

2 変数 KZ 方程式の接続問題と多重対数関数の調和積

早稲田大学大学院理工学研究科 大井 周 (Shu Oi)¹
Graduate School of Science and Engineering,
Waseda University

早稲田大学理工学術院 上野 喜三雄 (Kimio Ueno)
Faculty of Science and Engineering,
Waseda University

1 イントロダクション

形式的 KZ 方程式は $\mathbf{P}^1$ の点の配置のモジュライ空間上の形式的な微分方程式であり、数論幾何、結び目理論、数理解析等数学の様々な分野で重要な役割を果たす。特に数論幾何の分野では多重ゼータ値の研究において 1 変数ならびに 2 変数の形式的 KZ 方程式とその接続問題を考えることが重要である。

この方向の研究については Deligne-寺杉 [DT], Besser-古庄 [BF], 古庄 [F] らにより、多重ゼータ値の複シャッフル関係式が associator の 5 項関係式より導けるという結果が知られており、多重ゼータ値の調和積が形式的 KZ 方程式の接続問題として解釈できることを示唆しているが、我々はより直接的に調和積を 2 変数形式的 KZ 方程式の解の接続問題として解釈する枠組を構成した。その際に本質的になっているのは 2 変数形式的 KZ 方程式の解の分解という手法 (命題 9) であり、この分解の帰結として 2 変数形式的 KZ 方程式の解の接続問題が 1 変数に帰着できることが示され (命題 11), また係数の比較が多重ゼータ値の調和積を与える (定理 14)。

しかし、調和積は解の分解が与える情報のほんの一部でしかない。分解による係数の比較により、一般の超対数関数 (hyperlogarithm) についての関係式が得られる。我々はこれを”一般化された調和積” (定理 12) と呼ぶことにする。これについてより深い理解を得ることは今後の重要な課題であろう。

2 変数形式的 KZ 方程式を論じるに当たっては、1 変数の場合の理論が前提となる。1 変数の一般論に関しては大井 [O] ”形式的 KZ 方程式の表現と多重ゼータ値の関係式”において詳しく解説しているので、適宜そちらを参照していただきたい。

¹2009 年 4 月より早稲田大学理工学術院 (Faculty of Science and Engineering, Waseda University) 所属

2 2変数形式的KZ方程式

$\mathbf{P}^1$ の n 点の配置空間

$$(\mathbf{P}^1)_*^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \underbrace{\mathbf{P}^1 \times \dots \times \mathbf{P}^1}_{n \text{ 個}} \mid z_i \neq z_j \ (i \neq j)\} \quad (1)$$

上の全微分方程式

$$dW = \left(\sum_{i < j} X_{ij} d \log(z_i - z_j) \right) W \quad (2)$$

を考える. X_{ij} 達は無限小純組み紐関係式 $X_{ij} = X_{ji}$, $[X_{ij}, X_{kl}] = 0$ ($\#\{i, j, k, l\} = 4$), $[X_{ij} + X_{jk}, X_{ik}] = 0$ ($\#\{i, j, k\} = 3$), ならびに $\forall i$ に対して, $\sum_j X_{ij} = 0$ を満たす形式元である. この方程式は可積分で $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ 不変性を持ち, モジュライ空間 $\mathcal{M}_{0,n} = \mathrm{PGL}(2, \mathbf{C}) \backslash (\mathbf{P}^1)_*^n$ 上の方程式と考えることが出来る.

以下 $n = 5$ とする. 3点 $z_1 = 0, z_3 = 1, z_5 = \infty$ を固定, $z_2 = z, z_4 = \frac{1}{w}$ とし, $X_{12} = X_0, X_{23} = X_1, X_{45} = Y_0, X_{34} = Y_1, X_{24} = Z$ とおくと, 方程式は X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z を非可換な変数とする z, w に関する2変数複素全微分方程式

$$dG = \Omega G, \quad (3)$$

$$\Omega = \frac{dz}{z} X_0 + \frac{dz}{1-z} X_1 + \frac{dw}{w} Y_0 + \frac{dw}{1-w} Y_1 + \frac{d(zw)}{1-zw} Z \quad (4)$$

となる. この方程式は $\mathbf{X} = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ 上 $D = \{z = 0, 1, \infty\} \cup \{w = 0, 1, \infty\} \cup \{zw = 1\}$ に特異因子を持ち, この因子は $(z, w) = (0, 0), (1, 0), (0, 1)$ において正規交叉となっている. この方程式の可積分条件は以下で与えられる (これは無限小純組み紐関係式と同値である).

補題 1. 方程式 (3) の可積分条件 $\Omega \wedge \Omega = 0$ は次で与えられる.

$$\begin{cases} [X_0, Y_0] = [X_1, Y_0] = [X_0, Y_1] = 0 \\ [X_1, Y_1] = [-X_1, Z] = [Y_1, Z] = [-X_0 + Y_0, Z] \end{cases} \quad (5)$$

3 Lie環 $\mathfrak{X}$ とその普遍展開環, テンソル積分解

そこで, 改めて Lie 環 $\mathfrak{X}$ を形式元 X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z で生成される $\mathbf{C}$ 上の自由 Lie 環 $\mathbf{C}\{X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z\}$ を関係式 (5) で割った Lie 環とし, その普遍展開環を $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ で表す. $\mathfrak{X}$ は次数付き Lie 環であり, $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ もその次数を引き継いで次数付き代数となる ($\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ の次数は通常の話の長さに関するものである).

$\mathfrak{X}$ の部分 Lie 環 $\mathfrak{X}_{zw}$ (resp. $\mathfrak{X}_z$) を X_0, X_1, Z (resp. X_0, X_1) で生成されるものとする. $\{X_0, X_1, Z\}$ の間に関係式が存在しないことから, これらは自由 Lie 環である. 同様に,

$\mathfrak{X}_{wz}$ (resp. $\mathfrak{X}_w$) を Y_0, Y_1, Z (resp. Y_0, Y_1) で生成されるものとする. これらも自由 Lie 環である. つまり,

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_{zw} &= \mathbf{C}\{X_0, X_1, Z\}, & \mathfrak{X}_z &= \mathbf{C}\{X_0, X_1\}, \\ \mathfrak{X}_{wz} &= \mathbf{C}\{Y_0, Y_1, Z\}, & \mathfrak{X}_w &= \mathbf{C}\{Y_0, Y_1\}.\end{aligned}\quad (6)$$

$\mathfrak{A} = \mathfrak{X}, \mathfrak{X}_{zw}, \mathfrak{X}_z, \mathfrak{X}_{wz}, \mathfrak{X}_w$ それぞれに対し, $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ を $\mathfrak{A}$ の普遍展開環, $\mathcal{U}_s(\mathfrak{A})$ をその次数 s パートとする. また, $\mathcal{W}(\mathfrak{A})$ で $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ の語の全体, $\mathcal{W}^0(\mathfrak{A})$ で X_0, Y_0 で終わらない $\mathcal{U}(\mathfrak{A})$ の語の全体を表し, $\mathcal{W}_s(\mathfrak{A}) = \mathcal{W}(\mathfrak{A}) \cap \mathcal{U}_s(\mathfrak{A})$, $\mathcal{W}_s^0(\mathfrak{A}) = \mathcal{W}^0(\mathfrak{A}) \cap \mathcal{U}_s(\mathfrak{A})$ とする. このとき, 次の命題が成立する.

命題 2 ($\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ のテンソル積分解). (i) 上の部分 Lie 環の間に次の関係が成立つ.

$$[\mathfrak{X}_{wz}, \mathfrak{X}_z] \subset \mathfrak{X}_{wz}, \quad [\mathfrak{X}_{zw}, \mathfrak{X}_w] \subset \mathfrak{X}_{zw}. \quad (7)$$

(ii) ベクトル空間として次が成立つ.

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{wz} \oplus \mathfrak{X}_z = \mathfrak{X}_{zw} \oplus \mathfrak{X}_w, \quad (8)$$

$$\mathcal{U}(\mathfrak{X}) = \mathcal{U}(\mathfrak{X}_{wz}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{X}_z) = \mathcal{U}(\mathfrak{X}_{zw}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{X}_w), \quad (9)$$

特に, $\{W_1 W_2 \mid W_1 \in \mathcal{W}(\mathfrak{X}_{wz}), W_2 \in \mathcal{W}(\mathfrak{X}_z)\}$, $\{W_1 W_2 \mid W_1 \in \mathcal{W}(\mathfrak{X}_{zw}), W_2 \in \mathcal{W}(\mathfrak{X}_w)\}$ は $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ の基底である.

そこで, 改めて $\mathbf{X}$ 上 D に沿って極を持つ対数 1 次微分形式 Ω を

$$\Omega = \frac{dz}{z} X_0 + \frac{dz}{1-z} X_1 + \frac{dw}{w} Y_0 + \frac{dw}{1-w} Y_1 + \frac{d(zw)}{1-zw} Z \in \Omega_{\mathbf{X}}^1(\log D) \otimes \mathfrak{X} \quad (10)$$

と定め ($\Omega_{\mathbf{X}}^1(\log D)$ は $\mathbf{X}$ 上 D に沿って極を持つ対数 1 次微分形式の全体を表す), 接続の形で書かれた方程式

$$dG = \Omega G \quad (11)$$

を 2 変数形式的 KZ 方程式と定義する. 2 変数形式的 KZ 方程式は補題 1 より明らかに可積分であり, その解は $\tilde{\mathcal{U}}(\mathfrak{X}) (= \mathcal{U}(\mathfrak{X})$ の通常の次数に関する完備化) に値を持つ $\mathbf{X} - D$ 上の多価解析関数である.

4 微分形式のなす代数: reduced bar 構成 とその分解

2 変数形式的 KZ 方程式 (11) の解を反復積分を用いて構成したい. そのためには 2 変数の反復積分を定義しなければならない. 1 変数の場合と異なり, 今回は値を持つ Lie 環が自由 Lie 環の商 Lie 環となっていて, 対応する微分形式のなす代数も自由シャッフ

ル代数の部分代数を考えなければならない. 実際, dz, dw の反復積分は一般には積分路に応じて値が変わるため, そのようなことが起こらない部分を取り出す必要がある. それを代数的に定式化するのが Chen の reduced bar 構成 ([C1], [H], [B]) である.

集合 $A = \{\xi_0, \xi_1, \eta_0, \eta_1, \zeta\}$ を文字とする自由シャッフル代数 $S(A) = \mathbf{C}\langle A \rangle_{\omega}$ を考える. $S(A)$ における通常の積 (連結による積) を $\circ$, シャッフル積を $\sqcup$ で表す. また, $S(A)$ の重みによる次数付けを $S(A) = \bigoplus_{s=0}^{\infty} S_s(A)$ とする. $S_1(A)$ の元を

$$\xi_0 = \frac{dz}{z}, \quad \xi_1 = \frac{dz}{1-z}, \quad \eta_0 = \frac{dw}{w}, \quad \eta_1 = \frac{dw}{1-w}, \quad \zeta = \frac{d(zw)}{1-zw} \quad (12)$$

と同一視して $\Omega_{\mathbf{X}}^1(\log D)$ の元とみなし, 一般の $S(A)$ の元を反復形式と呼ぶことにする.
反復形式

$$\varphi = \sum_{I=\{i_1, \dots, i_s\}} c_I \omega_{i_1} \circ \dots \circ \omega_{i_s} \in S_s(A)$$

(各 $\omega_{i_\alpha} \in A$, $C_I \in \mathbf{C}$) が Chen の可積分条件を満たすとは任意の $1 \leq \forall l < s$ に対し, 多重微分形式として

$$\sum_I c_I \omega_{i_1} \otimes \dots \otimes \omega_{i_l} \wedge \omega_{i_{l+1}} \otimes \dots \otimes \omega_{i_s} = 0 \quad (13)$$

が成立つことであると定義する.

$\mathcal{B}$ を Chen の可積分条件 (13) を満たす反復形式から成る $S(A)$ の部分空間とする. $\mathcal{B}$ には $S(A)$ の次数に応じた次数付け $\mathcal{B} = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \mathcal{B}_s$, $\mathcal{B}_0 = \mathbf{C}1$ が入る. 明らかに $\mathcal{B}_1 = \mathbf{C}\xi_0 \oplus \mathbf{C}\xi_1 \oplus \mathbf{C}\eta_0 \oplus \mathbf{C}\eta_1 \oplus \mathbf{C}\zeta$ であり, さらに次の命題が成立して一般の $\mathcal{B}_s$ を特徴付けることが出来る.

命題 3. (i) $\mathcal{B}_2$ は以下の 19 次元ベクトル空間である.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 = & \bigoplus_{i,j=0,1} \mathbf{C}\xi_i \circ \xi_j \oplus \bigoplus_{i,j=0,1} \mathbf{C}\eta_i \circ \eta_j \oplus \bigoplus_{i,j=0,1} \mathbf{C}(\xi_i \circ \eta_j + \eta_j \circ \xi_i) \\ & \oplus \bigoplus_{i=0,1} \mathbf{C}(\xi_i \circ \zeta + \zeta \circ \xi_i) \oplus \bigoplus_{i=0,1} \mathbf{C}(\eta_i \circ \zeta + \zeta \circ \eta_i) \oplus \mathbf{C}\zeta \circ \zeta \\ & \oplus \mathbf{C}(\xi_0 \circ \zeta + \eta_0 \circ \zeta) \oplus \mathbf{C}(\xi_1 \circ \zeta + \eta_1 \circ \xi_1 - \eta_1 \circ \zeta - \eta_0 \circ \zeta). \end{aligned} \quad (14)$$

(ii) $s > 2$ に対し,

$$\mathcal{B}_s = \bigcap_{j=1}^{s-1} \mathcal{B}_j \circ \mathcal{B}_{s-j} = \bigcap_{j=0}^{s-2} \underbrace{\mathcal{B}_1 \circ \dots \circ \mathcal{B}_1}_{j \text{ 個}} \circ \mathcal{B}_2 \circ \underbrace{\mathcal{B}_1 \circ \dots \circ \mathcal{B}_1}_{s-j-2 \text{ 個}}. \quad (15)$$

(iii) $\mathcal{B}$ は $S(A)$ の部分次数付き Hopf 代数. さらに, $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ の次数付き双対 Hopf 代数となる.

この次数付き Hopf 代数 $\mathcal{B}$ を文字 A で生成される reduced bar 構成と呼ぶ. この記号のもと,

$$\Omega = \xi_0 X_0 + \xi_1 X_1 + \eta_0 Y_0 + \eta_1 Y_1 + \zeta Z \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{U}_1(\mathfrak{X})$$

と書くことが出来る.

次に, 2 変数の反復積分を定義する. $\mathcal{B}$ の s 次の元

$$\varphi = \sum_{I=\{i_1, \dots, i_s\}} c_I \omega_{i_1} \circ \dots \circ \omega_{i_s} \in \mathcal{B}_s$$

を考える. 先頭の ω_{i_1} でまとめて

$$\varphi = \sum_{i_1} \omega_{i_1} \circ \left(\sum_{I'=\{i_2, \dots, i_s\}} c_{i_1, I'} \omega_{i_2} \circ \dots \circ \omega_{i_s} \right)$$

と記述すると, 命題 3(ii) より, 各 i_1 に対して $\sum_{I'} c_{i_1, I'} \omega_{i_2} \circ \dots \circ \omega_{i_s} \in \mathcal{B}_{s-1}$ である. これに対して反復積分 $\int \varphi$ を

$$\begin{cases} \int_{(z_0, w_0)}^{(z_1, w_1)} \mathbf{1} = 1 \text{ (定数関数)}, \\ \int_{(z_0, w_0)}^{(z_1, w_1)} \varphi = \int_{(z_0, w_0)}^{(z_1, w_1)} \sum_{i_1} \omega_{i_1}(z', w') \int_{(z_0, w_0)}^{(z', w')} \sum_{I'=\{i_2, \dots, i_s\}} c_{i_1, I'} \omega_{i_2} \circ \dots \circ \omega_{i_s} \end{cases} \quad (16)$$

で定める ($\omega_{i_1}(z', w')$ は ω_{i_1} の z, w を z', w' に置き換えた微分形式). このとき, 次のよく知られた補題により積分の結果は $\mathbf{X} - D$ 上の多価解析関数として一意的に定まる.

補題 4 (Chen の補題). 反復形式 $\varphi \in \mathcal{B}$ に対して, 反復積分 $\int \varphi$ の値は積分路のホモトピー類にのみ依存する.

また, この 2 変数の反復積分も 1 変数と同様 $\sqcup$ 準同型である. すなわち $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{B}$ に対して

$$\int \varphi_1 \sqcup \varphi_2 = \left(\int \varphi_1 \right) \left(\int \varphi_2 \right)$$

が成立する.

$S(A_{zw})$ (resp. $S(A_z)$) を文字 $A_{zw} = \{\xi_0, \xi_1, \zeta\}$ (resp. $A_z = \{\xi_0, \xi_1\}$) で生成される $S(A)$ の自由部分シャッフル代数とする. 同様に, 自由部分シャッフル代数 $S(A_{wz}), S(A_w)(A_{wz} = \{\eta_0, \eta_1, \zeta\}, A_w = \{\eta_0, \eta_1\})$ が導入される.

$\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ と $\mathcal{B}$ は双対 Hopf 代数であり, ベクトル空間として $\mathcal{U}(\mathfrak{X}) = \mathcal{U}(\mathfrak{X}_{wz}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{X}_z)$ である. 一方, $\mathcal{U}(\mathfrak{X}_{wz}), \mathcal{U}(\mathfrak{X}_z)$ はそれぞれ自由 Lie 環の普遍展開環であるので, その双対 Hopf 代数は自由シャッフル代数 $S(A_{wz}), S(A_z)$ である. 各々の双対写像と Lie 環の同型は次数を保つので, これより次の補題を得る.

命題 7. $\varphi \in \mathcal{B}$ に対し,

$$\int \varphi = \int_{C_J} \varphi = \int_{C_J} \iota_J(\varphi) \quad (19)$$

特に $\iota_J(\varphi) = \sum_i c_i \iota_{J,wz}^{(i)}(\varphi) \otimes \iota_{J,z}^{(i)}(\varphi) \in S(A_{wz}) \otimes S(A_z)$ と書けているとすると,

$$\int \varphi = \int_{C_J} \iota_J(\varphi) = \sum_i c_i \int_{C_{wz}} \iota_{J,wz}^{(i)}(\varphi) \int_{C_z} \iota_{J,z}^{(i)}(\varphi)$$

となる. ι_r に関しても同様.

5 2変数形式的KZ方程式の基本解の構成と分解定理

以上の準備のもと, 2変数形式的KZ方程式の正規化された基本解を反復積分で構成する. 微分形式 $\Omega_0, \Omega', \Omega_z, \Omega_{zw}, \Omega_w, \Omega_{wz}$ を

$$\Omega_0 = \xi_0 X_0 + \eta_0 Y_0, \quad \Omega' = \Omega - \Omega_0 = \xi_1 X_1 + \eta_1 Y_1 + \zeta Z, \quad (20)$$

$$\Omega_{zw} = \xi_0 X_0 + \xi_1 X_1 + \zeta_z Z, \quad \Omega_z = \Omega_{zw} \Big|_{w=0} = \xi_0 X_0 + \xi_1 X_1, \quad (21)$$

$$\Omega_{wz} = \eta_0 Y_0 + \eta_1 Y_1 + \zeta_w Z, \quad \Omega_w = \Omega_{wz} \Big|_{z=0} = \eta_0 Y_0 + \eta_1 Y_1 \quad (22)$$

と定める. ただし,

$$\zeta_z = \frac{wdz}{1-zw}, \quad \zeta_w = \frac{zdw}{1-zw} \quad (23)$$

とする. $\zeta = \zeta_z + \zeta_w$ が成立していることに注意する.

2変数形式的KZ方程式(11)が原点で正規化された解 $\mathcal{L}(z, w)$, すなわち

$$\mathcal{L}(z, w) = \hat{\mathcal{L}}(z, w) z^{X_0} w^{Y_0} \quad \hat{\mathcal{L}}(z, w) \text{ は } (z, w) = (0, 0) \text{ で正則, } \hat{\mathcal{L}}(0, 0) = \mathbf{I}, \quad (24)$$

$$\hat{\mathcal{L}}(z, w) = \sum_{s=0}^{\infty} \hat{\mathcal{L}}_s(z, w) \quad \hat{\mathcal{L}}_s(z, w) : D \text{ に特異点を持つ } \mathcal{U}_s \text{ 値多価解析関数}$$

$$\hat{\mathcal{L}}_0(z, w) = 1, \quad \hat{\mathcal{L}}_s(0, 0) = 0 \quad (s > 0) \quad (25)$$

となる解を持つとする. このとき $[X_0, Y_0] = [X_0, Y_1] = [X_1, Y_0] = 0$ であることに注意すると, $\hat{\mathcal{L}}(z, w)$ は次の方程式を満たすことが分かる.

$$d\hat{\mathcal{L}}(z, w) = \Omega \hat{\mathcal{L}}(z, w) - \hat{\mathcal{L}}(z, w) \Omega_0 \quad (= [\Omega_0, \hat{\mathcal{L}}(z, w)] + \Omega' \hat{\mathcal{L}}(z, w)). \quad (26)$$

これは s 次部分に関する逐次微分漸化式

$$\forall s \quad d\hat{\mathcal{L}}_{s+1}(z, w) = [\Omega_0, \hat{\mathcal{L}}_s(z, w)] + \Omega' \hat{\mathcal{L}}_s(z, w) \quad (27)$$

の成立と同値である. この $\hat{\mathcal{L}}$ に関する方程式 (26) は可積分であり, 解を反復積分を用いて直接構成出来る. すなわち $\hat{\mathcal{L}}_0(z, w) = \mathbf{I}$ から (27) によって $\hat{\mathcal{L}}_s(z, w)$ を求めるとき, 各 s に対して $\hat{\mathcal{L}}_s(z, w)$ は $(z, w) = (0, 0)$ で特異性を生じないことを示すことができ, 結果は次の命題で示される.

命題 8 (2 変数形式的 KZ 方程式の原点で正規化された基本解). (i) 2 変数形式的 KZ 方程式 (11) の原点で正規化された解 $\mathcal{L}(z, w) = \hat{\mathcal{L}}(z, w)z^{X_0}w^{Y_0}$ が一意的に存在し,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}(z, w) &= \sum_{s=0}^{\infty} \hat{\mathcal{L}}_s(z, w), \\ \hat{\mathcal{L}}_s(z, w) &= \int_{(0,0)}^{(z,w)} (\text{ad}(\Omega_0) + \mu(\Omega'))^s (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I})\end{aligned}\quad (28)$$

と記述される. ここで, $\varphi \otimes F \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{X})$, $\omega \otimes X \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathfrak{X}$ に対して $\text{ad}(\omega \otimes X)(\varphi \otimes F) = (\omega \circ \varphi) \otimes [X, F]$, $\mu(\omega \otimes X)(\varphi \otimes F) = (\omega \circ \varphi) \otimes XF$ と定める.

(ii) さらに, 各 s に対し, $(\text{ad}(\Omega_0) + \mu(\Omega'))^s (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}) \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{X})$, すなわち各 $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ を任意の基底で展開した時, それぞれの係数にあたる反復形式は Chen の可積分条件 (13) を満たす.

この原点で正規化された基本解は 2 通りの方法で 1 変数形式的 KZ 方程式の正規化された基本解の積に分解できる. 以下の 4 つの 1 変数形式的 KZ 方程式を考える.

(i) z に関する 1 変数形式的 KZ 方程式

$$d_z G(z) = \Omega_z G(z). \quad (29)$$

ここで, d_z は z 変数に関する外微分を表す. 原点で正規化された基本解を $\mathcal{L}_z(z) = \hat{\mathcal{L}}_z(z)z^{X_0}$, $\hat{\mathcal{L}}_z(0) = \mathbf{I}$ とする.

(ii) z に関する $0, 1, \frac{1}{w}, \infty$ に特異点を持つ拡張 1 変数形式的 KZ 方程式

$$d_z G(z) = \Omega_{zw} G(z). \quad (30)$$

原点で正規化された基本解を $\mathcal{L}_{zw}(z, w) = \hat{\mathcal{L}}_{zw}(z, w)z^{X_0}$, $\hat{\mathcal{L}}_{zw}(0, w) = \mathbf{I}$ とする.

(iii) w に関する 1 変数形式的 KZ 方程式

$$d_w G(w) = \Omega_w G(w). \quad (31)$$

原点で正規化された基本解を $\mathcal{L}_w(w) = \hat{\mathcal{L}}_w(w)w^{Y_0}$, $\hat{\mathcal{L}}_w(0) = \mathbf{I}$ とする.

(iv) w に関する $0, 1, \frac{1}{z}, \infty$ に特異点を持つ拡張 1 変数形式的 KZ 方程式

$$d_w G(w) = \Omega_{wz} G(w). \quad (32)$$

原点で正規化された基本解を $\mathcal{L}_{wz}(z, w) = \hat{\mathcal{L}}_{wz}(z, w)w^{Y_0}$, $\hat{\mathcal{L}}_{wz}(z, 0) = \mathbf{I}$ とする.

各基本解 $\mathcal{L}_*$ の右下の添字の最も左にある文字は主変数を表す. また, 各基本解の正則部分 $\hat{\mathcal{L}}_*$ は $\hat{\mathcal{L}}_* = \sum_{s=0}^{\infty} \hat{\mathcal{L}}_{*,s}$, $\hat{\mathcal{L}}_{*,0} = \mathbf{I}$ と次数に関して分解され, $\hat{\mathcal{L}}_{z,s}(0) = \hat{\mathcal{L}}_{w,s}(0) = 0$, $\hat{\mathcal{L}}_{zw,s}(0, w) = \hat{\mathcal{L}}_{wz,s}(z, 0) = 0$ ($s > 0$) を満たす.

命題 9 (分解定理). 以上の記号のもと, 2 変数形式的 KZ 方程式 (3) の原点で正規化された基本解 $\mathcal{L}(z, w)$ は

$$\mathcal{L}(z, w) = \hat{\mathcal{L}}(z, w)z^{X_0}w^{Y_0} = \hat{\mathcal{L}}_{wz}(z, w)\hat{\mathcal{L}}_z(z)z^{X_0}w^{Y_0} = \mathcal{L}_{wz}(z, w)\mathcal{L}_z(z) \quad (33)$$

$$= \hat{\mathcal{L}}_{zw}(z, w)\hat{\mathcal{L}}_w(w)z^{X_0}w^{Y_0} = \mathcal{L}_{zw}(z, w)\mathcal{L}_w(w) \quad (34)$$

と 1 変数 (拡張) 形式的 KZ 方程式の解の積に分解される.

この分解定理の 2 通りの分解による表示は, 実は積分路 C_L, C_r に関して実際に反復積分 (28):

$$\hat{\mathcal{L}}_s(z, w) = \int (\text{ad}(\Omega_0) + \mu(\Omega'))^s (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I})$$

を計算した結果に等しい. 実際に計算することにより次の表示を得る.

命題 10. 積分路 $C_L(C_r)$ を固定すると, $\hat{\mathcal{L}}_s(z, w)$ は

$$\hat{\mathcal{L}}_s(z, w) = \sum_{s'+s''=s} \sum_{W' \in \mathcal{W}_{s'}^0(\mathfrak{x}_{wz})} \sum_{W'' \in \mathcal{W}_{s''}^0(\mathfrak{x}_z)} \int_{C_{wz}} \theta(W') \int_{C_z} \theta(W'') \alpha(W') \alpha(W'') (\mathbf{I}) \quad (35)$$

$$= \sum_{s'+s''=s} \sum_{W' \in \mathcal{W}_{s'}^0(\mathfrak{x}_{zw})} \sum_{W'' \in \mathcal{W}_{s''}^0(\mathfrak{x}_w)} \int_{C_{zw}} \theta(W') \int_{C_w} \theta(W'') \alpha(W') \alpha(W'') (\mathbf{I}) \quad (36)$$

と計算される. ここで $\alpha: \mathcal{U}(\mathfrak{x}) \rightarrow \text{End}(\mathcal{U}(\mathfrak{x}))$ は

$$\alpha: (X_0, X_1, Y_0, Y_1, Z) \mapsto (\text{ad}(X_0), \mu(X_1), \text{ad}(Y_0), \mu(Y_1), \mu(Z))$$

で定まる代数準同型, $\theta(W)$ は以下の文字の置き換えで定義される反復積分を意味する.

$$\theta(X_0) = \xi_0, \theta(X_1) = \xi_1, \theta(Y_0) = \eta_0, \theta(Y_1) = \eta_1, \theta(Z) = \zeta.$$

また, この命題の $\mathcal{U}(\mathfrak{x})$ 部分について, $\{\alpha(W'W'')(\mathbf{I}) \mid W' \in \mathcal{W}^0(\mathfrak{x}_{wz}), W'' \in \mathcal{W}^0(\mathfrak{x}_z)\}$, $\{\alpha(W'W'')(\mathbf{I}) \mid W' \in \mathcal{W}^0(\mathfrak{x}_{zw}), W'' \in \mathcal{W}^0(\mathfrak{x}_w)\}$ はそれぞれ $\mathcal{U}(\mathfrak{x})$ の一次独立系であることが分かる. 従って, この命題は $W' \in \mathcal{W}^0(\mathfrak{x}_{wz}), W'' \in \mathcal{W}^0(\mathfrak{x}_z)$ に対し, 命題 8 に

よる $\hat{\mathcal{L}}(z, w)$ の反復積分表示の $\alpha(W')\alpha(W'')(\mathbf{I})$ の係数はある $\varphi_{W', W''} \in \mathcal{B}$ が存在して $\int \varphi_{W', W''}$ と書けていて, この $\varphi_{W', W''}$ に関して

$$\iota_z(\varphi_{W', W''}) = \theta(W') \otimes \theta(W'')$$

であることを主張している. 同様に $W' \in \mathcal{W}^0(\mathfrak{X}_{zw})$, $W'' \in \mathcal{W}^0(\mathfrak{X}_w)$ に対して

$$\iota_w(\varphi_{W', W''}) = \theta(W') \otimes \theta(W'')$$

である (積分路を C_w 上, C_z 上に固定すると ζ_w , ζ_z になることに注意). なお, $\varphi_{W', W''}$ を直接求めるのは, $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ 部分を関係式 (5) を用いて並べ替えてまとめ上げなければならず大変難しい.

分解定理の反復積分が定める関数について $W = X_0^{k_1-1} X_1 \cdots X_0^{k_r-1} X_1 \in \mathcal{W}_s^0(\mathfrak{X}_z)$ に対しては

$$\int_{C_z} \theta(W) = \int_0^z \xi_0^{k_1-1} \circ \xi_1 \circ \cdots \circ \xi_0^{k_r-1} \circ \xi_1 = \text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(z) \quad (1 \text{ 変数多重対数関数}) \quad (37)$$

である. また, $W = Y_0^{k_1-1} \Xi_1 \cdots Y_0^{k_r-1} \Xi_r \in \mathcal{W}_s^0(\mathfrak{X}_{wz})$ $\Xi_i = Y_1 \text{ or } Z$ に対して

$$\begin{aligned} \int_0^w \theta(W) &= \int_0^w \eta_0^{k_1-1} \circ \omega_1 \circ \cdots \circ \eta_0^{k_r-1} \circ \omega_r = L^{(k_1 \alpha_1 \cdots k_r \alpha_r; w)} \quad (\text{超対数関数}) \\ &= \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_r > 0} \frac{\alpha_{i_1}^{n_1-n_2} \alpha_{i_2}^{n_2-n_3} \cdots \alpha_{i_r}^{n_r}}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} w^{n_1}, \end{aligned}$$

ただし $\Xi_i = Y_1 \text{ or } Z$ に応じて $\alpha_i = 1 \text{ or } z$, $\omega_i = \eta_1 \text{ or } \zeta_w$ とする ($\omega_i = \frac{\alpha_i dw}{1-\alpha_i w}$). 特に $\alpha_1, \dots, \alpha_i = 1$, $\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_r = z$ のとき, w を主変数とする 2 変数多重対数関数

$$\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(i, r-i; w, z) := L^{(k_1 1 \cdots k_i 1^{k_{i+1}} z \cdots k_r z; w)}. \quad (38)$$

と定める. $\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(r, 0; w, z) = \text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(w)$, $\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(0, r; w, z) = \text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(zw)$ である.

超対数関数 $L^{(k_1 \alpha_{i_1} \cdots k_r \alpha_{i_r}; z)}$ は (z, w) の 2 変数関数と見た場合, $\{(z, w) \in \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \mid |z| < 1, |w| < 1\}$, および $(z, w) = (0, 1)$ の近傍で一価正則である. よって, $\hat{\mathcal{L}}_z(z, w)$ は主変数 z が十分小さいところではパラメータ w に関して $w = 0$ から $w = 1$ まで一価正則に延ばす事が出来る.

2 変数多重対数関数は主変数 z , パラメータ w のいずれで微分しても再び 2 変数多重対数関数で書ける. 実際,

$$\frac{\partial}{\partial z} \text{Li}_{k_1, \dots, k_{i+j}}(i, j; z, w) = \begin{cases} \frac{w}{1-zw} \text{Li}_{k_2, \dots, k_j}(0, j-1; z, w) & (i=0, k_1=1), \\ \frac{1}{1-z} \text{Li}_{k_2, \dots, k_{i+j}}(i-1, j; z, w) & (i>0, k_1=1), \\ \frac{1}{z} \text{Li}_{k_1-1, k_2, \dots, k_{i+j}}(i, j; z, w) & (k_1>1). \end{cases} \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial w} \text{Li}_{k_1, \dots, k_{i+j}}(i, j; z, w) = \begin{cases} \frac{z}{1-zw} \text{Li}_{k_2, \dots, k_j}(0, j-1; z, w) & (i=0, k_1=1), \\ \frac{1}{1-w} \text{Li}_{k_1, \dots, k_i, k_{i+2}, \dots, k_{i+j}}(i, j-1; z, w) \\ \quad - \frac{1}{1-w} \text{Li}_{k_1, \dots, k_i, k_{i+2}, \dots, k_{i+j}}(i-1, j; z, w) \\ \quad - \frac{1}{w} \text{Li}_{k_1, \dots, k_i, k_{i+2}, \dots, k_{i+j}}(i-1, j; z, w) & (i>0, k_{i+1}=1), \\ \frac{1}{w} \text{Li}_{k_1, \dots, k_i, k_{i+1}-1, k_{i+2}, \dots, k_{i+j}}(i, j; z, w) & (k_{i+1}>1). \end{cases} \quad (40)$$

である. 一般の超対数関数に関しては, 主変数での微分が再び超対数関数となるのは定義より明らかであるが, パラメータでの微分はそうにはなっていない.

具体的な例 $\hat{\mathcal{L}}_2(z, w)$ に関して 積分路 C_- において計算すると

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_2(z, w) &= \int_0^w \frac{dw}{w} \circ \frac{dw}{1-w} \alpha(Y_0 Y_1)(\mathbf{I}) + \int_0^w \frac{dw}{w} \circ \frac{zdw}{1-zw} \alpha(Y_0 Z)(\mathbf{I}) \\ &\quad + \int_0^w \frac{dw}{1-w} \circ \frac{dw}{1-w} \alpha(Y_1 Y_1)(\mathbf{I}) + \int_0^w \frac{dw}{1-w} \circ \frac{zdw}{1-zw} \alpha(Y_1 Z)(\mathbf{I}) \\ &\quad + \int_0^w \frac{zdw}{1-zw} \circ \frac{dw}{1-w} \alpha(Z Y_1)(\mathbf{I}) + \int_0^w \frac{zdw}{1-zw} \circ \frac{zdw}{1-zw} \alpha(Z Z)(\mathbf{I}) \\ &\quad + \int_0^w \frac{dw}{1-w} \int_0^z \frac{dz}{1-z} \alpha(Y_1 X_1)(\mathbf{I}) + \int_0^w \frac{zdw}{1-zw} \int_0^z \frac{dz}{1-z} \alpha(Z X_1)(\mathbf{I}) \\ &\quad + \int_0^z \frac{dz}{z} \circ \frac{dz}{1-z} \alpha(X_0 X_1)(\mathbf{I}) + \int_0^z \frac{dz}{1-z} \circ \frac{dz}{1-z} \alpha(X_1 X_1)(\mathbf{I}) \\ &= \text{Li}_2(w)[Y_0, Y_1] + \text{Li}_2(zw)[Y_0, Z] + \text{Li}_{1,1}(w)Y_1^2 \\ &\quad + \text{Li}_{1,1}(1, 1; w, z)Y_1 Z + L(1^1 z^1 1; w)ZY_1 + \text{Li}_{1,1}(zw)Z^2 \\ &\quad + \text{Li}_1(w)\text{Li}_1(z)Y_1 X_1 + \text{Li}_1(zw)\text{Li}_1(z)ZX_1 + \text{Li}_2(z)[X_0, X_1] + \text{Li}_{1,1}(z)X_1^2. \end{aligned}$$

である. 一方, 積分路 C_+ に沿った結果は上式において z と w , (X_0, X_1) と (Y_0, Y_1) を入れ替えたものに等しいが, さらに関係式 (5) を用いて Y_0, Y_1, Z が X_0, X_1 より左に来る

ように変換すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}_2(z, w) = & \text{Li}_2(w)[Y_0, Y_1] + \text{Li}_2(zw)[Y_0, Z] + \text{Li}_{1,1}(w)Y_1^2 \\ & + (-\text{Li}_2(zw) - \text{Li}_{1,1}(1, 1; z, w) + \text{Li}_1(z)\text{Li}_1(w))Y_1Z \\ & + (\text{Li}_2(zw) + \text{Li}_{1,1}(1, 1; z, w) - \text{Li}_1(z)\text{Li}_1(w) + \text{Li}_1(zw)\text{Li}_1(w))ZY_1 \\ & + \text{Li}_{1,1}(zw)Z^2 + \text{Li}_1(z)\text{Li}_1(w)Y_1X_1 + (\text{Li}_{1,1}(1, 1; z, w) + L({}^1w^11; z))ZX_1 \\ & + \text{Li}_2(z)[X_0, X_1] + \text{Li}_{1,1}(z)X_1^2.\end{aligned}$$

この両積分路での結果は等しいので、係数を比較すると以下の非自明な関数等式が得られる。

- Y_1Z の係数 : $\text{Li}_1(z)\text{Li}_1(w) = \text{Li}_{1,1}(1, 1; w, z) + \text{Li}_2(zw) + \text{Li}_{1,1}(1, 1; z, w)$.
(多重対数関数の調和積の一番簡単な場合)
- ZX_1 の係数 : $L({}^1w^11; z) = \text{Li}_1(zw)\text{Li}_1(z) - \text{Li}_{1,1}(1, 1; z, w)$.
(左辺の超対数関数を2変数多重対数関数で表示する式)

なお、 ZY_1 の係数も非自明だが、上記2式と z, w の入れ替えで求めることが出来る。

6 分解定理と2変数形式的KZ方程式の解の接続問題

分解定理の直接的な帰結として、2変数形式的KZ方程式の解の接続問題が1変数の場合に帰着されることが示される。2変数形式的KZ方程式の $(z, w) = (0, 0)$ で正規化された基本解を $\mathcal{L}^{(0,0)}(z, w) = \mathcal{L}(z, w)$, $(1, 0)$ で正規化された基本解を $\mathcal{L}^{(1,0)}(z, w) = \hat{\mathcal{L}}^{(1,0)}(z, w)(1-z)^{-X_1}w^{Y_0}$, $\hat{\mathcal{L}}^{(1,0)}(z, w)$ は $(1, 0)$ の近傍で正則、 $\hat{\mathcal{L}}^{(1,0)}(1, 0) = \mathbf{I}$ とする。分解定理より $\mathcal{L}^{(0,0)}(z, w), \mathcal{L}^{(1,0)}(z, w)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(0,0)}(z, w) &= \mathcal{L}_{wz}^{(0,0)}(z, w)\mathcal{L}_z^{(0,0)}(z), \\ \mathcal{L}^{(1,0)}(z, w) &= \mathcal{L}_{wz}^{(1,0)}(z, w)\mathcal{L}_z^{(1,0)}(z)\end{aligned}$$

と分解される。ここで $\mathcal{L}_z^{(1,0)}(z)$ は微分方程式 $d_z G = \Omega_z^{(0)} G$ の $(1, 0)$ で正規化された基本解、 $\mathcal{L}_{wz}^{(0,0)}(z, w)$ と $\mathcal{L}_{wz}^{(1,0)}(z, w)$ はともに微分方程式 $d_w G = \Omega_w G$ の $w = 0$ で正規化された基本解であり、先の注意によりこの方程式の基本解は $w = 0$ の近傍でパラメータ $z = 0$ から1まで一価正則に延びるため、

$$\mathcal{L}_w^{(0,0)}(z, w) = \mathcal{L}_w^{(1,0)}(z, w)$$

が成立する。一方1変数形式的KZ方程式 $d_z G = \Omega_z G$ の接続公式より

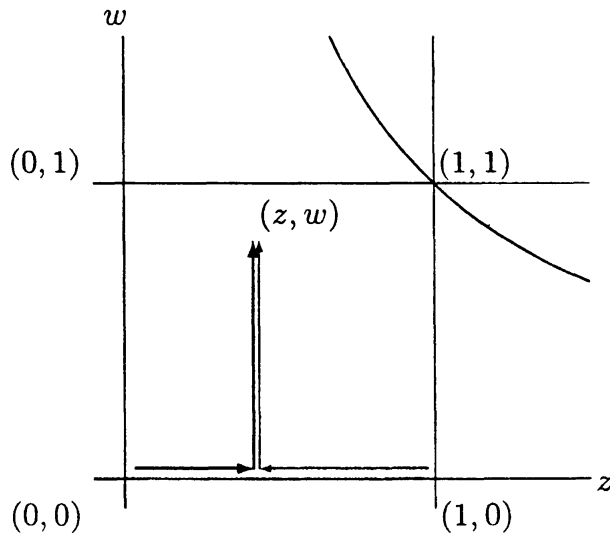
$$\mathcal{L}_z^{(0,0)}(z) = \mathcal{L}_z^{(1,0)}(z)\Phi_{\text{KZ}}(X_0, X_1)$$

である。以上をまとめて次の結果を得る。

命題 11. 2変数形式的 KZ 方程式 (11) の原点で正規化された基本解の間の接続公式は

$$\mathcal{L}^{(0,0)}(z, w) = \mathcal{L}^{(1,0)}(z, w) \Phi_{\text{KZ}}(X_0, X_1) \quad (41)$$

で与えられる.

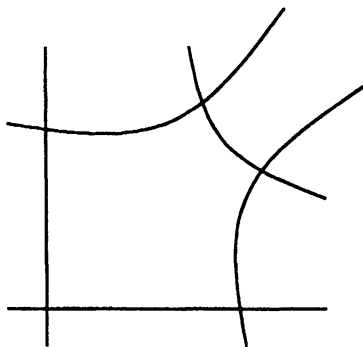


(0, 0) から (z, w) の積分路, (1, 0) から (z, w) の積分路を図のように取ると, 縦方向の積分路での値は両方一致し, 横方向の積分路での値は 1 変数の場合の接続公式で結ばれる

さらに, 分解定理の「=」の関係式を用いて原点での解を書き直し, w に関する 1 変数形式的 KZ 方程式の接続公式を適用することにより, (0, 1) との間の接続公式を得ることが出来る. この意味で分解定理の関係式は 2 変数形式的 KZ 方程式の接続問題と捉える事が出来る.

例えば, (1, 0) と (0, 1) との間の解の接続係数は $\Phi_{\text{KZ}}(X_0, X_1) \Phi_{\text{KZ}}(Y_0, Y_1)^{-1}$ に他ならない.

(1, 1) 並びに無限遠点は正規交叉ではないのでこのままでは接続公式を得る事は出来ず, さらなるブローアップを必要とするが, 原理的には同様の方法で 1 変数に帰着させることが出来る.



適切なブローアップのもとで隣り合う特異点の間の接続公式を求めると,

$$\Phi_{\text{KZ}}(X_0, X_1) \Phi_{\text{KZ}}(Y_1, Y_0) \Phi_{\text{KZ}}(X_1 + Y_1 + Z, X_0) \times \Phi_{\text{KZ}}(X_1, Y_1) \Phi_{\text{KZ}}(Y_0, X_1 + Y_1 + Z) = \mathbf{I}$$

という形式元の異なる 5 個の Drinfel'd associator の積が単位元になるという関係式が得られる.

これを associator の 5 項関係式と呼ぶ.

なお, 実は $\Phi_{\text{KZ}}(W, W') = \Phi_{\text{KZ}}(W', W)^{-1}$ が成立している (これは多重ゼータ値の双対関係式と同値).

7 分解定理と多重ゼータ値の調和積

分解定理の 2 通りの表示における係数を比較することにより超対数関数の関係式を得ることが出来るが, それが実は多重対数関数の調和積を含む. 従ってその極限として多重ゼータ値の調和積が 2 変数形式的 KZ 方程式の接続問題として解釈できる.

多重ゼータ値の調和積は1変数多重対数関数の極限として

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) = \lim_{z \rightarrow 1-0} \text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(z) = \sum_{m_1 > \dots > m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}} \quad (42)$$

により定義される実数で, その調和積は級数を用いた

$$\begin{aligned} \zeta(k)\zeta(l) &= \sum_{m>0} \frac{1}{m^k} \sum_{n>0} \frac{1}{n^l} = \left(\sum_{m>n>0} + \sum_{m=n>0} + \sum_{n>m>0} \right) \frac{1}{m^k n^l} \\ &= \zeta(k, l) + \zeta(k+l) + \zeta(l, k) \end{aligned}$$

のような公式を一般化した, 多重ゼータ値の積を多重ゼータ値の $\mathbf{Q}$ 線形結合で書く公式である. 多重ゼータ値の反復積分表示を用いた別の積和公式であるシャッフル積

$$\begin{aligned} \zeta(k_1, \dots, k_r) \zeta(l_1, \dots, l_s) &= \lim_{z \rightarrow 1-0} \text{Li}(\xi_0^{k_1-1} \xi_1 \dots \xi_0^{k_r-1} \xi_1; z) \text{Li}(\xi_0^{l_1-1} \xi_1 \dots \xi_0^{l_s-1} \xi_1; z) \\ &= \text{Li}((\xi_0^{k_1-1} \xi_1 \dots \xi_0^{k_r-1} \xi_1) \sqcup (\xi_0^{l_1-1} \xi_1 \dots \xi_0^{l_s-1} \xi_1); 1) \end{aligned}$$

と調和積を連立させると多重ゼータ値の非自明な $\mathbf{Q}$ 線型関係式が得られる. これを複シャッフル関係式と呼ぶが, 複シャッフル関係式は多重ゼータ値の全ての $\mathbf{Q}$ 線型関係式を尽くしていると予想されている (Zagier 予想).

Deligne-寺杣, 古庄によって数論幾何の立場から Drinfel'd associator Φ_{KZ} の満たす関係式から多重ゼータ値の複シャッフル関係式が導かれることが証明されている. ここでは2変数形式的 KZ 方程式の接続問題に由来する5項関係式が本質的であり, 調和積自体を2変数形式的 KZ 方程式の接続問題として捉えることが出来る. なお, 多重ゼータ値のシャッフル積は $\Phi_{\text{KZ}}(X_0, X_1)$ が Hopf 代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{X}_z)$ の群的な元であることと同値なので, 1変数形式的 KZ 方程式の接続問題として捉えることが出来る.

1変数多重対数関数 $\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(z)$ と $\text{Li}_{l_1, \dots, l_s}(w)$ の積を考える. 多重ゼータ値の場合と同様に, 例えば $r = s = 1$ のとき

$$\begin{aligned} \text{Li}_{k_1}(z) \text{Li}_{l_1}(w) &= \sum_{m>0} \frac{z^m}{m^{k_1}} \sum_{n>0} \frac{w^n}{n^{l_1}} = \left(\sum_{m>n>0} + \sum_{m=n>0} + \sum_{n>m>0} \right) \frac{z^m w^n}{m^{k_1} n^{l_1}} \\ &= \text{Li}_{k_1, l_1}(1, 1; z, w) + \text{Li}_{k_1+l_1}(zw) + \text{Li}_{l_1, k_1}(1, 1; w, z) \end{aligned}$$

となり, 2変数多重対数関数 (主変数は z, w 両方が現れる) の和で書くことが出来る. このとき zw という積が生じるため, 変数を同じにしようとうまく行かないことに注意する. 一般の場合は複雑な式になるが, index の調和積 $*$ を

$$\mathbf{k} * \emptyset = \emptyset * \mathbf{k} = \mathbf{k},$$

$$\begin{aligned} (k_1, \dots, k_r) * (l_1, \dots, l_s) &= (k_1) \cdot ((k_2, \dots, k_r) * (l_1, \dots, l_s)) \\ &\quad + (l_1) \cdot ((k_1, \dots, k_r) * (l_2, \dots, l_s)) \\ &\quad + (k_1 + l_1) \cdot ((k_2, \dots, k_r) * (l_2, \dots, l_s)) \end{aligned}$$

($\cdot$ は結合による積, $\emptyset$ は空な index) と定ると, 多重ゼータ値の調和積は

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) \zeta(l_1, \dots, l_s) = \zeta((k_1, \dots, k_r) * (l_1, \dots, l_s)),$$

多重対数関数の調和積は

$$\text{Li}_{k_1, \dots, k_r}(z) \text{Li}_{l_1, \dots, l_s}(w) = \sum \left(\begin{array}{l} (k_1, \dots, k_r) * (l_1, \dots, l_s) \text{ の各成分を index にもつ Li 達の和} \\ k_1 \text{ が先頭なら主変数 } z \text{ で } \text{Li}_{\bullet}(l_1 \text{ の位置} - 1, *, z, w) \text{ の形} \\ l_1 \text{ が先頭なら主変数 } w \text{ で } \text{Li}_{\bullet}(k_1 \text{ の位置} - 1, *, w, z) \text{ の形} \\ k_1 + l_1 \text{ が先頭なら } zw \text{ を変数とする 1 変数多重対数関数} \end{array} \right)$$

となっている. 例えば

$$\begin{aligned} \text{Li}_{k_1, k_2}(z) \text{Li}_{l_1}(w) &= \text{Li}_{k_1, k_2, l_1}(2, 1; z, w) + \text{Li}_{k_1, l_1, k_2}(1, 2; z, w) + \text{Li}_{k_1, k_2 + l_1}(1, 1; z, w) \\ &\quad + \text{Li}_{l_1, k_1, k_2}(1, 2; w, z) + \text{Li}_{k_1 + l_1, k_2}(zw). \end{aligned}$$

などと計算される.

以下, この調和積は分解定理における 2 通りの表記の仕方

$$\hat{\mathcal{L}}_{wz}(z, w) \hat{\mathcal{L}}_z(z) = \hat{\mathcal{L}}_{zw}(z, w) \hat{\mathcal{L}}_w(w) \quad (43)$$

における展開環 $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ の元の係数の比較として解釈することが出来ることを示す.

命題 10 によると, $\hat{\mathcal{L}}(z, w)$ の s 次パートは

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_s(z, w) &= \sum_{s' + s'' = s} \sum_{W' \in \mathcal{W}_{g'}^0(\mathfrak{X}_{wz})} \sum_{W'' \in \mathcal{W}_{g''}^0(\mathfrak{X}_z)} f_{W', W''}(z, w) \alpha(W' W'')(\mathbf{I}) \\ &= \sum_{s' + s'' = s} \sum_{W' \in \mathcal{W}_{g'}^0(\mathfrak{X}_{zw})} \sum_{W'' \in \mathcal{W}_{g''}^0(\mathfrak{X}_w)} g_{W', W''}(z, w) \alpha(W' W'')(\mathbf{I}) \end{aligned}$$

と書けている. ここでそれぞれの Lie 環パートは一次独立であるので, 分解 (43) の両辺の $\alpha(W' W'')(\mathbf{I})$ の係数を比較することで関係式を得ることが出来る. すなわち, 下の分解に対して $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ の関係式 (5) を用いて $\mathcal{W}^0(\mathfrak{X}_{zw}) \mathcal{W}^0(\mathfrak{X}_w)$ の形の元を $\mathcal{W}^0(\mathfrak{X}_{wz}) \mathcal{W}^0(\mathfrak{X}_z)$ の形に変換してまとめ直した結果を

$$\hat{\mathcal{L}}_s(z, w) = \sum_{s' + s'' = s} \sum_{W' \in \mathcal{W}_{g'}^0(\mathfrak{X}_{wz})} \sum_{W'' \in \mathcal{W}_{g''}^0(\mathfrak{X}_z)} \hat{g}_{W', W''}(z, w) \alpha(W' W'')(\mathbf{I})$$

とする ($\hat{g}_{W', W''}(z, w)$ はある g 達の線形結合であることに注意) と, 係数の比較 $f_{W', W''}(z, w) = \hat{g}_{W', W''}(z, w)$ が非自明な関係式を与える. $\alpha(W') \alpha(W'')(\mathbf{I})$ の係数に対して, ある $\varphi_{W', W''} \in \mathcal{B}$ が存在し,

$$f_{W', W''}(z, w) = \int_{C_L} \varphi_{W', W''}, \quad \hat{g}_{W', W''}(z, w) = \int_{C_r} \varphi_{W', W''}$$

が成立していることより以下の定理が示される.

定理 12 (一般化された調和積).

$$\hat{L}_s(z, w) = \sum_{s'+s''=s} \sum_{W' \in \mathcal{W}_{s'}^0(\mathfrak{X}_{wz})} \sum_{W'' \in \mathcal{W}_{s''}^0(\mathfrak{X}_z)} \int_{(0,0)}^{(z,w)} \varphi_{W', W''} \alpha(W') \alpha(W'') (I)$$

を満たす $\varphi_{W', W''} \in \mathcal{B}_s$ が存在し,

$$\int_{C_\perp} \varphi_{W', W''} = \int_{C_r} \varphi_{W', W''} \quad (44)$$

が超対数関数の非自明な関係式を与える.

特に, $f_{W', W''}(z, w)$ が 2 変数多重対数関数である場合, その全微分を再び 2 変数多重対数関数で書くことが出来るため, 逐次全微分を取ることで $\varphi_{W', W''}$ を求めることが出来る. この事実により次の系を得る.

系 13. $W' \in \mathcal{W}^0(\mathfrak{X}_{wz})$, $W'' \in \mathcal{W}^0(\mathfrak{X}_z)$ とする. $f_{W', W''}(z, w)$ が 2 変数多重対数関数である場合,

$$f_{W', W''}(z, w) = \int_{C_\perp} df_{W', W''}(z, w) = \int_{w=0}^w \theta_\perp(W') \int_{z=0}^z \theta_\perp(W'')$$

に対して再帰的な関係式

$$f_{W', W''}(z, w) = \int_{C_r} df_{W', W''}(z, w) \quad (45)$$

が成立する.

この系の意味は, (45) の右辺の全微分が次数が 1 下がった 2 変数多重対数関数を係数とする微分形式であるので, その関数部分について再び系を適用して定数関数まで次数を落とすことが出来て C_r に沿った積分を求めることが出来る, ということである. また, 明らかに

$$f_{Y_0^{k_1-1} Y_1 \dots Y_0^{k_i-1} Y_1 Y_0^{k_{i+1}-1} Z \dots Y_0^{k_{i+j}-1} Z, I}(z, w) = \text{Li}_{k_1, \dots, k_{i+j}}(i, j; w, z)$$

であるので, $C_\perp$ に沿った分解の係数には全ての w を主変数とする 2 変数多重対数関数が現れている. この系の再帰的な関係式を計算することにより次の定理を得る.

定理 14. 次の 4 つの関数等式の系列は同値 (互いにそれぞれの線形結合で書ける).

(i) 系 13 の関数等式 (45).

(ii) $\text{Li}_{k_1, \dots, k_{i+j}}(i, j; w, z) = \int_0^z \frac{\partial}{\partial z} \text{Li}_{k_1, \dots, k_{i+j}}(i, j; w, z) dz.$

(iii) $i, j \geq 0$ に対し,

$$\begin{aligned} \int_0^z \underbrace{\frac{dz}{z} \circ \cdots \circ \frac{dz}{z}}_{k-1 \text{ 個}} \circ \frac{dz}{1-z} \text{Li}_{k_1, \dots, k_{i+j}}(i, j; w, z) \\ = \sum_{s=0}^{i-1} \left(\text{Li}_{k_1, \dots, k_{i-s}, k, k_{i-s+1}, \dots, k_{i+j}}(i-s, j+s+1; w, z) \right. \\ \quad \left. + \text{Li}_{k_1, \dots, k_{i-s}+k, k_{i-s+1}, \dots, k_{i+j}}(i-s-1, j+s+1; w, z) \right) \\ \quad + \text{Li}_{k, k_1, \dots, k_{i+j}}(1, i+j; z, w). \end{aligned}$$

(iv) 多重対数関数の調和積.

従って, 一般化された調和積 (44) は多重対数関数の調和積を真に含む関係式の系列であり, 多重対数関数の調和積を 2 変数形式的 KZ 方程式の接続問題として捉えることができる.

超対数関数に対する調和積の例 一般化された調和積のうち多重対数関数に対応する部分以外のところは超対数関数を含む関係式になっている. この場合は $f_{W', W''}(z, w) = \int \varphi_{W', W''}$ となる $\varphi_{W', W''} \in \mathcal{B}$ は $f_{W', W''}(z, w)$ を求める際に用いた積分路 C_+ に沿った反復形式 $\theta(W') \otimes \theta(W'')$ に同型写像 $\iota_-^{-1} : S(A_{wz}) \otimes S(A_z) \rightarrow \mathcal{B}$ を作用させた元として求められる.

例えば, $f_{ZY_1Z, \mathbf{I}}(z, w) = L({}^1z^11^1z; w)$ の場合を考える. 積分路 C_+ に沿った反復積分は $\int_0^w \zeta_w \circ \eta_1 \circ \zeta_w$ である. ここで, $\iota_-(\varphi_{ZY_1Z, \mathbf{I}}) = \zeta \circ \eta_1 \circ \zeta \otimes \mathbf{1}$ となる反復形式 $\varphi_{ZY_1Z, \mathbf{I}} \in \mathcal{B}$ は次のようになっている.

$$\begin{aligned} \varphi_{ZY_1Z, \mathbf{I}} = & \eta_1 \circ \zeta \circ \zeta + \zeta \circ \eta_1 \circ \zeta + \zeta \circ \zeta \circ \eta_1 - (\eta_1 \circ \zeta + \xi_1 \circ \eta_1 - \xi_1 \circ \zeta - \xi_0 \circ \zeta) \circ \zeta \\ & - \xi_1 \circ (\xi_1 \circ \eta_1 - \xi_1 \circ \zeta - \xi_0 \circ \zeta) - \zeta \circ (\zeta \circ \eta_1 - \xi_1 \circ \eta_1 + \xi_1 \circ \zeta + \xi_0 \circ \zeta) \\ & + \xi_1 \circ (\zeta \circ \eta_1 - \xi_1 \circ \eta_1 + \xi_1 \circ \zeta + \xi_0 \circ \zeta) - \xi_1 \circ \zeta \circ \zeta - \xi_0 \circ \zeta \circ \zeta. \end{aligned}$$

従って, C_+ 側の積分を計算して得られる関係式は

$$\begin{aligned} L({}^1z^11^1z; w) = & -2 \text{Li}_{1,1}(z) \text{Li}_1(w) + 2 \text{Li}_{1,1,1}(2, 1; z, w) + 2 \text{Li}_{1,2}(1, 1; z, w) \\ & + L({}^1w^11; z) \text{Li}_1(w) + \text{Li}_{1,1}(1, 1; z, w) \text{Li}_1(w) - L({}^1w^11^1w; z) - \text{Li}_{1,2}(zw) \end{aligned}$$

となる.

8 深さ 2 の多重対数関数の定める巾零表現

最後に, 2 変数形式的 KZ 方程式の表現の例として深さ 2 の多重対数関数の定める巾零表現を紹介する.

k を fix し, 次のベクトルを考える.

$$\vec{f}(z, w) = {}^t(\text{Li}_{0,0}(z, w), \text{Li}_{0,1}(z, w), \dots, \text{Li}_{0,k}(z, w), \text{Li}_{1,0}(z, w), \dots, \text{Li}_{1,k}(z, w), \\ \dots, \text{Li}_{k,0}(z, w), \dots, \text{Li}_{k,k}(z, w)).$$

ここで, 深さ 2 の 2 変数多重対数関数 $\text{Li}_{i,j}(z, w)$ は

$$\begin{aligned} \text{Li}_{0,0}(z, w) &= 1, & \text{Li}_{0,j}(z, w) &= \text{Li}_j(0, 1; z, w) (= \text{Li}_j(zw)), \\ \text{Li}_{i,0}(z, w) &= \text{Li}_i(1, 0; z, w) (= \text{Li}_i(z)), & \text{Li}_{i,j}(z, w) &= \text{Li}_{i,j}(1, 1; z, w) \end{aligned}$$

という z を主変数とする 2 変数多重対数関数の略記である.

このとき $\vec{f}(z, w)$ は, 2 変数多重対数関数の微分漸化式 (39), (40) の $i+j \leq 2$ の場合の index の変化に対応する行列による 2 変数形式的 KZ 方程式の表現を満たす.

$$\frac{\partial}{\partial z} G = \left(\frac{\rho(X_0)}{z} + \frac{\rho(X_1)}{1-z} + \frac{w\rho(Z)}{1-zw} \right) G, \quad \frac{\partial}{\partial w} G = \left(\frac{\rho(Y_0)}{w} + \frac{\rho(Y_1)}{1-w} + \frac{z\rho(Z)}{1-zw} \right) G.$$

ここで, ρ は Lie 環 $\mathfrak{X}$ の $(k+1)^2$ 次元巾零表現で,

$$\begin{aligned} \rho(X_0) &= P \otimes I + E_{0,0} \otimes P, & \rho(X_1) &= E_{1,0} \otimes I, \\ \rho(Y_0) &= I \otimes P - \sum_{i=1}^k E_{i,0} \otimes E_{1,i}, & \rho(Y_1) &= I \otimes E_{1,0} - \sum_{i=0}^k E_{i,0} \otimes E_{1,i}, \\ \rho(Z) &= E_{0,0} \otimes E_{1,0} \end{aligned}$$

と定める. ここで, I は $k+1$ 次単位行列, E_{ij} は $k+1$ 次 (i, j) 行列単位 (但し添字は 0 から始まるとする),

$$P = \sum_{i=1}^{k-1} E_{i+1,i}$$

とする. この表現は可積分条件 (5) を満たす (すなわち $\mathfrak{X}$ の表現として well-defined である) こと, $\rho(\mathfrak{X})^{k+1} = \{0\}$ が簡単な計算により示される. この表現は既約ではない.

これに対して原点で正規化された基本解の表現を求める.

$$\begin{aligned} X^{(n)} &= [\underbrace{\rho(X_0), \dots, \rho(X_0)}_{n-1 \text{ 個}}, \rho(X_1)] \cdots, & Y^{(n)} &= [\underbrace{\rho(Y_0), \dots, \rho(Y_0)}_{n-1 \text{ 個}}, \rho(Y_1)] \cdots, \\ Z^{(n)} &= [\underbrace{\rho(Y_0), \dots, \rho(Y_0)}_{n-1 \text{ 個}}, \rho(Z)] \cdots, & Q_{i,j} &= -E_{i,0} \otimes E_{j,0} \end{aligned}$$

とすると, C_-, C_+ に沿った積分はそれぞれ

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_s(z, w) &= \text{Li}_s(z)X^{(s)} + \text{Li}_s(w)Y^{(s)} + \text{Li}_s(zw)Z^{(s)} + \sum_{i=1}^{s-1} (-\text{Li}_i(z)\text{Li}_{s-i}(w) + \text{Li}_{s-i,i}(w, z))Q_{i,s-i} \\ &= \text{Li}_s(z)X^{(s)} + \text{Li}_s(w)Y^{(s)} + \text{Li}_s(zw)Z^{(s)} + \sum_{i=1}^{s-1} (-\text{Li}_s(zw) - \text{Li}_{i,s-i}(z, w))Q_{i,s-i} \end{aligned}$$

となる. 特に $Q_{i,s-i}$ の係数を比較して多重対数関数の調和積 (深さ 2 の場合)

$$\mathrm{Li}_i(z) \mathrm{Li}_j(w) = \mathrm{Li}_{i,j}(z, w) + \mathrm{Li}_{j,i}(w, z) + \mathrm{Li}_{i+j}(zw)$$

を得る.

参考文献

- [B] F. Brown, Multiple zeta values and periods of moduli spaces $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbf{R})$, preprint (2006) arXiv:math/0606419v1.
- [BF] A. Besser and H. Furusho, The double shuffle relations for p -adic multiple zeta values, *Contemp. Math.*, **416**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [C1] K.T. Chen, Reduced bar constructions on de Rham complexes, *Algebra, topology, and category theory (a collection of papers in honor of Samuel Eilenberg)*, pp. 19–32. Academic Press, New York, 1976.
- [C2] K.T. Chen, Iterated path integrals, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), no.5 831–879.
- [D] V.G. Drinfel'd, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, *Algebra i Analiz* **2** (1990), no. 4, 149–181; translation in *Leningrad Math. J.* **2** (1991), no. 4, 829–860.
- [DT] P. Deligne and T. Terasoma, Harmonic shuffle relation for associators, preprint (2005), http://www2.lifl.fr/mzv2005/DOC/Terasoma/lille_terasoma.pdf.
- [F] H. Furusho, Double shuffle relation for associators, preprint (2008) arXiv:math.AG/0808.0319v1.
- [G] A.B. Goncharov, Multiple polylogarithms and mixed Tate motives, preprint (2001) arXiv:math.AG/010359.
- [H] R.M. Hain, Iterated integrals and mixed Hodge structures on homotopy groups, *Hodge theory (Sant Cugat, 1985)*, 75–83, *Lecture Notes in Math.*, 1246, Springer, Berlin, 1987.
- [O] S. Oi, 形式的 KZ 方程式の表現と多重ゼータ値の関係式, 本講究録 (2009).