

L^p -Theory of Spectral Shift Function and the Wegner Estimate (スペクトルシフト関数の L^p -理論とウェグナー評価)

東京大学数理 中村周 (Shu Nakamura)

この講演で紹介する結果は, J. M. Combes (Toulon 大学・Marseille CNRS), P. D. Hislop (Kentucky 大学) との共同研究である ([CHN] に出版予定). この研究の主目的は, ランダム・シュレディンガー作用素のアンダーソン局在の証明において重要な役割を果たす, IDS(Integrated Density of States, 状態密度) に関するウェグナー評価の新しい証明を開発し, 既知の結果を拡張することにある. 離散的なアンダーソンモデルの場合のウェグナー評価は, 比較的簡単であり十分なものと考えられるが, 連続なモデルに関しては, かなり込み入った証明を用いなければ, 物理的に適切な評価が得られなかった. ここで紹介する研究は, 結果自体は以前知られたものの僅かな拡張にしかすぎないが, 証明は遙かに簡明である. その主要な新しいアイデアは SSF(Spectral Shift Function, スペクトルシフト関数) の L^p -評価の手法である.

§1. 序

今回は, 簡単のためアンダーソン型のランダム・シュレディンガー作用素の場合に限って説明する. 最初に, 我々の考えるモデルと, 主要結果であるウェグナー評価について述べる. 考える作用素は,

$$H^\omega = H_0 + V_\omega \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^d), \quad d \geq 1.$$

ここで, H_0 はシュレディンガー作用素

$$H_0 = (p - a(x))^2 + W(x) \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^d)$$

とする. ただし, ベクトル・ポテンシャル $a(x)$ は C^1 -級で, スカラー・ポテンシャル $W(x)$ は有界とする. すると, H_0 は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的自己共役である. 以下では, H_0 をこの自己共役拡張とする. V_ω は以下では有界と仮定するので, H^ω も同じ定義域で自己共役である. $V_\omega(x)$ はランダム・ポテンシャルで, アンダーソン型, つまり,

$$V_\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \lambda_n(\omega) v(x - n), \quad v \in C_0(\mathbb{R}^d),$$

の形をしていると仮定する. $\lambda_n(\omega)$ は独立同分布の確率変数で, $\omega \in \Omega$ は対応する確率空間の元である. 確率測度を $\mathbb{P}(\cdot)$, 対応する期待値を $\mathbb{E}(\cdot)$ で表す. 局所ポテンシャル $v(x - n) = v_n(x)$ は n ごとに異なっても良いが, 簡単のためすべて同じ $v(x)$ を平行移動したものと仮定する.

[仮定 1] H_0 はスペクトル・ギャップ $[B_-, B_+]$ を持つ. つまり, $[B_-, B_+] \subset \rho(H_0)$ である.

[仮定 2] $v(x) \geq 0$, $v \in C_0(\mathbb{R}^d)$, $v \neq 0$.

[仮定 3] $\lambda_n(\omega)$ の分布はコンパクトな台を持ち絶対連続で、その密度関数を $h_0(E)$ とすると、 h_0 は有界.

$\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ を (超) 立方体とする. Λ の体積を $|\Lambda|$ と書く. このとき,

$$H_\Lambda^\omega = H_0 + \sum_{n \in \Lambda} \lambda_n(\omega) v(x - n)$$

と定義する. H_Λ^ω も自己共役作用素である. この作用素の $[B_-, B_+]$ での固有値に関して, 以下のような評価が成立する.

定理 1. 以上の仮定の下で, $E \in (B_-, B_+)$, $q > 1$ とする. すると, Λ に依存しない定数 $C > 0$ が存在して, 十分小さな $\eta > 0$ に対して,

$$\mathbb{P} \{ \text{dist}(E, \sigma(H_\Lambda^\omega)) < \eta \} \leq C \eta^{1/q} |\Lambda|.$$

[注意] この定理の設定は, 定磁場中の粒子や, 周期的ポテンシャルを $W(x)$ とするときのスペクトル・ギャップの中の評価を意識しているので, 古典的なウェグナー評価とはすこし異なっている. しかし

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} v(x - n) \geq c > 0$$

であるような状況においては, ディリクレ境界条件をおいた $L^2(\Lambda)$ での H^ω の評価として, (任意のエネルギーで) 定理の不等式が証明できる. 定理の評価の右辺の $\eta^{1/q}$ は, 本来は η とできることが望ましいが, 我々の証明ではそこまでは示せない. 一方, 右辺の Λ に関する依存性は, 「正しい」オーダーである. 既知の (連続なモデルに対する) 簡単なウェグナー評価の証明では, 右辺は $|\Lambda|^2$ でしか押さえられない. また, この形の評価から, IDS の Hölder 連続性が導かれる. $\square$

§2. Spectral shift function の L^p -評価

この証明における新しいアイデアは, spectral shift function の L^p -評価である. A, A_0 をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素で $V \equiv A - A_0 \in \mathcal{J}_1$ を満たすものとする. ここで, $\mathcal{J}_\alpha$ は次数 $\alpha > 0$ のトレース・イデアルの空間である. すると, $\xi(\lambda) = \xi(\lambda; A, A_0) \in L^1(\mathbb{R})$ で

$$\text{Tr}(f(A) - f(A_0)) = - \int f'(\lambda) \xi(\lambda) d\lambda, \quad (\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}))$$

を満たすものが存在する. これを SSF(spectral shift function) と呼ぶ (cf. [Y]). 具体的には, SSF は

$$\xi(\lambda; A, A_0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \arg \det(1 + V(A_0 - \lambda - i\varepsilon)^{-1})$$

という公式で構成される. SSF は

$$\|\xi(\cdot; A, A_0)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|V\|_{\mathcal{J}_1}$$

を満たすことが知られている. ここで, 右辺のトレースノルムは, V の singular values を $\{\mu_j(V)\}$ として

$$\|V\|_{\mathcal{J}_\alpha} = \left(\sum \mu_j(V)^\alpha \right)^{1/\alpha}$$

で定義される. 実際, Birman-Klein はこの公式をランク 1 の摂動の場合に示して, その繰り返しを用いて一般の場合の SSF の存在を証明している. 我々のアイデアは, 同様の手続きを L^p -評価について行う, という単純なものである.

まず, Birman-Klein の議論を復習しておこう. ランク 1 の場合から始める. つまり

$$V\varphi = \mu\langle\varphi, u\rangle u, \quad \lambda \in \mathbb{R}, u \in \mathcal{H}, \|u\| = 1,$$

の場合に SSF $\xi(\lambda; A, A_0)$ を考える. すると

$$\int \xi(\lambda; A, A_0) d\lambda = \mu, \quad |\xi(\lambda; A, A_0)| \leq 1 \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad (*)$$

が成立することが知られている (cf. [Y]). 一般に $V \in \mathcal{J}_1$ の場合には

$$V = \sum_j V_j, \quad V_j \varphi = \mu_j \langle \varphi, u \rangle u \quad (\|u\| = 1, j = 1, \dots, \sum |\mu_j| < \infty)$$

と表現すれば,

$$\xi(\lambda; A, A_0) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi(\lambda; A_j, A_{j-1}) \quad (A_j = A_0 + \sum_{k=1}^j V_k)$$

により SSF が構成できる. 無限和の収束は $L^1(\mathbb{R})$ の意味であり, $\xi(\cdot, A, A_0) \in L^1(\mathbb{R})$ である.

さて, (*) は, $\|V\|_{L^1} = \mu, \|V\|_{L^\infty} \leq 1$ を意味する. そこで, Riesz-Thorin の補間定理を用いると (V がランク 1 の摂動の場合は)

$$\|\xi(\cdot; A, A_0)\|_{L^p} \leq \mu^{1/p} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

が成立することが分かる. これを, 上の議論と組み合わせると, $V \in \mathcal{J}_1$, V の singular values を $\{\mu_j\}$ として, もし $\sum \mu_j^{1/p} < \infty$ ならば

$$\|\xi(\cdot; A, A_0)\|_{L^p} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|\xi(\cdot; A_j, A_{j-1})\|_{L^p} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{1/p} < \infty$$

がしたがう. 以上の議論はやや形式的だが, 正当化は簡単にできて, 次の定理が導かれる.

定理 2. もし $q > 1$ に対して $A - A_0 \in \mathcal{J}_{1/q}$ を満たすならば $\xi(\cdot; A, A_0) \in L^q(\mathbb{R})$. さらに,

$$\|\xi\|_{L^q} \leq \|A - A_0\|_{\mathcal{J}_{1/q}}.$$

[注意] この評価は, $q = 1$ の場合は, 上に述べた Birman-Krein による古典的な評価である. 既に, この結果の精密化が B. Simon と D. Hundertmark によって発表されている ([HS]). $\square$

§3. 定理 1 の証明のスケッチ

以下では, $\omega \in \Omega$ はしばしば省略される. 例えば, $H_\Lambda = H_\Lambda^\omega$ と書くことにする. $E_0 \in G \equiv [B_-, B_+]$ とする. $H_\Lambda - H_0$ はコンパクトな台を持ち, 相対コンパクトな摂動なので, G 内の H_Λ の固有値は有限個である. G 内の H_Λ の固有値を $E_1, E_2, \dots$, 固有関数を $\psi_1, \psi_2, \dots$ (有限個) と書く. $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ を, 十分小さな $\eta > 0$ に対して

$$\rho(\lambda) = \begin{cases} 1, & (\lambda \leq -\eta/2), \\ 0, & (\lambda \geq \eta/2). \end{cases} \quad 0 \leq \rho(\lambda) \leq 1 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

を満たす単調非増大関数とする. 区間 I の定義関数を χ_I と書く. すると

$$\chi_{[E_0-\eta/2, E_0+\eta/2]}(\lambda) \leq \rho(\lambda - (E_0 + \eta)) - \rho(\lambda - (E_0 - \eta)) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

なので, スペクトル定理により

$$E_{[E_0-\eta/2, E_0+\eta/2]}(H_\Lambda) \leq \rho(H_\Lambda - (E_0 + \eta)) - \rho(H_\Lambda - (E_0 - \eta))$$

を得る. ここで, スペクトル測度を $E_I(H_\Lambda)$ と書いた. したがって

$$\begin{aligned} & (H_\Lambda \text{ の } [E_0, \eta/2, E_0 + \eta/2] \text{ 内の固有値の個数}) \\ &= \text{Tr}(E_{[E_0-\eta/2, E_0+\eta/2]}(H_\Lambda)) \leq \text{Tr}(\rho(H_\Lambda - E_0 - \eta) - \rho(H_\Lambda - E_0 + \eta)) \end{aligned}$$

を得る. 両辺の期待値を取ると, Chebyshev の不等式により

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\text{dist}(\sigma(H_\Lambda), E_0) < \frac{\eta}{2}\right) &\leq \mathbb{E}(H_\Lambda \text{ の } [E_0, \eta/2, E_0 + \eta/2] \text{ 内の固有値の個数}) \\ &\leq \mathbb{E}(\text{Tr}(\rho(H_\Lambda - E_0 - \eta) - \rho(H_\Lambda - E_0 + \eta))) \end{aligned}$$

がしたがう. そこで, 定理 1 の証明のためには右辺を評価すればよい. 右辺のトレースを次のように変形する.

$$\text{Tr}(\rho(H_\Lambda - E_0 - \eta) - \rho(H_\Lambda - E_0 + \eta)) = - \int_{-\eta}^{\eta} \text{Tr}(\rho'(H_\Lambda - E_0 + \lambda)) d\lambda.$$

右辺の被積分項を書き下すと,

$$\text{Tr}(\rho'(H_\Lambda - E_0 + \lambda)) = \sum_j \langle \rho'(H_\Lambda - E_0 + \lambda) \psi_j, \psi_j \rangle = \sum_j \rho'(E_j - E_0 + \lambda)$$

となる. ここで, Wegner のアイデアにしたがって, エネルギーに関する微分を確率変数 λ_n に関する微分に書き換えることを考える. $V_\Lambda = \sum_{n \in \Lambda} \lambda_n v(x - n)$ を λ_n の関数と考える. すると E_j も λ_n の関数と見なせる. すると,

$$\sum_{n \in \Lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \rho(E_j - E_0 - \lambda) = \rho'(E_j - E_0 - \lambda) \sum_{n \in \Lambda} \frac{\partial E_j}{\partial \lambda_n}. \quad (**)$$

一方, E_j は $H_0 + V_\Lambda$ の固有値なのだから, 固有値の摂動論より

$$\frac{\partial E_j}{\partial \lambda_n} = \left\langle \frac{\partial V_\Lambda}{\partial \lambda_n} \psi_j, \psi_j \right\rangle = \langle v(x - n) \psi_j, \psi_j \rangle.$$

したがって

$$\sum_{n \in \Lambda} \frac{\partial E_j}{\partial \lambda_n} = \left\langle \left(\sum_{n \in \Lambda} v(x - n) \right) \psi_j, \psi_j \right\rangle$$

を得る.

補題 3. $c > 0$ が存在して, 任意の j, Λ に対して

$$\left\langle \left(\sum_{n \in \Lambda} v(x - n) \right) \psi_j, \psi_j \right\rangle \geq c.$$

この補題は, Kirsch-Stollmann-Stoltz [KSS] の方法に従って証明される.
これを用いると, (**) より $(\rho'(\lambda) \leq 0)$ に注意して

$$-\rho'(E_j - E_0 - \lambda) \leq c^{-1} \sum_{n \in \Lambda} \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda_n} \rho(E_j - E_0 - \lambda) \right).$$

が分かる. この両辺の期待値を取り, j について和を取って λ に関し積分すると

$$-\sum_j \int_{-\eta}^{\eta} \mathbb{E}(\rho'(E_j - E_0 - \lambda)) d\lambda \leq c^{-1} \sum_j \sum_{n \in \Lambda} \int_{-\eta}^{\eta} \mathbb{E} \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda_n} \rho(E_j - E_0 - \lambda) \right) d\lambda.$$

を得る. 一方, $\mathbb{E}(\cdot)$ は密度関数 $h(\lambda)$ を用いて $\mathbb{E}(g(\{\lambda_n\})) = \int \cdots \int g(\{\lambda_n\}) \prod_k h(\lambda_k) d\lambda_k$ と書けるので,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda_n} \rho(E_j - E_0 - \lambda) \right) &= \int \cdots \int \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda_n} \rho(E_j - E_0 - \lambda) \right) \prod_k h(\lambda_k) d\lambda_k \\ &\leq \int \cdots \int \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda_n} \rho(E_j - E_0 - \lambda) \right) \left(\prod_{k \neq n} h(\lambda_k) d\lambda_k \right) \|h\|_{L^\infty} d\lambda_k \\ &= \|h\|_{L^\infty} \int \cdots \int \left(\rho(E_j^{m,n} - E_0 - \lambda) - \rho(E_j^{M,n} - E_0 - \lambda) \right) \prod_{k \neq n} h(\lambda_k) d\lambda_k. \end{aligned}$$

ここで, $E_j^{m,n}$ は $\lambda_n = m \equiv \min(\lambda_n)$ とおいた時の, $E_j^{M,n}$ は $\lambda_n = M \equiv \max(\lambda_n)$ とおいた時の H_Λ の j -番目の固有値である. ここで, 対応するシュレディンガー作用素を $H_\Lambda^{m,n}, H_\Lambda^{M,n}$ と書くことにすると,

$$H_\Lambda^{M,n} - H_\Lambda^{m,n} = (M - m)v(x - n) \in C_0(\mathbb{R}^d)$$

である. これに対して (形式的に) SSF の L^p -理論を適用すると

$$\begin{aligned} &\sum_j \left(\rho(E_j^{m,n} - E_0 - \lambda) - \rho(E_j^{M,n} - E_0 - \lambda) \right) \\ &= \text{Tr} \left(\rho(E_j^{m,n} - E_0 - \lambda) - \rho(E_j^{M,n} - E_0 - \lambda) \right) \\ &= - \int \rho'(t - E_0 - \lambda) \xi(t; H_\Lambda^{m,n}, H_\Lambda^{M,n}) dt \\ &\leq \|\rho'\|_{L^{p'}} \|\xi(\cdot; H_\Lambda^{m,n}, H_\Lambda^{M,n})\|_{L^p} \leq C_p \left(\int |\rho'| d\lambda \right)^{1/p'} = C'_p \eta^{-1/p} \end{aligned}$$

を得る. ここで, $1/p + 1/p' = 1$, C_p, C'_p は p にのみ依存する定数であり, $\|\xi(\cdot)\|_{L^p}$ は p と v にのみ依存する. 実際は $H_\Lambda^{M,n} - H_\Lambda^{m,n} \notin \mathcal{J}_p$ であるが, レゾルベントを用いて上記の計算は正当化できる. これより

$$\sum_j \mathbb{E} \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda_n} \rho(E_j - E_0 - \lambda) \right) \leq \|h\|_{L^\infty} C'_p \eta^{-1/p}$$

が導かれる. 以上を組み合わせると

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{dist}(\sigma(H_\Lambda), E_0) < \frac{\eta}{2}) &\leq \mathbb{E}(\text{Tr}(\rho(H_\Lambda - E_0 - \eta) - \rho(H_\Lambda - E_0 + \eta))) \\ &\leq c^{-1} \sum_j \sum_{n \in \Lambda} \int_{-\eta}^{\eta} \mathbb{E} \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda_n} \rho(E_j - E_0 - \lambda) \right) d\lambda \\ &\leq c^{-1} |\Lambda| (2\eta) \cdot \|h\|_{L^\infty} C'_p \eta^{-1/p} = C \eta^{1/p'} |\Lambda| \end{aligned}$$

が得られ, $q = p^{-1}$ とおけば, 定理 1 の不等式がしたがう. □

参考文献

- [CHN] J. M. Combes, P. D. Hislop, S. Nakamura: The L^p -theory of the spectral shift function, the Wegner estimate, and the integrated density of states for some random Schrödinger operators, To appear in Commun. Math. Phys.
- [CL] Carmona, R., Lacroix, J.: SPECTRAL THEORY OF RANDOM SCHRÖDINGER OPERATORS. Birkhäuser 1990.
- [KSS] W. Kirsch, P. Stollmann, and G. Stolz: Localization for random perturbations of periodic Schrödinger operators, Random Operators and Stochastic Equations **6**, 241 – 268 (1998).
- [HS] Hundertmark, D., Simon, B.: An optimal L^p -bound on the Krein spectral shift function, Preprint (Sep 18, 2000): http://www.ma.utexas.edu/mp_arc/ より入手可能.
- [K] Kirsch, W.: Random Schrödinger operators. In SCHRÖDINGER OPERATORS (H. Holden, A. Jensen eds.), Springer Lecture Notes in Physics **345** (1989).
- [Y] Yafaev, D. R.: MATHEMATICAL SCATTERING THEORY: GENERAL THEORY. AMS 1992.