

$\{1, 2\}$ -因子の構成法について.

東海大学(院生) 岡本克也 (Okamoto Katunari)

任意の連結グラフについての $\{1, 2\}$ -因子の構成法について
考察する.

定義、 $H=(W, F)$ が $G=(V, E)$ の因子であるとは、 H は G の全域
部分グラフでかつ、辺集合 F は空でないとき、すなわち、

$$W = V, \quad F \subseteq E, \quad F \neq \emptyset$$

であるときを言う.

$H=(W, F)$ が $G=(V, E)$ の $\{n, m\}$ -因子 ($n \leq m$) であるとは、
 H は G の因子でありかつ次をみたすときをいう:

$$n \leq d_H(x) \leq m \quad \text{for all } x \in W$$

特に、 $n=m$ であるとき、 H は G の m -因子という.

ここで $F=\emptyset$ であるとき、任意の $x \in W$ に対し $d_H(x)=0$ であることから、固定の定義からは逸脱するが、 H は G の 0 -因子と呼ぶことにしよう.

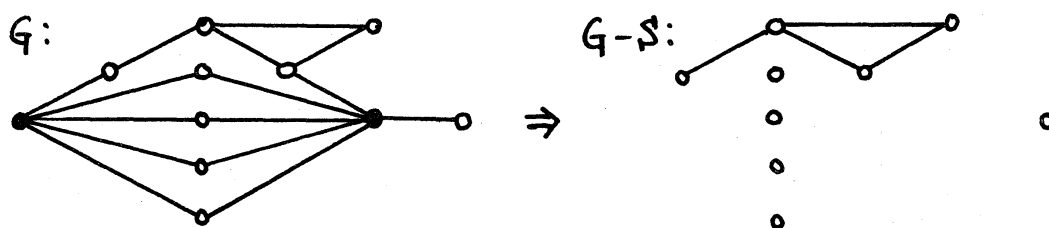
定理 (Akiyama, Avis and Era)

グラフ $G=(V,E)$ が $\{1,2\}$ -因子をもつための必要十分条件は

$$I(G-S) \leq 2|S| \quad (\text{for } \forall S \subset V)$$

となることである。($I(G-S)$ は $G-S$ 内の孤立点の個数を表す)

この定理を使い、あるグラフが $\{1,2\}$ -因子をもたないことを示すのは、非常に簡単である。例えば下図のグラフにおいて、黒点を上の定理の集合 S とすれば、 $G-S$ における孤立点の個数は5個となり、 $I(G-S) > 2|S|$ が成り立つのでこのグラフに $\{1,2\}$ -因子が存在しないことがわかる。



それでは、 $\{1,2\}$ -因子を持つ場合それをどのように構成すれば良いのであろうか。先の定理についての証明も一つの構成法である。それを単に構成法という意味で明確にしていこう。

アルゴリズム

グラフ $G=(V,E)$ は連結グラフとし、 $\emptyset$ を G の 0 -因子とする。

(1) F における次数 0 の点 v が G において隣接している場合、その点 v を結ぶ辺を F に加える。このような点 v の組が存在しなくなるまで繰返し、もし F に孤立点が無くなれば、 F は G の 1-因子であり、ここで終る。そうでなければ (2) に進む。このとき F は P_1 と P_2 からなる。

(2) F における次数 0 と 1 の点 v が G において隣接している場合、その点 v を結ぶ辺を F に加える。このような点 v の組が存在しなくなるまで繰返し、もし F に孤立点が無くなれば F は G の $\{1, 2\}$ -因子であり、ここで終る。そうでなければ (3) に進む。

このとき F は P_1, P_2, P_3, P_4 からなる。

(3) F に P_4 成分が存在するとき、その全ての P_4 成分の中央の辺を F から除く。このとき (2) の状態が起れば、そこに立ち戻り、繰返し、その後 (4) に進む。

このとき F は P_1, P_2, P_3 からなる。



~~~~~:  $F$  の辺.

(4)  $G$  において、 $F$  の二つの異なる  $P_3$  成分の端点どうしが、隣接しているとき、その二つの  $P_3$  を下図のように二つの  $P_2$  にする。

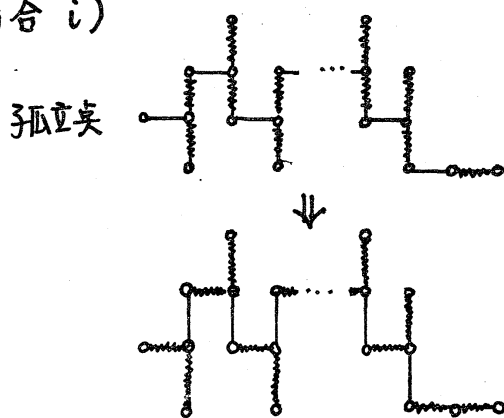


このような  $P_3$  の組がなくなるまで繰返し、(2) の状態が発生すれば、そこまで戻って手順を進める。そうでなければ(5)に進む。

このとき  $F$  は  $P_1, P_2, P_3$  からなる。

(5) このとき  $F$  における孤立点 ( $P_1$  成分) は、 $F$  の  $P_3$  成分の中央の点にのみ隣接する、また  $F$  の  $P_3$  成分の端点は、 $G$  においても端点であるが、 $P_2$  の端点又は他の  $P_3$  の中央の点にのみ隣接する。よって  $F$  の孤立点のまわりを走査すると、次の三つの場合になる。

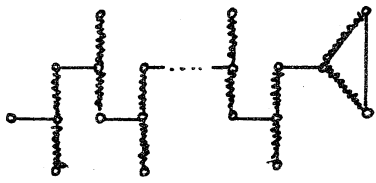
(場合 i)



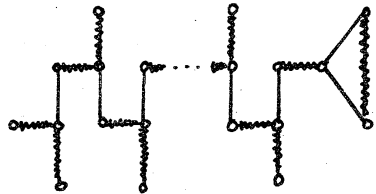
左図のように、孤立点のまわりの  $P_3$  の端点を走査していくとき、 $P_2$  の端点にたどりつくとき、このような最短経路および  $P_2$  をえらび、左図下のように  $F$  を変形する。

(場合 ii)

孤立点



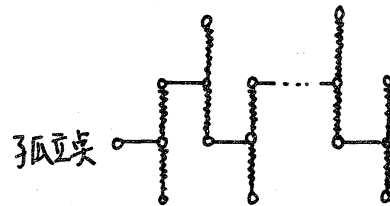
↓



場合 i と同じ走査で、2つの端点が隣接している  $P_3$  成分にたどりつくとき、このような最短の経路をえらび、左図のように  $F$  を変形する。

(場合 iii)

右図のように、孤立点のまわりの全ての  $P_3$  の端点は次々と  $P_3$  の中央の点に隣接しているが、もともと  $G$  において端点となっているとき、このような  $P_3$  の個数は有限個なので、これらの  $P_3$  の端点は、全てこれらの  $P_3$  の中央の点にのみ隣接する。



よって先の定理によって

$$S = \{v \in V \mid v \text{ はこれらの } P_3 \text{ の中央の点}\}$$

とすると、

$$I(G - S) \geq 2|S| + 1$$

となり、 $G$  には  $\{1, 2\}$ -因子が存在しないことが判明する。

場合  $\bar{v}$ ,  $\bar{u}$  のとき、孤立頂は1個ずつ解消されていくので  $G$  に  $\{1, 2\}$ -因子が存在するとき、以上の構成法を繰返せば、 $\Gamma$  には、求める  $\{1, 2\}$ -因子を得ることができる。