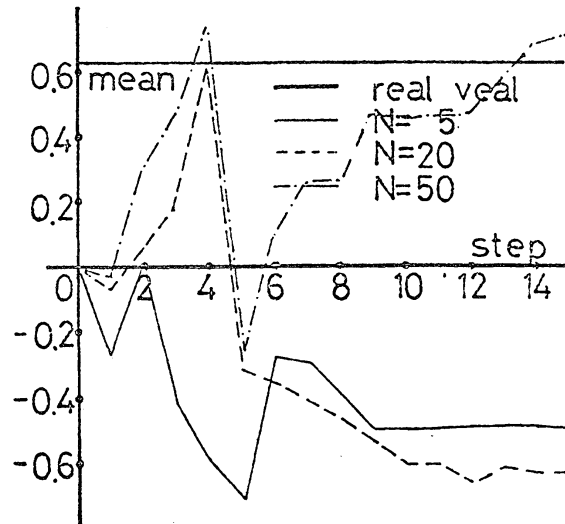


Fig. 4 Predicted mean value of x_k^2
($\pi/5$).

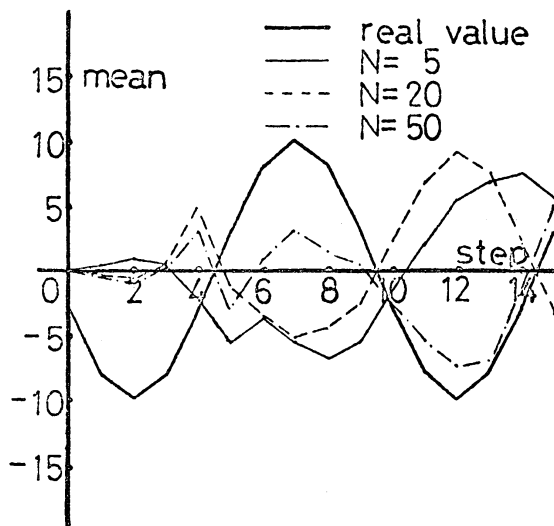


Fig. 3 Predicted mean value of x_k^2
($10\cos(k\pi/5 + 3\pi/5)$).

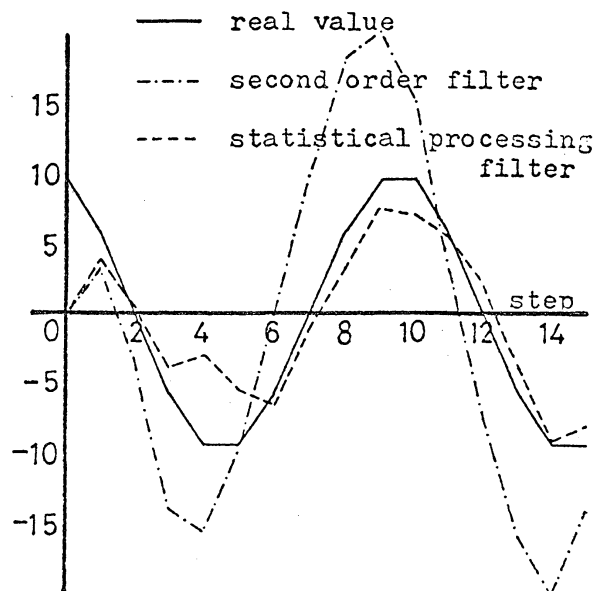


Fig. 5 Predicted mean value of
 $10\sin(k\pi/5 + 3\pi/5)$.

§ 3. 非線形制御問題の考察

3.1 線形遷移, 非線形観測の状態推定と制御

前章で考察したフィルタによって状態推定を行ない, その推定値を使って, 最適制御を構成することを考える。そこで, この節で考察する系は

$$x_{k+1} = \phi_k x_k + G_k u_k + w_k, \quad (42)$$

$$y_k = h_k(x_k) + v_k \quad (43)$$

によってあらわされ, 評価関数は

$$I_N = \sum_{k=1}^N \{ x_k^T Q_k x_k + u_{k-1}^T M_{k-1} u_{k-1} \} \quad (44)$$

とする。ここで, x_k は n 次元状態ベクトル, y_k は m 次元観測ベクトル, u_k は r 次元制御ベクトル, ϕ_k は $n \times n$ 遷移行列, h_k は m 次元ベクトル値関数, G_k は $n \times r$ 駆動行列, w_k と v_k は互に独立で, それぞれ平均値 0, 分散 W_k と V_k の白色正規分布雑音, Q_k と M_k はそれぞれ $n \times n$, $r \times r$ の正定値対称行列, N は制御段数とする。

そこで, (44) 式の評価関数の期待値を最小ならしめる最適制御を求めたい。もし, 状態値が完全観測の場合は, 周知の線形系に対する DP 法⁽⁴⁾によって, 最適制御は

$$u_j^* = B_{N-j} x_j \quad (45)$$

によって得られる。ここで

$$B_{N-j} = -[L G G(N-j+1) + M_j]^{-1} L G \phi(N-j+1), \quad (46)$$

$$P_{N-j} = L\phi\phi(N-\bar{j}+1) + L\phi g(N-\bar{j}+1)B_{N-j}, \quad P_0 = 0, \quad (47)$$

$$S_{N-\bar{j}+1} = Q_{j+1} + P_{N-\bar{j}+1},$$

$$L\phi\phi(N-\bar{j}+1) = \phi_j^T S_{N-\bar{j}+1} \phi_j,$$

$$Lg g(N-\bar{j}+1) = G_j^T S_{N-\bar{j}+1} G_j, \quad (48)$$

$$L\phi g(N-\bar{j}+1) = G_j^T S_{N-\bar{j}+1} \phi_j,$$

$$L\phi g(N-\bar{j}+1) = \phi_j^T S_{N-\bar{j}+1} G_j, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

とする。しかし、いまの状態観測は(43)式によって行なわれるので、 $\hat{x}_{k/k}$ は得られない。そこで、準最適制御を

$$u_k^o = B_{N-k}^{-1} \hat{x}_{k/k} \quad (49)$$

によって構成することにする。

つぎに、 $\hat{x}_{k/k}$ の構成法を考察する。統計処理の手法を伴うフィルタを用うために、状態変数変換

$$x_k = g_k(x_k) \quad (50)$$

によって、(42), (43) 式を

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, w_k), \quad (51)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (52)$$

に書き換える。(51), (52) 式にフィルタを適用して、状態推定値 $\hat{x}_{k/k}$ を求め、それに

$$\hat{x}_{k/k} = g_k^{-1}(\hat{x}_{k/k}) \quad (53)$$

なる逆変換を施して、所望の状態推定値を求め、これから準最適制御を構成する。以上の手順を fig. 6 に示す。

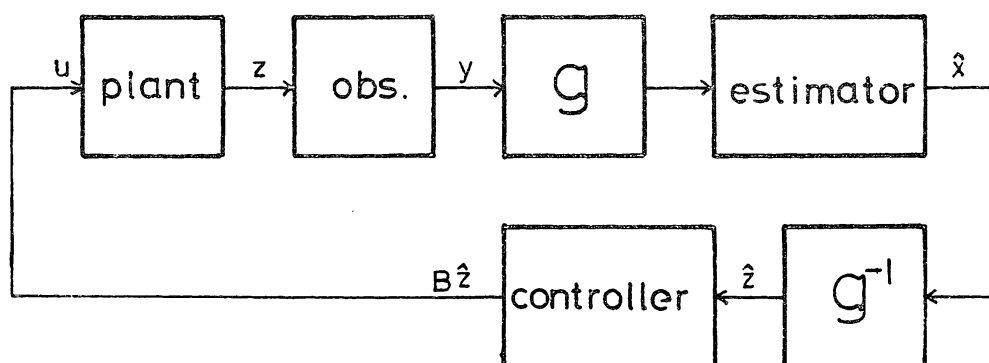


Fig. 6 Block diagram.

3.2 線形化反復計算による逐次制御合成

3.2.1 完全観測の場合

非線形の系

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + G u_k \quad (54)$$

で、評価関数が (44) 式と同じ 2 次形式の場合を考える。この問題を直接解くことは、高次元の最適化問題となって計算の膨大な煩雑さが予想されるので、(54) 式を状態変数の適当な値のまわりでテーラ展開して、その 2 次以上の項を無視して、線形の状態遷移式とみなした系に対して、線形系の DP 法を適用する。そして、テーラ展開の軸となる変数の値が最適軌跡近傍に収束する迄、同様の手順を繰り返す。

以下その手順を示す。

(a) 状態遷移式 (54) 式に対して、各段制御評価

$$J_k = x_{k+1}^T Q_{k+1} x_{k+1} + u_k^T M_k u_k \quad (55)$$

を設けて、それを最小ならしめる制御のシーケンス

$$u_0^0, u_1^0, \dots, u_{N-1}^0 \quad (56)$$

を求める。

(b) (56) の制御によって得られる (54) 式の状態値

$$\bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0, \dots, \bar{x}_N^0 \quad (57)$$

のまわりで、(54) 式をテーラー展開して、その 2 次以上の項を無視する。

$$x_{k+1} = f_k(\bar{x}_k^0) + f'_k(\bar{x}_k^0)(x_k - \bar{x}_k^0) + G u_k. \quad (58)$$

この右辺は、 x_k に関する線形式であるために、上式を

$$x_{k+1} = \phi_k^0 x_k + G u_k + d_k^0 \quad (59)$$

とおく。ここで

$$d_k^0 = f_k(\bar{x}_k^0) - f'_k(\bar{x}_k^0) \bar{x}_k^0 \quad (60)$$

である。

(c) (59) 式と (44) 式の評価の式に対して、線形系の DP 法を適用して得られた制御を

$$u_0^1, u_1^1, \dots, u_{N-1}^1 \quad (61)$$

とし、それに対応する状態値を

$$\bar{x}_1^1, \bar{x}_2^1, \dots, \bar{x}_N^1 \quad (62)$$

とする。

(d) (62) の状態値のまわりで、(54) 式をテーラー展開をして、

(b) - (c) と同様の手順を何度も繰り返す、そのときの

制御と状態値を

$$u_0^j, u_1^j, \dots, u_{N-1}^j, \quad (63)$$

$$\bar{x}_1^j, \bar{x}_2^j, \dots, \bar{x}_N^j \quad (64)$$

とする。

(e) 手順 (d) の繰り返しの停止は

$$\sum_{k=0}^{N-1} p(u_k^{j+1} - u_k^j) < \varepsilon \quad (65)$$

を満足したときに行なう。こ

こで、 $p(\cdot)$ はノルムとする。

(f) 実際にプラントを動かす制御

としては

$$u_k^* = u_k^{j+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (66)$$

を採用する。

以上の手順は fig. 7 に示す。

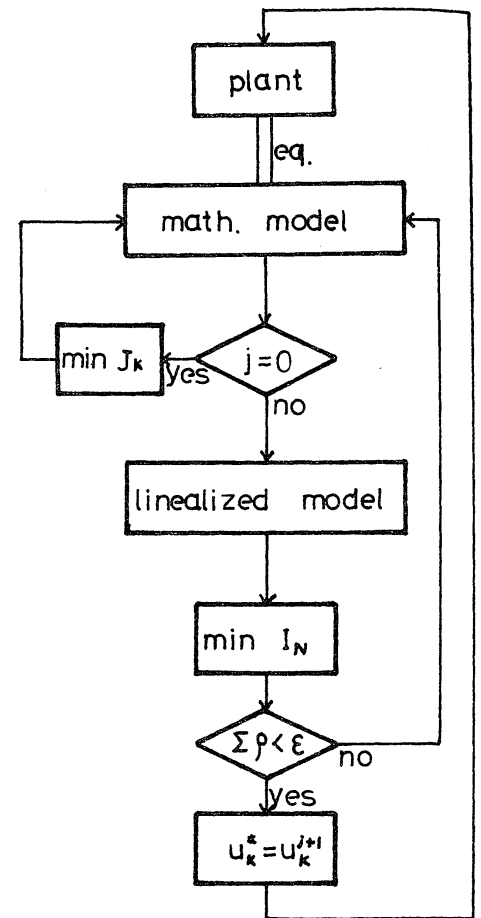


Fig. 7 Flow chart.

3.2.2 不完全観測の場合

不完全観測の場合は、統計処理の手法を伴うフィルタによって状態推定を行なって、制御の決定法は 3.2.1 節とほぼ同様の手順で行なう。ただ異なる点は、完全観測の場合は (a) - (f) の手順で一度に $u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*$ が定まったが、今の場合は、実際のプラントが 1 段進むごとに、(a) - (f) の手

順を繰り返す必要がある。

つまり、いま k 段で、 $\hat{x}_{k/k}$ が求められているときは、プラントの数式モデルとしては、(54) 式に対応して

$$\hat{x}_{j+1/k} = f_j(\hat{x}_{j/k}) + G_j u_j, \quad j = k, k+1, \dots, N-1 \quad (67)$$

を採用して、 $\hat{x}_{k/k}$ を初期値として、(a) - (f) の手順で u_k^* , u_{k+1}^* , $\dots$, u_{N-1}^* を求め、 u_k^* によって、実際のプラントを動かす。つぎに、 $k+1$ 段では新たに状態推定を行ない $\hat{x}_{k+1/k+1}$ を求め、この段の数式モデルとしては

$$\hat{x}_{j+1/k+1} = f_j(\hat{x}_{j/k+1}) + G_j u_j, \quad j = k+1, k+2, \dots, N-1 \quad (68)$$

を採用して、 $\hat{x}_{k+1/k+1}$ を初期値として、 k 段と同様の手順で制御を求める必要がある。

§4. 結 言

本稿では、乱数を用いた統計処理による非線形フィルタの構成とその特性について述べ、このフィルタは良好な収束性を持つことを示した。そこで、このフィルタによって状態推定を行ない、それを使って、非線形の最適制御構成の試みを行なった。しかし、非線形最適制御の問題は、いまの段階では、一つの考え方を提起した程度に留まり、多くの問題を残しているように思われる。その問題点を幾つか以下に示す。

- (a) 線形化反復計算による逐次制御合成のアルゴリズムの収束が，どの程度の問題に対して迄言えるか。
- (b) また，このアルゴリズムが，オーソドックスな高次元の変分問題として解く手法よりも，どの程度優れているか。
- (c) 非線形の最適制御の規範に，非線形状態推定問題を如何にとり入れて，制御合成の能率化をはかるか。

今後の課題としては，以上のような問題点の検討，また統計処理の手法を伴うフィルタの電力負荷予測問題，電力潮流予測問題のような現実モデルへの適用などがあるように思われる。

参 考 文 献

- (1) 辻，中村：九大工学集報，43，6，PP 783-787，(1970)
- (2) 中村：九大工学集報，44，1，PP 40-46，(1971)
- (3) 辻，中村：第10回制御理論部会資料，PP 29-32，(1971)
- (4) J. T. Tou : Optimal Design of Digital Control Systems, Academic Press, (1963)