

ON THE RELATIONSHIP BETWEEN p-STABLE CYLINDRICAL MEASURES AND THE SUFFICIENT SAZONOV TOPOLOGY

お茶の水女子大学理学部 前田 ミチエ (Michie Maeda)

1 序

E を実可分 Banach 空間とし、 E' を E の位相的 dual とする。有限次元空間上の Bochner の定理の拡張として次の命題が考えられる。

「 E' 上で定義された複素数値関数 ϕ が次の条件 (*) を満たすときに ϕ を特性関数とする E 上のシリンダー測度 μ は Radon 拡大可能になる。又 μ が Radon 測度ならばその特性関数 ϕ は条件 (*) を満たす。

(*) (1) $\phi(0) = 1$ 、(2) ϕ は正型、(3) ϕ は (E', τ) で連続。」

ここで τ は E' 上に定められたベクトル位相である。このような τ が存在する場合は τ を Sazonov 位相 (S-位相) といい、空間 E を S-空間という。また μ が Radon 拡大可能になるために、条件 (*) が十分条件になるとき τ を十分 Sazonov 位相 (SS-位相) と言い、必要条

件になるときに必要 Sazonov 位相 (NS-位相) と言う。

$1 \leq p \leq 2$ なる p に対して p' を conjugate index (i.e., $1 < p \leq 2$ の場合は $1/p' + 1/p = 1$, $p = 1$ の場合は $p' = +\infty$) とする。このとき $L^{p'} (p=1$ のときは L^∞ の代わりに $\sigma(L^\infty, L^1)$ を考える) 上に次のようなシリンドー測度が存在する。それは特性関数が $\exp(-\|\xi\|^p)$ ($\xi \in L^p$) となるもので、このシリンドー測度を canonical p -stable シリンドー測度と言って Γ_p で表す。

この小論ではある条件を付けた SS-位相が Γ_p -可測な seminorm を用いて定義できることを示す。

(注意) p -stable シリンドー測度は $0 < p \leq 2$ の範囲で定義されるがここでは特にことわらない限りは $1 \leq p \leq 2$ で考えることにする。

2 準備と記法

まず初めに測度の order、シリンドー測度の type, cotype について説明する ([9,10])。

定義 E は 1 と同様に Banach 空間で、 λ は E 上の Radon 確率測度とする。

$$\|\lambda\|_p = \{\int_E \|x\|^p d\lambda(x)\}^{1/p} \quad (-\infty < p < \infty, p \neq 0)$$

$$\|\lambda\|_\infty = \text{ess. sup} \|x\| \quad (\lambda \text{ に関して本質的上限})$$

$$\|\lambda\|_0 = \exp \int_E \log \|x\| d\lambda(x)$$

とする。このとき $\|\lambda\|_p < +\infty$ であれば λ は order p であるという。

$p < 0$ のときは常に $\|\lambda\|_p < +\infty$ となる。 λ が order p であるならば、 $q < p$ なる q についても order q であると言える。

定義 μ がシリンダー測度のとき $\xi \in E'$ に対して $\mu_\xi = \xi(\mu)$ とする。

$$\|\mu\|_p^* = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \left\{ \int_R |t|^p d\mu_\xi(t) \right\}^{1/p} \quad (-\infty < p < \infty, p \neq 0)$$

$$\|\mu\|_\infty^* = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \text{ess. sup} |t| \quad (\mu_\xi \text{ に関して本質的上限})$$

$$\|\mu\|_0^* = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \exp \int_R \log |t| d\mu_\xi(t)$$

とする。

このとき $\|\mu\|_p^* < +\infty$ であるならば μ は type p であると言う。

μ が Radon 測度 ならば $\|\mu\|_p \geq \|\mu\|_p^*$ となる。

$\mathbf{R}$ 上の canonical p -stable 測度 ($\mathbf{R}$ 上では Radon 測度になっている) を γ_p で表すと γ_p は order q ($\forall q < p, p = 2$ の場合は $\forall q < +\infty$) であり $\|(\Gamma_p)_\xi\|_q = \|\xi\| \|\gamma_p\|_q$ となるので Γ_p は type q ($\forall q < p, p = 2$ の場合は $\forall q < +\infty$) であることが解る。

次にシリンダー測度の cotype について述べる。

定義 μ がシリンダー測度のときに

$$\|\mu\|_p^{**} = \left[\inf_{\|\xi\| \geq 1} \left\{ \int_R |t|^p d\mu_\xi(t) \right\}^{1/p} \right]^{-1}$$

として $\|\mu\|_p^{**} < +\infty$ のとき μ は cotype p であると言う。

$q > p$ で μ が cotype p であるならば μ は cotype q で $\|\mu\|_q^{**} \leq \|\mu\|_p^{**}$ である。

$\|\Gamma_p\|_q^{**} < +\infty$ も上と同様にして求められるので Γ_p は cotype q ($\forall q < p, p = 2$ の場合は $\forall q < +\infty$) でもある。

次に Dudley-Feldman-Le Cam による可測ノルムの定義について述べよう。

定義 μ が E 上のシリンダー測度とする。 E 上で定義された seminorm $|\cdot|$ が μ -可測であるとは $\forall \epsilon > 0$ に対して $\exists G \in FD(E)$ ($FD(E)$ は E の有限次元部分空間の全体) で、 $F \in FD(E'), F \perp G$ なる F については

$$\mu(\{x; |x - F^\perp| < \epsilon\}) \geq 1 - \epsilon$$

が成り立つことである。

上の定義で $F^\perp = \{y \in E; \langle x, y \rangle = 0 \text{ for } \forall x \in F\}$ とする。

E の seminorm $|\cdot|$ に関する associated Banach 空間を $E_{|\cdot|}$ で表し $E \rightarrow E_{|\cdot|}$ への canonical map を i とする。このとき $i(\mu)$ が $E_{|\cdot|}$ 上で Radon 拡大可能になるための必要十分条件が、 $|\cdot|$ が μ -可測であるということである。

この章の締めくくりとしてシリンダー測度 μ に対して定まる linear random function について述べる。 μ が E 上のシリンダー測度であるときに $E' \rightarrow L^0(\Omega, P)$ への次のような線形写像 T が対応する。

$$\mu_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(Z) = P\{\omega \in \Omega; (T(\xi_1)(\omega), T(\xi_2)(\omega), \dots, T(\xi_n)(\omega)) \in Z\}$$

特に μ が type p ($p \geq 0$) のときは T は $E' \rightarrow L^p(\Omega, P)$ への連続な写像として定まる。この T を μ に対する linear random function と言う。

3 位相 M_p と L^p 空間の SS-位相

まず最初に S-位相について今まで知られている結果を述べよう。

(1) Bochner の定理

R^n は S-空間 で S-位相 は R^n 上に定まる canonical ベクトル位相。

(2) 無限次元 Hilbert 空間については 1958 年に Sazonov([8]) により S-空間であることが示された (これが Sazonov 位相と命名された由来である)。この時の S-位相は Hilbert-Schmidt 作用素を用いて定義された。これを τ_{HS} と表わす。更にこの τ_{HS} は最弱の S-位相であることも解っている。その後 Gross([1,2]), Kuo([3]) により τ_{HS} より 真に強い Sazonov 位相の存在が示されている。これは Gross により定義された可測ノルム (Dudley-Feldman-Le Cam のものとは異なる) を用いているので τ_m で表わす。

(3) 無限次元 Banach 空間はすべてが S-空間であるとは言えない。Mouchtari([6]) により S-空間ならば L^0 に埋め込み可能で且つ cotype 2 であることが示された。更に Mouchtari は 1975 年に、Banach 空間が L^0 の中に埋め込み可能で metric approximation property(m.a.p.) を持つならば S-空間であることを示した (例えば $L^p, 1 \leq p \leq 2$)。この時の S-位相は decomposed 作用素をすべて連続にする最弱位相として定義され、 τ_0 と表わされる。Linde([4]) により L^p の S-位相 τ_0 は τ_q ($0 \leq q < p$) に等しい。 τ_q とは Λ_q 作用素をすべて連続にする最弱位相である。 $(\Lambda_q$ 作用素については後述する。)

(4) Banach 空間がすべて S-空間とはいえないことから SS-位相、NS-位相に分けて考える必要性が生じた。最弱 NS-位相は前述の τ_0 であることが知られているが最強の SS-位相についてはまだ解っていない。すべての Banach 空間に対する SS-位相で今まで知られている中で 1 番強いものとしては位相 M ([5]) がある。

以上の結果を踏まえてここではまず L^p 上に位相 M_p を次のように定義する。

定義 $1 < p \leq 2$ 、 p' は p の conjugate index とする。

$$N = \{|\cdot|; L^{p'} \text{ 上で定義された連続で } \Gamma_p \text{ - 可測な seminorm} \}$$

とする。 N に属するすべての seminorm を連続にするような最弱位相を M_p とする。

このとき次の定理が成り立つ。

定理 1 $L^{p'}$ 上に定義された位相 M_p は L^p の type q ($1 \leq q < p$) なるシリンダー測度全体に対する SS-位相になる。

[証明の概略] μ を L^p 上の type q ($1 \leq q < p$) なるシリンダー測度とする。 対応する linear random function を T とすると T は $L^{p'} \rightarrow L^q(\Omega, P)$ への線形写像で位相 M_p に関して連続になる。 M_p の定義から T は次のように分解される。

$$T = \phi \circ i; i: L^{p'} \rightarrow L_{|\cdot|}^{p'}; \phi: L_{|\cdot|}^{p'} \rightarrow L^q$$

ここで $|\cdot| \in N$ である。

ここで Schwartz の定理 ([9]) を紹介する。

「Schwartz の定理」 E, G は Banach 空間、 u は E から G への連続線形写像とし、 $p > -1$ とする。 ρ が $\sigma(G', G)$ 上の cotype p のシリンダー測度で $u'(\rho)$ は $\sigma(E', E)$ 上の order p の Radon 測度であるとする。 このとき u は p -summing map である。

この定理から i の双対作用素 i' は q -summing map となる。 $1 \leq q < p \leq 2$ であるから i' は q -Radonifying map になる。 従って $L^q \rightarrow L^q$ への恒等写像に対応するシリンダー

測度を ν とすると $\phi'(\nu)$ は ϕ に対応するシリンドー測度になってこれは type q になる。更に $i'(\phi'(\nu)) = \mu$ となって Radon 測度になることが導かれる。以上が証明の概略である。

Linde([4]), Okazaki([7]) により、 L^p 上に位相 τ_q を考えるとこれが S-位相であることが示されている。そこで次の系を得る。

系 M_p は L^p の type q ($1 \leq q < p$) のシリンドー測度全体に対する S-位相である。

τ_q というのは Λ_q -作用素をすべて連続にする最弱位相である。Banach 空間 E 上のシリンドー測度でその特性関数が $\exp(-\|Tx\|^q)$ (ここで T は $E' \rightarrow L^q$ への線形写像で $\|\cdot\|$ は L^q -norm とする) となるものを q -stable シリンドー測度という。この q -stable シリンドー測度の中で Radon 測度になっている場合の T を Λ_q -作用素と言うのである。

系の証明は L^p が stable type q の Banach 空間であるから $\tau_0 = \tau_q$ であり、また M_p は τ_q より強いので M_p が NS-位相になることから得られる。

(注意) 上述の定理 1 及び系において type q ($1 \leq q < p$) という条件を外すことが可能ならば Hilbert 空間 L^2 の場合の S-位相 τ_{HS} と τ_m に対応する拡張になるのであるが未だ不明のままである。

4 一般の Banach 空間上への位相 M_p の拡張

次に一般の Banach 空間上に位相 M_p を拡張することを考える。

定義 E を実可分 Banach 空間とする。 E 上の p -stable シリンドー測度 μ について、 E の最初の位相に関して連続で、かつ μ -可測な seminorm の全体を考える。これらをす

べて連続にする最弱位相を $M_p(\mu)$ とする。

(注意) 前節における定義 M_p はここでの表現に従えば $M_p(\Gamma_p)$ となる。

前と同様にして次の結果を得る。

定理 2 E は実可分 Banach 空間、 μ は E' 上の p -stable シリンダー測度とする。このとき位相 $M_p(\mu)$ は E 上の type q ($1 \leq q < p$) のシリンダー測度全体に対する SS-位相になる。

これに関連しては Takahashi([11]) の次の結果がある。

「 E を実可分 Banach 空間とし、 $|\cdot|$ をすべての連続な p -stable シリンダー測度に関して可測な seminorm とする。 E から $E'_{|\cdot|}$ への canonical map は p -summing map になる。」

参考文献

- [1] L. Gross, Measurable functions on Hilbert space, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 372-390.
- [2] L. Gross, Harmonic analysis on Hilbert space, Mem. Amer. Math. Soc. 46 (1963).
- [3] H. H. Kuo, Gaussian measures in Banach spaces, Lecture Notes in Math. 463, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [4] W. Linde, Probability in Banach spaces - Stable and Infinitely Divisible Distributions, Wiley, New York, 1983.

- [5] M. Maeda, Some remarks on the Sazonov topology, Proceedings of the Fourteenth Symposium on Applied Functional Analysis (1995), 82-87.
- [6] D. H. Mouchtari, Certain general questions of the theory of probability measures in linear spaces, Theor. Probab. Appl. 18 (1973), 64-75.
- [7] Y. Okazaki, Harmonic analysis in a Banach space, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 34 (1980), 27-69.
- [8] V. V. Sazonov, On characteristic functionals, Theor. Verojatnost. i Primenen 3 (1958), 201-205.
- [9] L. Schwartz, Cylindrical probabilities and p-summing and p-Radonifying maps, Seminar Schwartz, Notes on Pure Mathematics 7 (1973), 1-64.
- [10] L. Schwartz, Geometry and Probability in Banach Spaces, Lecture Notes in Math. 852, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [11] Y. Takahashi, Some results on Bochner-type theorems, 数理解析研究所講究録 887 「無限次元空間上の測度論、無限次元群の表現および関連した話題」 (1994), 121-140.