

Laplace 超函数による微分方程式の解法

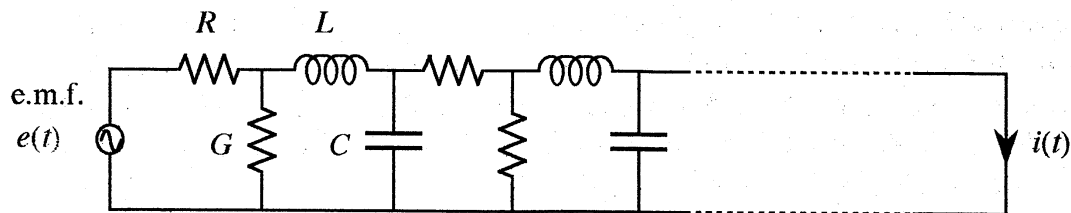
東京大学大学院数理科学研究科 小松彦三郎

1. はじめに

O. Heaviside (1850–1925) はイギリスの電気工学者である。若い頃 電話線の理論を発表し、その頃ようやく始ったばかりの電気通信の理論の基礎を確立した。1855 年には W. Thomson が電信線の理論を発表しており、この理論に基づいて設計された大西洋横断ケーブルが 1866 年成功裡に完成されてから 10 年ばかり後のことである。

遠距離を瞬時に結ぶ電気通信は、この頃最盛期をむかえた大英帝国の発展、維持のために必要不可欠なものとなった。人が偉大であるためには、その時代の問題の少なくとも一つを明確に意識し、それを解かなければならない。W. Thomson はまさしくその人であった。それゆえ、彼はたちまちのうちに時代の寵児となり、Kelvin 卿に叙せられることになる。

ところが、Thomson のケーブルには重大な欠陥があった。これには直流に近い低い周波数の波しか伝わらず、波形が著しく乱れてしまうのである。そのため電話線としてはとうてい使いものにならなかった。ケーブルは



のような回路で近似できる。ここで R は電線の電気抵抗、 C は二つの電線の間の電気容量、 L は電線の自己誘導、 G は二つの電線の間の漏洩コンダクタンス（即ち電気抵抗の逆数）を表わす。Thomson は、 L も G もない理想のケーブルを考え、このとき、電圧 $v(t, x)$ と電流 $i(t, x)$ が共に熱伝導の方程式

$$(1.1) \quad RC \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x)$$

を満たすことを示し、これを J. Fourier の熱の理論（1822 年）の方法で解いた。二本の電線を絶縁して平行に並べたケーブル、あるいは一本の電線を絶縁物で覆い、それを導体で包いたケーブルでは、Thomson の条件

$$(1.2) \quad L = G = 0$$

がよい近似で満たされる。最初の大西洋横断ケーブルもほぼ Thomson の計算通りの特性を示したという。

これに対し, Heaviside は L も G も 0 でないとしてケーブルの理論を作った. このとき, 電圧 v , 電流 i は

$$(1.3) \quad \begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = Gv + C \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases}$$

という方程式を満たす. 従って, これから i 及び v を消去して, v, i 共に

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = \left(R + L \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(G + C \frac{\partial}{\partial t} \right) u(t, x)$$

を満たすことがわかる. (1.4) を電信方程式という. Heaviside はこれを彼独自の方法で解き, 特に無歪条件

$$(1.5) \quad RC = LG$$

が満たされるときには, すべての周波数の波が波形を変えることなく伝送されることを示した.

電信方程式 (1.4) は, Thomson の条件 (1.2) または無歪条件 (1.5) の下では初等函数による解の表示ができる. これ以外の場合には Bessel 函数が必要になる. Heaviside はこのため Bessel 函数自体の研究も行い, 多くの公式を発見した.

Thomson の数学は, いわば, 借りものの数学であったが, Heaviside は彼独自の数学を発明し, Thomson をはるかに超えた結果を得たのである. Thomson を上回る名声を期待したとしても無理はない. ところが, イギリスの正統派からは, ほぼ完全に無視されてしまった. Kelvin 卿の理論のみが, 実証済みの唯一正しい理論と信ぜられ, あやしげな数学を用いて異説を唱える Heaviside は軽く見られてしまったようである.

Heaviside はそのため彼の後半生を, 一方では Thomson 及びその亜流の論文の誤りを指摘した論文を書くことに, 他方では自分の理論を人々に理解してもらうため, 電磁気学の基礎づけから始まる本を書くことに情熱を傾けた. その成果が3巻からなる Electromagnetic Theory (電磁理論) [4]である.

1893年に出版された第1巻(466ページ)では, 電磁気学を集大成した Maxwell の理論(1873年)を, ベクトル解析を用いて今日知られている形に書き直した. Maxwell がベクトル解析を知らなかったというのは言い過ぎであるが, ベクトル解析を今日のものにしたのは Heaviside の貢献である. Maxwell の方程式として知られる電磁気学の4つの基本法則のうち, Faraday の磁電誘導の方程式を今日の形にしたのもこの第1巻である. また, 電磁気学の基本法則が微分方程式であることを見抜いたのは Maxwell であるが, 単位については点電荷間の力を基礎とする旧い考え方にとらわれていたため, 基本法則の中いたるところに単位球面の面積 4π が現われていた. Heaviside は今日の MKSA 単位系に近い有理単位系に替えて, 基本法則から 4π を追放するよう提案した. 以上については, 私の著書 [11] に紹介しておいたので, 詳しくはそちらを参照されたい.

第1巻の最後の三分の一と1899年に出版された第2巻(542ページ)は, ケーブルの理論を含む1次元の電磁気伝播の理論にあてられている. ここで用いられる Heaviside 独自の微分方程式の解法を演算子法という. 第2巻のはじめでは衝撃函数 (impulsive function) の名で Dirac の δ 函数が導入されている. 1912年に発表された第3巻(519ページ)では, これが2次元及び3次元の場合に拡張され, 電磁波発生の機構に及んでいる.

このように Heaviside の主な関心は Maxwell の方程式で代表される定数係数の偏微分方程式を解くことにあった。Heaviside の演算子法は定数係数常微分方程式を解く手段としては今日よく知られており、数多くの教科書が書かれている。しかし、偏微分方程式を解く手段としては、まだ十分な理解が得られていないように思われる。特に、空間次元が2次元または3次元の場合がそうである。今回の講演の目的は、簡単な例についてこのような場合の Heaviside の計算に対し、一つの解釈を与えることにある。

ところで、Heaviside の名誉のために述べるならば、Heaviside の業績は晩年ようやく認められるようになる。1902年にはエンサイクロペディア・ブリタニカの10版で電気通信の項目をまかされて、大英帝国では誰も彼の発見を受入れようとしなかったが、アメリカでは Pupin が、一定距離毎にコイルを挿入し、Heaviside の条件 (1.5) が満たされるようにする実験に成功、従来の距離の5倍まで電話できるようになったと書いている。このようなケーブルを装荷ケーブル (loaded cable) という。Heaviside は heavified cable と名づけたが、この命名も人々に受入れられなかった。装荷ケーブルは1910年頃から1960年頃まで広く電話線に用いられた。

2. 演算子法による常微分方程式の解法

Heaviside の演算子法を説明するため、はじめ常微分方程式

$$(2.1) \quad \begin{cases} \left(a_m \frac{d^m}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \cdots + a_0 \right) u(t) = f(t), & t > 0, \\ u(t) = 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

を考える。ここで、 a_i は定数、 $a_m \neq 0$ とする。Heaviside は

$$(2.2) \quad p = \frac{d}{dt}$$

とおき、(2.1) の解

$$(2.3) \quad u(t) = \frac{1}{a_m p^m + \cdots + a_0} f(t)$$

を次の規約で計算する:

Heaviside の規約

I. 展開公式: $Q(p), R_j(p), S_j(p)$ が p の函数として与えられた演算子であり、

$$(2.4) \quad Q(p) = \sum_j R_j(p) S_j(p)$$

がなりたつならば、

$$(2.5) \quad Q(p)f(t) = \sum_j R_j(p) (S_j(p)f(t)).$$

II. 反復微分及び積分: $k = 1, 2, 3, \dots$ に対し

$$(2.6) \quad p^k f(t) = \frac{d^k f(t)}{dt^k},$$

$$(2.7) \quad p^{-k} f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} f(s) ds .$$

III. 第1移動則：すべての $\alpha \in \mathbf{C}$ に対し

$$(2.8) \quad Q(p)(e^{\alpha t} f(t)) = e^{\alpha t} (Q(p+\alpha) f(t)) .$$

IV. 合成則：

$$(2.9) \quad q(t) = Q(p) 1$$

ならば,

$$(2.10) \quad Q(p) f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t q(t-s) f(s) ds .$$

ここで, 1 は Heaviside の函数

$$(2.11) \quad 1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

を表わす.

これだけ知っていれば, (2.1) は次のようにして解ける. まず, (2.3) の右辺の演算子を

$$\frac{1}{a_m p^m + \cdots + a_0} = \sum_{j,k} \frac{c_{jk}}{(p - \alpha_j)^k}$$

と部分分数に展開し, I を適用するならば,

$$u(t) = \sum_{j,k} \frac{c_{jk}}{(p - \alpha_j)^k} f(t) .$$

II と III によれば,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p - \alpha)^k} 1 &= e^{\alpha t} (p^{-k} e^{-\alpha t} 1) \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha(t-s)} ds . \end{aligned}$$

従って IV より

$$\frac{1}{(p - \alpha)^k} f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha(t-s)} f(s) ds .$$

結局,

$$(2.12) \quad u(t) = \sum_{j,k} c_{jk} \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha_j(t-s)} f(s) ds .$$

これが (2.1) の解であることは容易に確かめられる.

問題は, Heaviside の規約をそのまま無条件に適用すると時に矛盾を生ずることである. 例えば,

$$1 f(t) = p p^{-1} f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(s) ds = f(t) .$$

しかし, これは

$$p^{-1}pf(t) = \int_0^t f'(s)ds = f(s) - f(0)$$

と同じではない.

(2.2) の第 2 式が示すように, Heaviside が求めようとしている解は $t \leq 0$ で 0 と仮定しているから, 右辺 $f(t)$ も $t \leq 0$ で 0 でなければならない. 即ち, 右辺 $f(t)$ の表現にかかわらず, 演算子を施す函数 $f(t)$ は実際は Heaviside 函数 $1(t)$ と $f(t)$ の積 $f(t)1(t)$ を意味するとしなければならない. $1(t)$ では恒等的に 1 を値とする函数とまぎらわしいので, 以下 Heaviside 函数を $\theta(t)$ で表わすことにする. そして, $\theta(t)$ の導函数として衝撃函数, 即ち Dirac の δ 函数を定義することにする:

$$(2.13) \quad \delta(t) = p\theta(t) = \frac{d}{dt}\theta(t).$$

$\theta(t)$ の定義からわかるように, $\delta(t)$ は $t \neq 0$ では恒等的に 0 に等しい“函数”であるが, $t = 0$ では無限大の値をもち, 積分すれば Heaviside 函数にもどるとする:

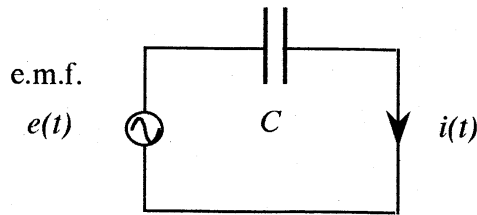
$$(2.14) \quad \theta(t) = p^{-1}\delta(t) = \int_0^t \delta(s)ds.$$

これを用いるならば,

$$\begin{aligned} p^{-1}p(f(t)\theta(t)) &= p^{-1}(f'(t)\theta(t) + f(0)\delta(t)) \\ &= (f(t) - f(0))\theta(t) + f(0)\theta(t) = f(t)\theta(t) \end{aligned}$$

となり上の矛盾は解消する.

Heaviside はもうすこし複雑な方法で衝撃函数 $\delta(t)$ を導入したのであるが, いずれにせよ, 電気回路の理論には $\delta(t)$ はなくてはならないものであることに注意する. 実際, コンデンサー C 一つからなる回路



に $t = 0$ に単位の電池を接続し, $e(t) = \theta(t)$ という起電力を加えたとき流れる電流は $i(t) = C\delta(t)$ で与えられる.

展開公式 (2.4) の右辺が無級数のときは更に問題が残る. $\alpha \in \mathbb{C}$ とする.

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \frac{1}{p-\alpha}1 &= \left(\frac{1}{p} + \frac{\alpha}{p^2} + \frac{\alpha^2}{p^3} + \cdots \right) 1 \\ &= \left(t + \frac{\alpha}{2}t^2 + \frac{\alpha^2}{6}t^3 + \cdots \right) 1 \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)1, & \alpha \neq 0, \\ t1, & \alpha = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

は, 1 を $\theta(t)$ とみなしても, 恒等的に 1 の函数とみなしても, それぞれ初期条件 $u(t) = 0, t \leq 0$, または $u(0) = 0$ を満たす

$$(2.16) \quad \left(\frac{d}{dt} - \alpha \right) u(t) = 1$$

の正しい解となっている. しかし,

$$(2.17) \quad \frac{1}{p - \alpha} 1 = - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{p}{\alpha^2} + \frac{p^2}{\alpha^3} + \cdots \right) 1$$

の右辺を上のような境界条件をもつ (2.15) の解として意味づけすることはできない.

なお, Heaviside の理論を更にわかり難くしているのはあまりに多くの同一視が行われていることである. $Q(p)$ が演算子のとき

$$(2.18) \quad Q(p) = Q(p)1 = Q(p)\theta(t) = q(t) = q(t)1$$

のような同一視はしじゅう行われる. そうすれば (2.15) のような計算でいつも右端に 1 を書く手間がはぶけて便利であるが, $t < 0$ に対する値を考えればたちまち矛盾におちいる.

3. ラプラス変換による正当化

Heaviside は Faraday と同じく大学教育を受けなかった科学者で, 数学は実験科学であると公言し, 上で指摘したような矛盾もあまり気にしなかった. 適用方法さえ正しければ Heaviside の方法は正しい答を与える. このように非数学者が何か新しい数学的方法を発見したとき, 数学者はそんなことは 100 年前からわかっているというのが通例である. 1916 年には T. J. I'A. Bromwich [1] と K. W. Wagner [19], 1926 年には J. R. Carson [2] と P. Lévy [13] が Laplace や Cauchy の仕事を引用しながら, Heaviside の函数 $q(t)$ と演算子 $Q(p)$ の対応 (2.18) が, 変形 Laplace 変換

$$(3.1) \quad Q(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} q(t) dt$$

と Bromwich 積分とよばれる逆変換

$$(3.2) \quad q(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \frac{Q(p)}{p} dp, \quad \text{a.e. } t > 0$$

で与えられることを示して Heaviside の方法を正当化した. 但し, 積分 (3.1) が収束するためには, $t \geq 0$ で定義された函数 $q(t)$ は, H, C を定数とする指数型の条件

$$(3.3) \quad |q(t)| \leq C e^{Ht}, \quad t \geq 0,$$

を満たさなければならない. このとき, (3.2) の積分路としては, $c > H$ を実部とする虚軸と平行な直線をとる.

今日の演算子法の教科書の多くはこの立場をとっている. 代表として [21, 15] を挙げておく. 但し, (3.3) を満たす連続ないしは可測函数 $q(t)$ の変形 Laplace 変換 $Q(p)$ を p の函数として特徴づけることは困難であり, Bromwich 積分を計算してみてもはじめて原像 $q(t)$ が (3.3) を満たす函数であることがわかる. 特に方程式 (2.1) の解法に関しては, 解 $u(t)$ とその導函数 $u'(t), \dots, u^{(m)}(t)$ がすべて (3.3) を満たすことをあらかじめ知っていなければ Heaviside の方法の正当化ができないという理論的難点を生ずる.

また, Heaviside の立場では, 微分作用素 $a_m d^m/dt^m + \cdots + a_0 = a_m p^m + \cdots + a_0$ ももちろん演算子であり, 解は演算子の割算によって得られたのであるが, (3.1) で与えられる積分のみを演算子と定義すると, 微分作用素は演算子でなくなり, 演算子による割算もほとんど不可能になってしまう.

この難点は, (3.3) を満たす函数の導函数として得られる Schwartz 超函数もこめて, Laplace 変換を定義すれば, 克服できる. L. Schwartz [17] と J. S. e Silva [18] はこの立場で演算子法を基礎づけた. 実用上は, これでほぼ十分なのであるが, 指数型条件 (3.3) の制約のため, (2.1) のデータ $f(t)$ が (3.3) を満たさないときこの方法は適用できない.

4. Mikusiński の演算子

1949 年 J. Mikusiński は, $[0, \infty)$ 上の連続函数 $f(t), g(t)$ のたたみこみ

$$(4.1) \quad f * g(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$$

が恒等的に 0 ならば, $f(t)$ または $g(t)$ が恒等的に 0 であるという Titchmarsh の定理 (1924 年) に基づいた全く新しい演算子法の基礎づけを与えた.

この定理は $[0, \infty)$ 上の連続函数全体 $C = C([0, \infty))$ が, 函数の和 $f(t) + g(t)$ とたたみこみ $f * g(t)$ の下で零因子を持たない可換環をなすことを意味する. それ故, 整数環 $\mathbb{Z}$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ に拡張するのと同じ手続きで商を導入し, C を商体 $M = \{f/g; f, g \in C, g \neq 0\}$ に拡張することができる. Mikusiński は M の元を演算子と定義した. この方法による演算子法については Mikusiński [14] または吉田 [22] を見られたい.

この立場では, 函数 $f(t)$ に対する指数型条件 (3.3) は不要であり, 演算子の商も分母が 0 でない限り常に定義できる. しかし, 演算子がいつ函数になるかは, 商としての演算子の表示 f/g からすぐにはわからない. 実際に, 演算子と函数の対応を見つけるには個々の場合に工夫がいる.

もう一つの難点の変数係数常微分方程式及び偏微分方程式が扱い難いことである. 例えば, Mikusiński の演算子列に対して自然な収束概念を定義することはできるが, これは位相に基づく収束にならないから, パラメータをもつ演算子, 即ち Mikusiński 演算子を値とする函数に対して解析を展開することは難しい. それにもかかわらず, Mikusiński [14] は Heaviside の結果をほとんどすべて再現し, 正当化することに成功している.

5. Laplace 超函数

1987 年以来, 私は佐藤超函数を用いたもう一つの基礎づけを与え, 変数係数をもつ常微分方程式及び偏微分方程式の解法にも役立つことを示してきたので, 以下概略を紹介する.

$-\infty < a \leq \infty$ とし, ∞ を含む区間 $[a, \infty]$ に台のある Laplace 超函数の空間 $B_{[a, \infty]}^{\exp}$ を定義するため, まず複素平面 $\mathbb{C}$ の方向別コンパクト化

$$(5.1) \quad \mathbb{O} = \mathbb{C} \cup S^1\infty = \{re^{i\theta}; 0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

を考える. これは複素平面に各方向 $e^{i\theta}$ 毎に 1 点ずつ無限遠点 $e^{i\theta}\infty$ をつけ加えてできる閉円板である. 有限点 $re^{i\theta}$ には $\mathbb{C}$ と同じ基本近傍系を与え, 無限点 $e^{i\theta}\infty$ には, $e^{i\theta}$ 方向を内点にもつ角領域

$$(5.2) \quad \Sigma = \{\rho e^{i\phi}; |\arg(\rho e^{i\phi} - re^{i\theta})| \leq \varepsilon\}$$

を基本近傍系とする位相を導入する. ここで, $0 \leq r < \infty, \varepsilon > 0$ とする.

そして, $\mathcal{O}^{\text{exp}}$ でもって $\mathbf{O}$ 上の指数型整型函数の層を表わす. 即ち, V が $\mathbf{O}$ の開集合であるとき, $\mathcal{O}^{\text{exp}}(V)$ は, $V \cap \mathbf{C}$ 上の整型函数 $F(z)$ であって, V に含まれる (5.2) の形の角領域 Σ に対して定数 C, H があり

$$(5.3) \quad |F(z)| \leq C e^{H|z|}, \quad z \in \mathbf{C} \cap \Sigma,$$

を満たすものの全体を表わす.

定義 1. $[a, \infty]$ に台のある Laplace 超函数の空間をベクトル空間の商空間

$$(5.4) \quad \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}} = \mathcal{O}^{\text{exp}}(\mathbf{O} \setminus [a, \infty]) / \mathcal{O}^{\text{exp}}(\mathbf{O})$$

として定義する.

即ち, Laplace 超函数 $f(x) \in \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}}$ は $\mathbf{C} \setminus [a, \infty)$ で定義された整型函数 $F(z)$ で, 正の実数方向以外の方向では高々指数型の増大度をもつものの同値類であって, $F(z) - G(z)$ が指数型の整函数であるとき同じ類に属するとして定義されるものである.

このとき, $f(x) = [F(z)]$ または

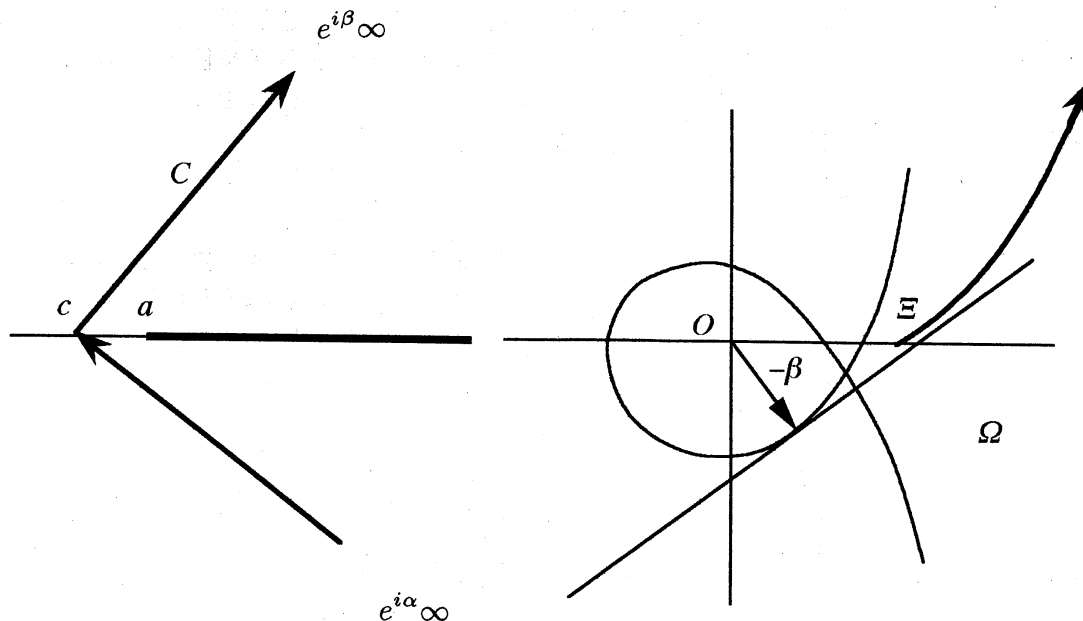
$$(5.5) \quad f(x) = F(x + i0) - F(x - i0)$$

と表わし, Laplace 超函数 $f(x)$ を整型函数 $F(z)$ の上, 下からの境界値 $F(x \pm i0)$ の差と解釈する.

定義 2. (5.5) で与えられる Laplace 超函数 $f(x)$ に対して, その Laplace 変換 $\hat{f}(\xi)$ を

$$(5.6) \quad \hat{f}(\xi) = \int_C e^{-\xi z} F(z) dz$$

で定義する. ここで, C は, $e^{i\alpha}\infty$ から点 $c < a$ までの半直線と c から $e^{i\beta}\infty$ までの半直線からなる積分路とする. 但し, $-\pi/2 < \alpha < 0 < \beta < \pi/2$.



定理 1. $f(x) \in \mathcal{B}_{[a,\infty]}^{\text{exp}}$ の Laplace 変換 $\hat{f}(\xi)$ は, 代表元 $F(z)$ のとり方によらずに定まり, 無限遠半円 $S = \{e^{i\theta}\infty; -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$ の $\mathbf{O}$ での近傍 Ω で定義された $\mathcal{O}^{\text{exp}}(\Omega)$ の元となり

$$(5.7) \quad \varlimsup_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\log |\hat{f}(\rho e^{i\theta})|}{\rho} \leq -a \cos \theta, \quad |\theta| < \pi/2,$$

を満たす. 逆に, このような評価をもつ $\hat{f}(\xi) \in \mathcal{O}^{\text{exp}}(\Omega)$ は唯一つの $f(x) \in \mathcal{B}_{[a,\infty]}^{\text{exp}}$ の Laplace 変換と一致し, $f(x)$ を代表する $F(z) \in \mathcal{O}^{\text{exp}}(\mathbf{O} \setminus [a, \infty])$ の一つは積分

$$(5.8) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Xi}^{\infty} e^{z\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$$

で与えられる. ここで, Ξ は Ω の 1 点かつ積分路は Ω の中の凸曲線とする.

この定理は Cauchy の積分公式と積分路の変形のみで証明できる [7].

$\mathcal{LB}_{[a,\infty]}^{\text{exp}}$ でもって評価 (5.7) を満たす $\hat{f}(\xi) \in \mathcal{O}^{\text{exp}}(\Omega)$ 全体を表わせば, Laplace 変換 $\mathcal{L}$ はベクトル空間としての同型

$$(5.9) \quad \mathcal{L} : \mathcal{B}_{[a,\infty]}^{\text{exp}} \cong \mathcal{LB}_{[a,\infty]}^{\text{exp}}$$

を与える.

$[a, \infty)$ 上の可測函数 $f(x)$ が指数型の評価

$$(5.10) \quad |f(x)| \leq C e^{Hx}, \quad x \geq a,$$

を満たすとき, 普通の意味の Laplace 変換

$$(5.11) \quad \hat{f}(\xi) = \int_a^{\infty} e^{-\xi x} f(x) dx$$

は, 半平面 $\{\text{Re } \xi > H\}$ 上の整型函数であって

$$(5.12) \quad |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C e^{-a \text{Re } \xi}}{\text{Re } \xi - H}$$

を満たすから, 明らかに $\mathcal{LB}_{[a,\infty]}^{\text{exp}}$ に属する. この $f(x)$ と $\hat{f}(\xi)$ の対応も 1 対 1 であるから, (5.10) を満たす可測函数 $f(x)$ は, 自然に $[a, \infty]$ に台のある Laplace 超函数とみなすことができる. 実際, (5.8) で定義される整型函数 $F(z)$ に対して, 次の対称極限が存在し,

$$(5.13) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (F(x + i\varepsilon) - F(x - i\varepsilon)) = \begin{cases} f(x), & \text{a.e. } x \geq a, \\ 0, & x < a, \end{cases}$$

が成立する. このとき, $f(x)$ を Laplace 超函数とみなしたものを $f(x)\theta(x)$ と書く.

同様に, Schwartz [17], S. e Silva [18] が導入した指数型の超函数も Laplace 超函数全体の中に埋め込まれる.

また, 増大度に条件をつけない一般の連続函数 $f(x) \in C([a, \infty))$ もこれを $\mathcal{B}_{[a,\infty]}^{\text{exp}}$ の元に延長することができる. もっと一般に $[a, b)$, $-\infty < a < b \leq \infty$, に台のある佐藤超函数の空間

$$(5.14) \quad \mathcal{B}_{[a,b)} = \mathcal{O}(V \setminus [a, b)) / \mathcal{O}(V)$$

を考える. ここで, $\mathcal{O}$ は整型函数の層, V は $[a, b)$ を閉集合として含む $\mathbb{C}$ の任意の開集合である. 制限写像

$$\mathcal{O}^{\exp}(\mathbb{O} \setminus [a, \infty]) \rightarrow \mathcal{O}(V \setminus [a, b))$$

は自然な写像 $\rho: B_{[a, \infty]}^{\exp} \rightarrow B_{[a, b)}$ をひきおこす. これについて次の定理がなりたつ.

定理 2. この写像 ρ は全射であり, その核は $B_{[b, \infty]}^{\exp}$ と同一視できる. 従って, 自然な同型

$$(5.15) \quad B_{[a, b)} \cong B_{[a, \infty]}^{\exp} / B_{[b, \infty]}^{\exp}$$

がある.

[8] で与えた証明では Mittag-Leffler の論法のみを用いた. これと定理 1 より次の系を得る. 系. Laplace 変換 $\mathcal{L}$ は同型

$$(5.16) \quad \mathcal{L}: B_{[a, b)} \cong \mathcal{L}B_{[a, \infty]}^{\exp} / \mathcal{L}B_{[b, \infty]}^{\exp}$$

を与える.

$[a, b)$ 上の任意の連続函数は $B_{[a, b)}$ に属する佐藤超函数とみなせる. 従って, この系により任意の連続函数 $f(x) \in C([a, b))$ の Laplace 変換が整型函数の類として意味づけられたことになる.

6. たたみこみ

連続函数 $f(x) \in C([a, \infty))$, $g(x) \in C([b, \infty))$ のたたみこみ

$$(6.1) \quad f * g(x) = \int_b^{x-a} f(x-y)g(y)dy$$

は $C([a+b, \infty))$ に属する. f, g が指数型の評価 (5.10) を満たすとき, $f * g$ も指数型の評価をもち

$$(6.2) \quad (f * g)^{\wedge}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

がなりたつ. これは積分の順序交換により直ちに証明できる.

他方, $f(\xi) \in \mathcal{L}B_{[a, \infty]}^{\exp}$, $\hat{g}(\xi) \in \mathcal{L}B_{[b, \infty]}^{\exp}$ のとき, 各点毎の積 $\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$ は明らかに $\mathcal{L}B_{[a+b, \infty]}^{\exp}$ に属する. これを用いて, Laplace 超函数のたたみこみを次のように定義する.

定義 3. $f \in B_{[a, \infty]}^{\exp}$ と $g \in B_{[b, \infty]}^{\exp}$ のたたみこみ $f * g \in B_{[a+b, \infty]}^{\exp}$ を

$$(6.3) \quad (f * g)^{\wedge}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

によって定義する.

これと佐藤超函数の表示 (5.14) を用いれば, たたみこみは $c > 0$ に対して

$$(6.4) \quad B_{[a, a+c)} \times B_{[b, b+c)} \rightarrow B_{[a+b, a+b+c)}$$

という双線形写像をひきおこすことがわかる. これを佐藤超函数に対するたたみこみと定義する.

われわれは, Heaviside の演算子と演算子が作用する“函数”を共に $B_{[0, \infty]}^{\exp}$ に属する Laplace 超函数とみなし, 演算子の作用をたたみこみによって定義する. そして, (6.3) 式を用いて Laplace 像での掛算によってこれを計算する. 方程式の解は整型函数の商によって計算できるが, 結果が $B_{[0, \infty]}^{\exp}$ の Laplace 像になっているかどうかは定理 1 によって容易に判定することができる.

$$(6.5) \quad \delta(x) = \left[\frac{-1}{2\pi i} \frac{1}{z} \right]$$

の Laplace 変換は恒等的に 1 の函数であるから, $\delta(x)$ はたたみこみに対して恒等作用素として作用する.

Heaviside の理論では Heaviside 函数 $1(t)$ が恒等作用素になる. そのため §2 IV の合成則ではたたみこみをとった後 1 回微分しなければならなかった. 函数と演算子の対応で変形 Laplace 変換を用いたのもここに原因がある. 電気回路の理論では Heaviside 函数に対する応答によって他のデータに対する応答を計算するのが便利であるが, 数学としては δ 函数を単位元にとる方が簡単になる.

Laplace 超函数 (5.5) の導函数は代表元の導函数を用いて

$$(6.6) \quad f^{(m)}(x) = [F^{(m)}(z)]$$

と定義する. 特に,

$$(6.7) \quad \delta^{(m)}(x) = \left[\frac{(-1)^{m+1} m!}{2\pi i} \frac{1}{z^{m+1}} \right].$$

Laplace 変換の定義式 (5.6) に $F^{(m)}(z)$ を代入し, m 回 z に関して部分積分をとれば

$$(6.8) \quad (f^{(m)})^\wedge(\xi) = \xi^m \hat{f}(\xi),$$

特に

$$(6.9) \quad (\delta^{(m)})^\wedge(\xi) = \xi^m$$

がなりたつ. 従って,

$$(6.10) \quad f^{(m)}(x) = \delta^{(m)} * f(x).$$

故に, 定数係数微分作用素

$$(6.11) \quad P(d/dx) = a_m d^m/dx^m + \cdots + a_0$$

の作用は $p(x) = P(d/dx)\delta(x)$ とのたたみこみと同じになる.

Laplace 超函数の空間 $\mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\exp}$ の中では不定積分も $\hat{f}(\xi)/\xi$ の逆 Laplace 変換として唯一つに定まる. 特に, δ 函数の不定積分は

$$(6.12) \quad \theta(x) = \left[\frac{-1}{2\pi i} \text{Log}(-z) \right]$$

で定義される Heaviside 函数である. 但し, Log は対数函数の主値を表わす. これを更に m 回不定積分すれば,

$$(6.13) \quad \frac{x_+^m(x)}{m!} = \left[\frac{-z^m}{2\pi i m!} \text{Log}(-z) \right]$$

が得られる.

7. 各点積

指数型の整函数 $m(z) \in \mathcal{O}^{\exp}(\mathbf{O})$ に対して, 1 点 $d \in \mathbf{C}$ を起点とする Laplace 変換を

$$(7.1) \quad \hat{m}_d(\zeta) = \int_d^\infty e^{-\zeta z} m(z) dz$$

で定義する. 但し, 積分路は d を起点とする半直線とする.

Polya [16] はこれが複素平面 $\mathbf{C}$ からある凸コンパクト集合 K を除いたところで整型な函数であり, もとの $m(z)$ が

$$(7.2) \quad m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\zeta z} \hat{m}_d(\zeta) d\zeta$$

と表されることを示した. 但し, Γ は K のまわりを 1 まわりする単一閉曲線である.

定義 4. $m(z) \in \mathcal{O}^{\text{exp}}(\mathbf{O})$, $f(x) = [F(z)] \in \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}}$ に対して, 積 $m(x)f(x)$ を

$$(7.3) \quad m(x)f(x) = [m(z)F(z)]$$

によって定義する.

$\mathcal{O}^{\text{exp}}(\mathbf{O})$ は積に関して閉じているから, これは明らかに代表元のとり方によらない. 特に,

$$(7.4) \quad m(x)\theta(x) = \left[\frac{-1}{2\pi i} m(z) \text{Log}(-z) \right].$$

定理 3. 上と同じ $m(z) \in \mathcal{O}^{\text{exp}}(\mathbf{O})$, $f(x) \in \mathcal{B}_{[a, \infty]}^{\text{exp}}$ に対して

$$(7.5) \quad (mf)^{\sim}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \hat{m}_d(\zeta) \hat{f}(\xi - \zeta) d\zeta.$$

但し, 積分路 Γ は (7.2) と同様にとる.

この右辺を複素的たたみこみとよび, $\hat{m}_d * \hat{f}(\xi)$ と書く.

$$(7.6) \quad (z^n e^{\alpha z})_0^{\sim}(\zeta) = \frac{n!}{(\zeta - \alpha)^{n+1}}$$

に対して (7.5) を適用すれば Cauchy の積分公式により次の第 1 移動則の拡張が得られる:

$$(7.7) \quad (x^n e^{\alpha x} f(x))^{\sim}(\xi) = \left(-\frac{d}{d\xi} \right)^n \hat{f}(\xi - \alpha), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \alpha \in \mathbf{C}.$$

これと対比させるため, 次の第 2 移動則をあげておく:

$$(7.8) \quad \left(\frac{d^n}{dx^n} f(x+c) \right)^{\sim}(\xi) = \xi^n e^{c\xi} \hat{f}(\xi), \quad n = 0, 1, 2, \dots, c \in \mathbf{R}.$$

これは部分積分と変数変換により容易に証明できる.

複素数列 c_n に対して条件

$$(7.9) \quad m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!} \in \mathcal{O}^{\text{exp}}(\mathbf{O}),$$

$$(7.10) \quad \hat{m}_0(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^{-n-1} \in \mathcal{O}(\infty)$$

は同等である. 但し, $\mathcal{O}(\infty)$ は無限遠点 ∞ で整型な函数全体を表わす. これを Borel 対応という.

Heaviside の演算子の変数 p は ζ に対応するから, (2.15) のような展開はうまくいって, (2.17) のような展開は成功しない説明になる.

以上では指数型の整函数 $m(z)$ のみを因子としたが, $[\alpha, \infty]$ を含む角領域で指数型の整型函数も因子となり, 定理 3 はこの場合にも拡張できる [10].

8. 定数係数常微分方程式

これまでの道具立てで (2.1) より一般の初期値問題

$$(8.1) \quad \begin{cases} \left(a_m \frac{d^m}{dx^m} + \cdots + a_0 \right) u(x) = f(x), & 0 \leq x < b, \\ u^{(j)}(0) = g_j, & j = 0, 1, \dots, m-1, \end{cases}$$

を解くことができる. ここで, $f(x)$ は $[0, b)$ 上の連続函数, $g_j \in \mathbb{C}$, とする.

データ $f(x)$, 従って解 $u(x)$ も, $x < 0$ まで延長できる. そのようにして延長した $u(x)$ に対して Green の公式

$$(8.2) \quad \frac{d^j}{dx^j} (u(x)\theta(x)) = u^{(j)}(x)\theta(x) + u^{(j-1)}(0)\delta(x) + \cdots + u(0)\delta^{(j-1)}(x)$$

を適用すれば, 初期値問題 (8.1) はたたみこみ方程式

$$(8.3) \quad (p * (u\theta))(x) = f(x)\theta(x) + (a_m g_{m-1} + \cdots + a_1 g_0)\delta(x) + \cdots + a_m g_0 \delta^{(m-1)}(x)$$

に帰着される. $f\theta$ を定理 2 を用いて $B_{[0, \infty]}^{\exp}$ に延長した上で両辺の Laplace 変換をとると

$$(8.4) \quad \hat{p}(\xi)\hat{u}(\xi) \equiv \hat{f}(\xi) + (a_m g_{m-1} + \cdots + a_1 g_0) + \cdots + a_m g_0 \xi^{m-1} \bmod \mathcal{LB}_{[b, \infty]}^{\exp}.$$

ここで, $\hat{f}, \hat{u}$ はそれぞれ $f\theta, u\theta$ のある延長の Laplace 変換を表わす. また,

$$(8.5) \quad \hat{p}(\xi) = a_m \xi^m + \cdots + a_0.$$

従って,

$$(8.6) \quad u(x) = \int_0^x q(x-y)f(y)dy + (a_m g_{m-1} + \cdots + a_1 g_0)q(x) + \cdots + a_m g_0 q^{(m-1)}(x).$$

ここで

$$(8.7) \quad q(x) = \mathcal{L}^{-1}(\hat{p}(\xi)^{-1})$$

は §2 と本質的に同じ方法で計算できる.

9. 同次超函数と分数次の微分及び積分

これまでに取扱った具体的な Laplace 超函数は

$$(9.1) \quad \delta^{(n)}(x) = \left[\frac{(-1)^{n+1} n!}{2\pi i} \frac{1}{z^{n+1}} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(9.2) \quad \theta(x) = \left[\frac{-1}{2\pi i} \text{Log}(-z) \right],$$

$$(9.3) \quad \frac{x_+^n}{n!} = \frac{x^n \theta(x)}{n!} = \left[\frac{-z^n}{2\pi i n!} \text{Log}(-z) \right], \quad n = 1, 2, \dots,$$

と指数関数を係数とするこれらの一次結合のみであった。これらの超関数の Laplace 変換は

$$(9.4) \quad (\delta^{(n)})^\wedge(\xi) = \xi^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(9.5) \quad \hat{\theta}(\xi) = \xi^{-1},$$

$$(9.6) \quad \left(\frac{x_+^n}{n!}\right)^\wedge(\xi) = \xi^{-n-1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

で与えられる。これは ξ の同次関数になっているが、もともとの超関数も同次関数のみたす Euler の方程式

$$(9.7) \quad \left(x \frac{d}{dx} - \alpha\right) u(x) = 0$$

のそれぞれ $\alpha = -n - 1$ ($n = 0, 1, \dots$); $\alpha = 0$; $\alpha = n$ ($n = 1, 2, \dots$) に対する解となっている。
 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に対しては、

$$(9.8) \quad x_+^\alpha = \left[\frac{i}{2 \sin \pi \alpha} (-z)^\alpha \right]$$

と定義する。 x_+^α は Euler 方程式 (9.7) の解であり、この Laplace 変換は

$$(9.9) \quad (x_+^\alpha)^\wedge(\xi) = \Gamma(\alpha + 1) \xi^{-\alpha-1}$$

となる。この式はガンマ関数の積分公式を α が整数でない一般の場合に拡張したものになっている。(9.9) も ξ の同次関数であるが、(9.7) 式の Laplace 変換

$$(9.10) \quad \left(-\frac{d}{d\xi} \xi - \alpha\right) \hat{u}(\xi) = 0$$

が $-\alpha - 1$ 次の Euler 方程式になることから当然である。

$\alpha \in \mathbb{C}$ に対し、

$$(9.11) \quad \delta^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} \delta^{(\alpha)}(x), & \alpha = 0, 1, 2, \dots, \\ \frac{x_+^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}, & \alpha \neq 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

とおく。このとき

$$(9.12) \quad (\delta^{(\alpha)})^\wedge(\xi) = \xi^\alpha$$

ゆえ、 $\delta^{(\alpha)}(x)$ とのたたみこみは、 α 回微分する、あるいは $-\alpha$ 回不定積分することと解釈される。これを

$$(9.13) \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha f(x) = \delta^{(\alpha)} * f(x)$$

と書く。 $\operatorname{Re} \alpha > 0$ のとき、 $-\alpha$ 次の **Riemann-Liouville 積分** という。通常の積分記号を用いて表わせば

$$(9.14) \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy$$

となる. $\alpha = 1/2$ のときが特に重要で

$$(9.15) \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^{-1/2} f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x-y}} dy$$

と表わされる. これは Abel による等時問題の解決 (1823 年) に用いられた. Heaviside のケーブルの理論にも現われる. Heaviside は Abel の仕事も, Riemann 及び Liouville による拡張も知らなかったようで, (9.15) が $1/2$ 回積分したことになることを説明するのに大変苦勞している.

10. 同伴同次超関数

変数係数常微分方程式と偏微分方程式を解くためには同次超関数だけでは不十分なので, この節では

$$(10.1) \quad \left(x \frac{d}{dx} - \alpha\right)^2 u(x) = 0$$

の解である同伴同次超関数とその Laplace 変換を考える.

まず, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$(10.2) \quad x_+^{-n} = \left[\frac{-1}{2\pi i} z^{-n} \text{Log}(-z) \right]$$

と定義する. これは $x_+^n = x^n \theta$ の定義と似ているが, z^{-n} は原点で整型でないから全く違うものである. $x > 0$ では x^{-n} と等しいが, 同次超関数ではなく Euler 方程式 (9.7) を満たさない. しかし, (10.1) の解であることは容易に確かめられる. この Laplace 変換は

$$(10.3) \quad (x_+^{-n})^\wedge(\xi) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \xi^{n-1} (\log \xi - \psi(n)), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

で与えられる. 但し,

$$(10.4) \quad \psi(n) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

は digamma 函数

$$(10.5) \quad \psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

の n における値である.

次に, $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し

$$(10.6) \quad x^n \log x_+ = \left[\frac{-z^n}{4\pi i} (\text{Log}(-z))^2 \right]$$

とおく. これも Euler 方程式は満たさないが (10.1) を満たす. この Laplace 変換は

$$(10.7) \quad (x^n \log x_+)^\wedge(\xi) = -n! \xi^{-n-1} (\log \xi - \psi(n+1))$$

である.

最後に, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に対して

$$(10.8) \quad x_+^\alpha \log x_+ = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{i}{2 \sin \pi \alpha} (-z)^\alpha \right\} \right]$$

とおく. これも同次ではないが, (10.1) を満たす. この Laplace 変換は形式的に (10.7) と同じ

$$(10.9) \quad (x_+^\alpha \log x_+)^\sim(\xi) = -\Gamma(\alpha+1)\xi^{-\alpha-1}(\log \xi - \psi(\alpha+1))$$

である.

(10.1) の Laplace 超函数解 $u \in \mathcal{B}_{[0,\infty]}^{\text{exp}}$ はすべて同次超函数解 (9.11) と, ここで定義した x_+^{-n} または $x_+^\alpha \log x_+$ の 1 次結合で表わされる. これは u の Laplace 変換が $\xi^{-\alpha-1}$ と $\xi^{-\alpha-1} \log \xi$ の 1 次結合になることから明らかである. 一方, [6] によって, 台が $[0, \infty)$ に含まれる (10.1) の佐藤超函数解 u も 2 次元のベクトル空間をなすことがわかっている. 従って上の解は佐藤超函数解としての基底にもなっている.

11. Laplace 方程式の基本解

n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ における Laplace 方程式の基本解, 即ち

$$(11.1) \quad \Delta k(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) k(x) = \delta(x)$$

の解 $k(x)$ を, 同伴同次超函数を用いて求めよう. 但し, 右辺は n 次元空間における δ 函数であり, $n \geq 2$ とする.

方程式 (11.1) は原点を固定する合同変換, 即ち n 次の直交群の作用に関して不変であるから, 直交群上で平均をとり, 動径 $r = |x|$ のみによる解 $k(r)$ があることがわかる. 以下, 極座標

$$(11.2), \quad x = rs, \quad r \in \mathbf{R}, s \in S^{n-1}$$

を用いて, $k(r)$ が $r \in \mathbf{R}$ 上の台が $r \geq 0$ にある超函数として満たすべき方程式を求めると

$$(11.3) \quad \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{dk}{dr} \right) = \frac{1}{\omega_n} \delta(r)$$

になる. 但し, ω_n は $\mathbf{R}^n$ における単位球面 S^{n-1} の面積 $2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ である.

(11.3) の Laplace 変換をとれば

$$\rho \left(-\frac{d}{d\rho} \right)^{n-1} \hat{\rho} k(\rho) = \frac{1}{\omega_n}.$$

これを解いて

$$(11.4) \quad \hat{k}(\rho) = \frac{(-1)^{n-1}}{\omega_n(n-2)!} \rho^{n-3} \log \rho + c_0 \rho^{-1} + c_1 + \cdots + c_{n-2} \rho^{n-3}$$

を得る. 但し, $c_0, c_1, \dots, c_{n-2}$ は積分定数である.

$n = 2$ のときは, (10.7) により

$$k(r) = \frac{1}{2\pi} \log r_+ + (c_0 + \gamma/2\pi) \theta(r).$$

$n \geq 3$ のときも同様に

$$k(r) = \frac{1}{\omega_n} \frac{-1}{n-2} x_+^{-n+2} + c_0 \theta(r) + \cdots.$$

ここで、第3項以後の和は、台が原点のみにある超関数であって、極座標からもとの座標にもどるとき r^{n-1} を掛けるため消える。まとめて次の公式を得る。

定理 4.

$$(11.5) \quad k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x|_+ + \text{const}, & n = 2, \\ \frac{1}{\omega_n(2-n)} |x|_+^{-n+2} + \text{const}, & n \geq 3. \end{cases}$$

は(11.1)の解であり、直交群の作用により不変なものはこれに限る。

12. Bessel の方程式

便宜上、本来の Bessel 関数 $J_\nu(x)$ の方程式ではなく $x^\nu J_\nu$ の方程式

$$(12.1) \quad x \frac{d^2 u}{dx^2} + (1 - 2\nu) \frac{du}{dx} \pm xu = 0$$

を考える。但し、 $\nu \in \mathbb{C}$ 、複号 $\pm$ で $-$ をとったものは変形 Bessel 関数 $x^\nu I_\nu(x)$ の方程式である。

この方程式の $B_{[0,\infty]}^{\text{exp}}$ 解は Laplace 変換の方法で次のように計算することができる。(12.1) の Laplace 変換は

$$(12.2) \quad \left(-\frac{d}{d\xi} \xi^2 + (1 - 2\nu)\xi \mp \frac{d}{d\xi} \right) \hat{u}(\xi) = 0.$$

従って、この解である

$$(12.3) \quad \hat{u}(\xi) = \text{const} (\xi^2 \pm 1)^{-\nu-1/2}$$

が Laplace 変換となる。 ν が整数+1/2 のときを除き、本来の解であるこの逆 Laplace 変換は初等関数で書き表わすことができない。

$$(12.4) \quad (\xi^2 \pm 1)^{-\nu-1/2} = (1 \pm \xi^{-2})^{-\nu-1/2} \xi^{-2\nu-1}$$

の第1因子は、1 に指数型整関数の原点を起点とする Laplace 変換を加えたものである。従って、解 u は δ 関数とこの整関数に $\theta(x)$ をかけて得られる超関数の和 $\delta(x) + f(x)\theta(x)$ に $(2\nu+1)$ 次の不定積分を行って得られる超関数である。あるいは、 $2\nu \neq -1, -2, \dots$ のときは、ある指数型整関数 $m(z)$ と $x_+^{2\nu}$ の積

$$u(x) = m(x)x_+^{2\nu}$$

として表わせるとして、 $m(z)$ の Taylor 級数を求めればよい。こうして次の定理が得られる。

定理 5. $2\nu \neq -1, -2, -3, \dots$ のとき

$$(12.5) \quad u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mp 1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} x_+^{2\nu}$$

とその定数倍が(12.1)の $B_{[0,\infty]}^{\text{exp}}$ 解である。

$$(12.6) \quad J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

$$(12.7) \quad I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

がそれぞれ ν 次の Bessel 関数および変形 Bessel 関数の定義式であるから、定理 5 と同じ条件の下で van der Pol の公式

$$(12.8) \quad \left(\left(\frac{x_+}{2}\right)^\nu J_\nu(x_+)\right)^\wedge(\xi) = \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(1/2)} (\xi^2+1)^{-\nu-1/2},$$

$$(12.9) \quad \left(\left(\frac{x_+}{2}\right)^\nu I_\nu(x_+)\right)^\wedge(\xi) = \frac{\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(1/2)} (\xi^2-1)^{-\nu-1/2}$$

がなりたつ。

van der Pol [15] と吉田 [23] は $\nu > -1/2$ という条件の下でこの公式を得た。

繁雑をさけるため、以後変形 Bessel 方程式のみを考えることにする。例外の場合として、まず

$$(12.10) \quad \nu = -n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

の場合を考える。このとき、(12.4) の第 2 因子 ξ^{2n-1} は $\delta^{(2n-1)}(x)$ の Laplace 変換であるから、第 1 因子の逆 Laplace 変換である $\delta(x) + f(x)\theta(x)$ とのたたみこみを計算して

$$(12.11) \quad u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k-n+1/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+1/2)} \delta^{(2n-2k-1)}(x) + \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(-n+1/2)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \left(\frac{x_+}{2}\right)^{-2n}$$

を得る。この場合、形式的には

$$(12.12) \quad I_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = I_n(x)$$

がなりたつ。しかし、(12.11) の第 2 項のみを $(x_+/2)^\nu I_\nu(x_+)$ の定数倍としたのでは、(12.1) の解にならず、van der Pol の公式もなりたたない。上の計算により δ 関数及びその導関数を含めた

$$(12.13) \quad \left(\frac{x_+}{2}\right)^{-n} I_{-n}(x_+) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k-n+1/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1/2)} \delta^{(2n-2k-1)}(x) + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x_+}{2}\right)^{2k-2n}$$

が (12.1) の解であり、これに対しては van der Pol の公式 (12.9) が成立する。

他方、この第 2 項も $x > 0$ では $(x/2)^{-n} I_{-n}(x)$ に等しいが、これは

$$(12.14) \quad \left(x \frac{d^2}{dx^2} + (1+2n) \frac{d}{dx} - x\right) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x_+}{2}\right)^{2k-2n} = \frac{2}{\Gamma(n)} \delta(x)$$

を満たす。

(12.13) の第 1 項に現われる δ 関数の導関数 $\delta^{(2n-2k-1)}(x)$ は、 $\nu = -n$ の近傍での $(x_+/2)^\nu I_\nu(x_+)$ の展開に現われる $x_+^{2k+2\nu}/\Gamma(2k+2\nu+1)$ の 2ν を $-2n$ に近づけたときの極限と解釈することができる (Gel'fand-Shilov [3] 参照)。

最後に残った例外の場合である

$$(12.15) \quad \nu = -n - \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

の場合 van der Pol の公式は意味を失う. このときは $(\xi^2 - 1)^{-\nu-1/2} = (\xi^2 - 1)^n$ の逆 Laplace 変換

$$(12.16) \quad u(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} \delta^{(2k)}(x)$$

の定数倍のみが (12.1) の解になる. これらは原点にのみ台をもつ超函数である. この場合, 形式的に

$$(12.17) \quad \left(\frac{x_+}{2}\right)^{-n-1/2} I_{-n-1/2}(x_+) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1/2)} \left(\frac{x_+}{2}\right)^{2k-2n-1}$$

とにおいて定義される Laplace 超函数は

$$(12.18) \quad \begin{aligned} & \left(x \frac{d^2}{dx^2} + (2+2n) \frac{d}{dx} - x \right) \left(\left(\frac{x_+}{2} \right)^{-n-1/2} I_{-n-1/2}(x_+) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{2^{2n-2k+1}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1/2)} \frac{2n-4k+1}{\Gamma(2n-2k+2)} \delta^{(2n-2k+1)}(x) \end{aligned}$$

を満たす.

(12.1) は 2 階の線型常微分方程式であるから, 特異点のない領域 $\{x > 0\}$ ではもう一つ 1 次独立な解がある. それは (12.1) の右辺に 0 にのみ台のある超函数をおいて求めることができる.

便宜上, $-\nu$ を指数とする方程式を考え, $u(x)$ も $u'(x)$ も共に 0 まで連続であるとする. このとき Green の公式 (8.2) によって $u(x)\theta(x)$ は方程式

$$(12.19) \quad x \frac{d^2(u\theta)}{dx^2} + (1+2\nu) \frac{d(u\theta)}{dx} - x(u\theta) = 2\nu u(0)\delta(x)$$

の解である. 従って, $u(x)\theta(x)$ の Laplace 変換 $\hat{u}(\xi)$ は

$$(12.20) \quad (\xi^2 - 1) \frac{d\hat{u}(\xi)}{d\xi^2} + (1 - 2\nu)\xi \hat{u}(\xi) = -2\nu u(0)$$

を満たさなければならない. 右辺を 0 とおいた同次方程式の解が $\text{const}(\xi^2 - 1)^{\nu-1/2}$ であるから, 定数変化法を用いて一般解が

$$(12.21) \quad \hat{u}(\xi) = -2\nu u(0)(\xi^2 - 1)^{\nu-1/2} \int (\xi^2 - 1)^{-\nu-1/2} d\xi$$

として求まる. 特に

$$(12.22) \quad \text{Re } \nu > 0 \quad \text{かつ} \quad u(0) = 1/\Gamma(\nu+1)$$

ならば, 積分 (12.21) は ∞ を始点とするものが収束し,

$$(12.23) \quad \begin{aligned} \hat{u}(\xi) &= \frac{-2}{\Gamma(\nu)} (\xi^2 - 1)^{\nu-1/2} \int_{\infty}^{\xi} (\eta^2 - 1)^{-\nu-1/2} d\eta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(1/2)} \xi^{-2k-1} \end{aligned}$$

が一つの解となる。これは ∞ で 0 となる整型函数であるから、この逆 Laplace 変換は Borel 対応 (7.9) で定まる指数型整函数

$$(12.24) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} I_{\nu}(z)$$

と Heaviside 函数の積として表わされる：

$$(12.25) \quad u(x) = \left(\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} I_{\nu}(x)\right) \theta(x).$$

以上では (12.22) の仮定の下でこの解を導いたが、 $\nu \in \mathbb{C}$ が何であっても (12.25) で定義される Laplace 超函数 $u(x)$ は方程式

$$(12.26) \quad x \frac{d^2 u}{dx^2} + (1+2\nu) \frac{du}{dx} - xu = \frac{2}{\Gamma(\nu)} \delta(x)$$

を満たすことが容易に確かめられる。

この解は発散積分 (12.23) において Hadamard の意味の有限部分をとったもの、即ち、 $\operatorname{Re} \nu > 0$ で定義された積分の ν に関する解析接続、あるいは $(\eta^2 - 1)^{-\nu-1/2}$ の ∞ のまわりの巾級数展開の各項の積分で、発散する項の積分を

$$(12.27) \quad \int_{\infty}^{\xi} \eta^{-2\mu-1} d\eta = \frac{\xi^{-2\mu}}{-2\mu}, \quad \operatorname{Re} \mu \leq 0, \mu \neq 0,$$

と定義して得られるものと一致することに注意する。

こうして、 ν が整数でないとき、 $(x/2)^{\nu} I_{\nu}(x)$ と $(x/2)^{\nu} I_{-\nu}(x)$ が $\{x > 0\}$ における方程式 (12.1) の解の基底をなすことがわかった。 ν が整数の場合を含めてもう一つの 1 次独立な解を求めるため、変形 Bessel 函数の積分表示式をいくつか準備する。

まず、 $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ かつ $|\zeta|$ が十分大ならば

$$(12.28) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(1/2)} \zeta^{-2k-1} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 \frac{(1-\xi^2)^{\nu-1/2}}{\zeta-\xi} d\xi$$

がなりたつことに注意する。これは $(\zeta-\xi)^{-1}$ を ζ^{-1} の巾級数に展開し、項別積分することによって証明される。従って、Polya の公式 (7.2) により

$$(12.29) \quad \begin{aligned} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} I_{\nu}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{z\xi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(1/2)} \zeta^{-2k-1} d\zeta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 e^{z\xi} (1-\xi^2)^{\nu-1/2} d\xi, \quad z \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

がなりたつ。これを **Poisson** の公式 という [20]。 $\operatorname{Re} \nu \leq -1/2$ のときも、(12.29) の発散積分を Hadamard の有限部分と見なすか、あるいは ± 1 に台のある δ 函数及びその微分と $e^{z\xi}$ の積の積分と見なすことにより次の定理が成立する。

定理 6. 任意の $\nu \in \mathbb{C}$ に対し

$$(12.30) \quad \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} I_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{z\xi} (1-\xi^2)_{+}^{\nu-1/2} d\xi, \quad z \in \mathbb{C}.$$

最後に、第 2 種の変形 Bessel 関数 $K_\nu(z)$ を

$$(12.31) \quad K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \pi \nu} = K_{-\nu}(z),$$

及び ν が整数 n のときは、 ν が n に近づくときの極限として定義する。(Heaviside の定義では因子 $\pi/2$ がない。) ν が整数でないとき、 $x > 0$ で $(x/2)^\nu I_\nu(x)$ と $(x/2)^\nu K_\nu(x)$ が (12.1) の 1 次独立な解となることは明らかであるが、同じことは ν が整数の場合にもなりたつ。まず、解の極限として解となることは明らかである。1 次独立であることは、(12.29) と次の積分公式 (12.32) において $z \rightarrow +\infty$ としたときの漸近的な振舞いを比較することによって証明できる。

$\operatorname{Re} \nu > -1/2$ に対してなりたつ

$$(12.32) \quad \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} K_\nu(z) = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu+1/2)} \int_{-\infty}^{-1} e^{z\xi} (\xi^2 - 1)^{\nu-1/2} d\xi, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

を Schläfli の公式 という [20].

両辺共に $\operatorname{Re} z > 0$ での整型函数であるから $z = x > 0$ のとき証明すれば十分である。このとき、van der Pol の公式 (12.9) の逆 Laplace 変換として、 $2\nu \neq 1, 2, 3, \dots$ に対して、

$$(12.33) \quad \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} I_{-\nu}(x) = \frac{\Gamma(-\nu+1/2)}{\Gamma(1/2)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{x\xi} (\xi^2 - 1)^{\nu-1/2} d\xi$$

が成立する。ここで Γ は本来われわれの積分路 (5.8) の差 (または $\operatorname{Re} \nu < 0$ のときは Bromwich の積分路 (3.2)) であるが、これを变形して下半平面を $-\infty$ から 1 まで、そして上半平面を 1 から $-\infty$ まで動く道におきかえることができる。そうすれば、(12.33) の右辺は

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(-\nu+1/2)}{\Gamma(1/2)} \left\{ \frac{e^{-(\nu-1/2)\pi i} - e^{(\nu-1/2)\pi i}}{2\pi i} \int_{-1}^1 e^{x\xi} (1 - \xi^2)^{\nu-1/2} d\xi \right. \\ & \quad \left. + \frac{e^{-(2\nu-1)\pi i} - e^{(2\nu-1)\pi i}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-1} e^{x\xi} (\xi^2 - 1)^{\nu-1/2} d\xi \right\} \end{aligned}$$

に等しい。Poisson の公式 (12.29) によれば、第 1 項は $(x/2)^{-\nu} I_\nu(x)$ に等しい。これから Schläfli の公式 (12.32) は直ちに導かれる。

$\operatorname{Re} \nu \leq -1/2$ に対しても $(\xi^2 - 1)_+^{\nu-1/2} / \Gamma(\nu+1/2)$ を、これまで同様、Hadamard の有限部分あるいは -1 に台のある δ 函数及びその導函数と解釈するならば無条件で次の Schläfli の公式が成立する。

定理 7. 任意の $\nu \in \mathbb{C}$ に対して

$$(12.34) \quad \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} K_\nu(z) = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(\nu+1/2)} \int_{-\infty}^0 e^{x\xi} (\xi^2 - 1)_+^{\nu-1/2} d\xi, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

池田 [5] は Bessel 函数 $(x/2)^\nu J_\nu(x)$ の方程式に対して、上に相当する計算を行って第 2 種 Bessel 函数 $(x/2)^\nu Y_\nu(x)$ を求めた。池田のこの仕事は演算子法に関する日本人の最初の貢献であったと思われる。

Poisson の公式及び Schläfli の公式は、van der Pol の公式と違って、 $(x_+/2)^{-\nu} I_\nu(x_+)$ 及び $(x_+/2)^\nu K_\nu(x_+)$ の Laplace 変換を与える公式ではないことに注意する。§14 で示すように、皮肉なことに van der Pol の公式がそのままでは成立しない $2\nu = -1, -2, -3, \dots$ の場合、 $(x_+/2)^\nu K_\nu(x_+)$ の Laplace 変換を具体的な函数として求めることができる。

13. 発展方程式

Laplace 超函数の理論は Banach 空間に値をもつ Laplace 超函数の場合にそのまま拡張することができる [9]. そこで Banach 空間 E に値をもつ函数 $u(t)$ に対する定数係数常微分方程式

$$(13.1) \quad \begin{cases} \left(\frac{d}{dt} - A\right) u(t) = f(t), \\ u(0) = g_0, \end{cases}$$

$$(13.2) \quad \begin{cases} \left(\frac{d^2}{dt^2} - A\right) u(t) = f(t), \\ u(0) = g_0, \quad u'(0) = g_1 \end{cases}$$

などを Laplace 超函数論を使って解くことができる. ここで, A は Banach 空間 E における閉線形作用素とする.

方程式 (13.1) を解くことは作用素 A を生成作用素とする作用素の半群 $\exp tA$ を構成することと同等である. 同様に, (13.2) を解くことは作用素の正弦函数 $\sin t\sqrt{-A}/\sqrt{-A}$ を構成することである.

§2 および §8 で述べた定数係数常微分方程式の解法を拡張すれば, 次の結果が得られる. 即ち, 佐藤超函数の意味で (13.1) あるいは (13.2) が解けるための必要十分条件は, A のレゾルヴェント $(\tau - A)^{-1}$ あるいは $(\tau^2 - A)^{-1}$ が $\mathbf{O}$ における無限半円周 S の近傍 Ω で存在し, それぞれ, $|\theta| < \pi/2$ に対し

$$(13.3) \quad \overline{\lim}_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\log \|(\rho e^{i\theta} - A)^{-1}\|}{\rho} \leq 0, \quad |\theta| < \pi/2,$$

$$(13.4) \quad \overline{\lim}_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\log \|(\rho^2 e^{2i\theta} - A)^{-1}\|}{\rho} \leq 0, \quad |\theta| < \pi/2,$$

を満たすことである.

このとき E の有界線型作用素を値とする Laplace 超函数 $\exp tA$ および $\sin t\sqrt{-A}/\sqrt{-A}$ を代表する整型函数はそれぞれレゾルヴェントの積分

$$(13.5) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_c^\infty e^{\tau t} (\tau - A)^{-1} d\tau,$$

$$(13.6) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_c^\infty e^{\tau t} (\tau^2 - A)^{-1} d\tau$$

として得られる.

14. Helmholtz 方程式の基本解

上の計算をユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ 上のラプラス作用素 Δ の場合に実行するため, Δ のレゾルヴェントを与える Helmholtz 方程式の基本解, 即ち,

$$(14.1) \quad (\Delta - \kappa^2)G(\kappa, x) = \delta(x)$$

の解 $G(\kappa, x)$ を求める. 但し, $\operatorname{Re} \kappa > 0$ とする.

Banach 空間として $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, 等合同変換が等距離かつ群のパラメータに関し連続に作用するものを考えると, レゾルヴェントの核となる基本解 $G(\kappa, x)$ は $r = |x|$ のみに依存し, かつ $r \rightarrow \infty$ のとき指数的に減少する超函数 $G(r)$ でなければならないことがわかる.

Laplace 方程式の基本解の方程式とのちがいは $-\kappa^2 G$ の項のみであるから, $G(r) \in \mathcal{B}_{[0, \infty]}^{\text{exp}}$ に対する方程式は

$$(14.2) \quad r^{n-2} \left(r \frac{d^2}{dr^2} + (n-1) \frac{d}{dr} - \kappa^2 r \right) G(r) = \frac{1}{\omega_n} \delta(r)$$

である. 括弧の中が $\nu = (2-n)/2$ を指数とする変形 Bessel 函数の方程式とほぼ同じであることに注意する.

$n \geq 2$ とし, まず (14.2) の両辺を r^{n-2} で割る. Laplace 超函数の割算は本質的には定義整型函数の割算で計算できるが, r^{n-2} を掛けて消える原点にのみ台をもつ超函数の不定性が残る. 即ち, $c_0, \dots, c_{n-3}$ を任意定数とする

$$(14.3) \quad \begin{aligned} & \left(r \frac{d^2}{dr^2} + (n-1) \frac{d}{dr} - \kappa^2 r \right) G(r) \\ &= \frac{(-1)^n}{\omega_n (n-2)!} \delta^{(n-2)}(x) + c_{n-3} \delta^{(n-3)}(r) + \dots + c_0 \delta(r) \end{aligned}$$

が割算の結果となる.

ここで, 両辺の Laplace 変換をとり $\hat{G}(\rho)$ を求めるわけであるが, はじめに $n=3$ の場合を考える. このとき, $\hat{G}(\rho)$ の方程式は

$$-\frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \hat{G}(\rho) \right) + 2\rho \hat{G}(\rho) + \kappa^2 \frac{d\hat{G}}{d\rho} = \frac{-1}{4\pi} \rho + c_0$$

である. 即ち,

$$(14.4) \quad \frac{d\hat{G}(\rho)}{d\rho} = \frac{1}{4\pi} \frac{\rho - c'_0}{\rho^2 - \kappa^2}.$$

ここで, Laplace 変換 $\hat{G}(\rho)$ の一番右の特異点の実部は, $G(r)$ の $r \rightarrow \infty$ のときの指数型とほぼ同じであることに注意する. (14.4) の右辺の特異点の位置は $\pm\kappa$ である. $G(r)$ が指数的に減衰するためには $+\kappa$ の特異点は消さなければならない. これは $c'_0 = \kappa$ とすることにより可能であり, このとき

$$(14.5) \quad \hat{G}(\rho) = \frac{1}{4\pi} \log(\rho + \kappa) + C.$$

これから, 第 1 移動則を用いて

$$(14.6) \quad G(r) = -\frac{1}{4\pi} e^{-\kappa r} r_+^{-1} + C' \delta(r)$$

を得る. $\delta(r)$ は極座標から本来の座標にもどるとき消えるから, 求める基本解は

$$(14.7) \quad G_3(\kappa, x) = -\frac{1}{4\pi} e^{-\kappa|x|} |x|_+^{-1}$$

である. これを湯川ポテンシャルという.

$n = 2$ の場合は (14.3) 式の未定定数はなく

$$(14.8) \quad \hat{G}(\rho) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \kappa^2}} \left(\log(\rho + \sqrt{\rho^2 - \kappa^2}) + C \right)$$

が解である。これは一見常に $+\kappa$ に特異点があるように見える。ところが、最後の積分定数 C を $-\log \kappa$ とした

$$(14.9) \quad \begin{aligned} \hat{G}(\rho) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \kappa^2}} \log \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - \kappa^2}}{\kappa} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \kappa^2}} \log \frac{\kappa}{\rho - \sqrt{\rho^2 - \kappa^2}} \end{aligned}$$

では κ が除ける特異点となる。

$n \geq 4$ の場合も、 n が奇数か偶数かで本質的には $n = 3$ および $n = 2$ の場合と同じ計算を行って次の結果を得る：

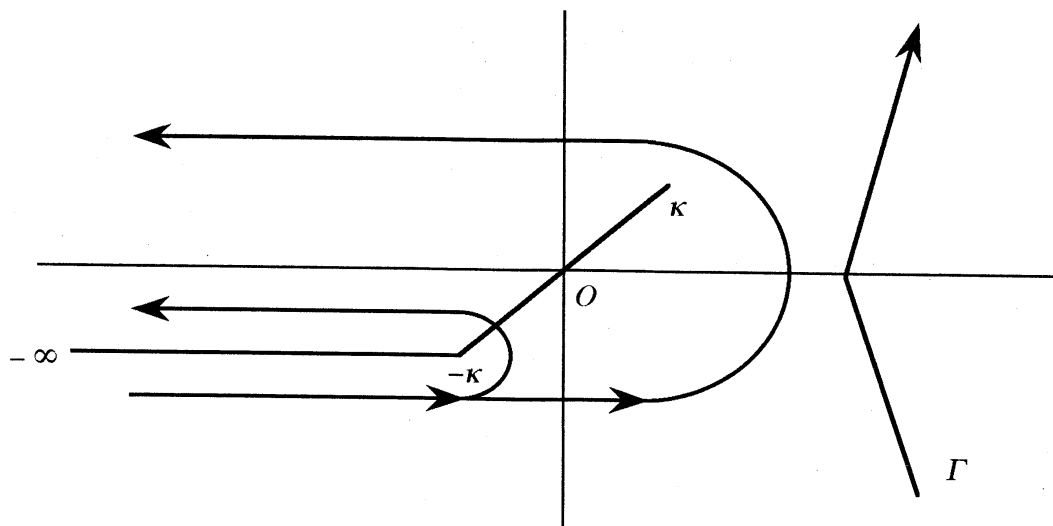
$n = 3, 5, 7, \dots$ ならば

$$(14.10) \quad \hat{G}(\rho) = \frac{1}{\omega_n(n-2)!} (\rho^2 - \kappa^2)^{\frac{n-3}{2}} \log(\rho + \kappa);$$

$n = 2, 4, 6, \dots$ ならば

$$(14.11) \quad \hat{G}(\rho) = \frac{-1}{\omega_n(n-2)!} (\rho^2 - \kappa^2)^{\frac{n-3}{2}} \log \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - \kappa^2}}{\kappa}.$$

この逆 Laplace 変換を求めるため、複素平面 $\mathbb{C}$ に $-\infty$ から $-\kappa$ まで、そして $-\kappa$ から κ までに切れ目をいれてこの函数を一価函数にする。



このとき、逆 Laplace 変換 $G(r)$ は、本来 (5.8) の積分の差として得られるが、これを形式的に Bromwich 流積分路 Γ の上の積分で表わしておく。そして、Schläfli の公式と同様、それぞれの半

直線の積分路を変形して切れ目の下を $-\infty$ から $-\kappa$ まで, そして切れ目の上を $-\kappa$ から $-\infty$ に行く積分路にする. このとき, $\log(\rho + \kappa)$ と $\log(\rho + \sqrt{\rho^2 - \kappa^2})/\kappa$ は共に切れ目で $-2\pi i$ の差をもつ. $(\rho^2 - \kappa^2)^{(n-3)/2}$ は切れ目の上でも一価函数と見なせるが, n が偶数のときは, 積分路が除ける特異点 κ を越すとき符号が変わることに注意する. 従って, $r > 0$ に対して

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{r\rho} \hat{G}(\rho) d\rho \\ &= \frac{-1}{\omega_n(n-2)!} \int_{-\infty}^{-\kappa} e^{r\rho} (\rho^2 - \kappa^2)^{\frac{n-3}{2}} d\rho \\ &= \frac{-\kappa^{n-2}}{\omega_n(n-2)!} \int_{-\infty}^{-1} e^{\kappa r \sigma} (\sigma^2 - 1)^{\frac{n-3}{2}} d\sigma \\ &= \frac{-1}{2\pi} \left(\frac{\kappa}{2\pi r} \right)^{\frac{n-2}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(\kappa r) \end{aligned}$$

を得る. 但し, 最後は Schläfli の公式を用いた. こうして, $n \geq 2$ に対して次の定理が得られた.

定理 8. $\operatorname{Re} \kappa > 0$ のとき, n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ における Helmholtz 方程式の基本解 $G_n(\kappa, x)$ は

$$(14.12) \quad G_n(\kappa, x) = \frac{-1}{2\pi} \left(\frac{\kappa}{2\pi|x|_+} \right)^{\frac{n-2}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(\kappa|x|_+)$$

で与えられる.

E が節のはじめで述べた Banach 空間である場合, これがラプラス作用素 Δ のレゾルベント $(\Delta - \kappa)^{-1}$ の積分核になる.

この定理は $n = 1$ のときも成立することが容易に確かめられる. n が奇数のとき, この基本解は初等函数で表わされ,

$$(14.13) \quad G_1(\kappa, x) = \frac{-1}{2\kappa} e^{-\kappa|x|},$$

$$(14.14) \quad G_3(\kappa, x) = \frac{-1}{4\pi} e^{-\kappa|x|} |x|_+^{-1},$$

$$(14.15) \quad G_5 = \frac{-1}{8\pi^2} e^{-\kappa|x|} (|x|_+^{-3} + \kappa|x|_+^{-2})$$

等となる. 他方, n が偶数であるとき,

$$\begin{aligned} (14.16) \quad G_2(\kappa, x) &= \frac{-1}{2\pi} K_0(\kappa|x|_+) \\ &= \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{\kappa|x|_+}{2} \right) I_0(\kappa|x|) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(k+1)}{k!^2} \left(\frac{\kappa|x|_+}{2} \right)^{2k}, \end{aligned}$$

$$(14.17) \quad G_4(\kappa, x) = \frac{-1}{4\pi^2} \left(\frac{d^2}{d|x|^2} - \kappa^2 \right) K_0(\kappa|x|_+)$$

等はすこぶる面倒な超越函数である.

15. 波動方程式の基本解

5次元までのユークリッド空間での波動方程式

$$(15.1) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) u(t, x) = 0$$

の基本解を §13, 14 の結果を用いて計算しよう. これは $\{t \geq 0\}$ に台のある

$$(15.2) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) R(t, x) = \delta(t)\delta(x)$$

の解 $R(t, x)$ を意味するが, E を $L^p(\mathbf{R}^n)$ 等 §14 の条件を満たす Banach 空間とし, $R(t, x)$ を E での連続線形作用素の空間 $L(E)$ に値をもつ t に関する Laplace 超函数として計算する.

(13.6) によれば, Helmholtz 方程式の基本解 $G(\kappa, x)$ の (-1) 倍の κ を τ とおき, t に関して逆 Laplace 変換すればよい.

$n = 1, 3, 5$ のときは, (14.13), (14.14) および (14.15) により

$$(15.3) \quad \begin{aligned} R_1(t, x) &= \mathcal{L}_t^{-1} \left(\frac{1}{2\tau} e^{-\tau|x|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \theta(t - |x|), \end{aligned}$$

$$(15.4) \quad \begin{aligned} R_3(t, x) &= \mathcal{L}_t^{-1} \left(\frac{1}{4\pi} e^{-\tau|x|} |x|_+^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \delta(t - |x|) |x|_+^{-1} \\ &= \frac{1}{4\pi} \delta(t - |x|) t_+^{-1}, \end{aligned}$$

$$(15.5) \quad \begin{aligned} R_5(t, x) &= \mathcal{L}_t^{-1} \left(\frac{1}{8\pi^2} e^{-\tau|x|} (|x|_+^{-3} + \tau|x|_+^{-2}) \right) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \left(\delta(t - |x|) |x|_+^{-3} + \delta'(t - |x|) |x|_+^{-2} \right) \end{aligned}$$

と簡単に求まる.

$n = 2$ のときも (14.10) により $K_0(\tau|x|_+)$ の t に関する逆 Laplace 変換を計算すればよい. Heaviside はこれを $K_0(\tau, r)$ の展開 (14.16) の各項の逆 Laplace 変換の和として計算したが, ここでは Schläfli の公式

$$(15.6) \quad \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-1} e^{\kappa r \mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - 1}}, \quad r > 0,$$

と

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\tau t} e^{\tau r \mu} d\tau = \delta(t + r\mu)$$

を用い, 積分の順序を交換して

$$\begin{aligned} R_2(t, x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\tau t} \frac{1}{2\pi} K_0(\tau|x|) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-1} \delta(t + |x|\mu) \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\theta(t)}{|x|((t/|x|)^2 - 1)_+^{1/2}}. \end{aligned}$$

われわれの積分は全部絶対収束したからこの順序交換は許される。結局

$$(15.7) \quad R_2(t, x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\theta(t)}{(t^2 - |x|^2)_+^{1/2}}$$

が求める基本解となる。4次元の場合は, (14.17) により

$$(15.8) \quad \begin{aligned} R_4(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial |x|^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) R_2(t, x) \\ &= \frac{-1}{4\pi^2} \frac{\theta(t)}{(t^2 - |x|^2)_+^{3/2}}. \end{aligned}$$

真空中の Maxwell の方程式は電磁場ポテンシャル (φ, A_1, A_2, A_3) の成分に関する波動方程式に帰着される [12] から, 基本解 (15.4), (15.7) を用いて Maxwell の方程式の初期値問題を解くことができる。

16. 熱方程式の基本解

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ での熱方程式

$$(16.1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) u(t, x) = 0$$

の基本解 $W(t, x)$ も同様の方法で計算できる。この場合の基本解は, $t \geq 0$ に台にある

$$(16.2) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) W(t, x) = \delta(t)\delta(x)$$

の解というだけでなく, §13 の条件を満たす Banach 空間 E での発展方程式 (13.1) において A をラプラス作用素 Δ としたときの解を生成する作用素の半群 $T(t)$ の積分核になる。

(13.5) により, $T(t)$ は $(\tau - \Delta)^{-1}$ の逆 Laplace 変換である。従って, 1次元の場合

$$(16.3) \quad \begin{aligned} W_1(t, x) &= \mathcal{L}_t^{-1} \left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}} e^{-\sqrt{\tau}|x|} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{t\tau} \frac{1}{2\sqrt{\tau}} e^{-\tau|x|} d\tau \\ &= \frac{e^{-|x|^2/4t}}{\sqrt{t}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{(\sqrt{t}\tau - |x|/2\sqrt{t})^2} d\sqrt{t}\tau \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t_+}} e^{-|x|^2/4t_+}. \end{aligned}$$

これから

$$(16.4) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_t^{-1}(e^{-\sqrt{\tau}r}) &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(e^{-r^2/4t} / \sqrt{\pi t_+} \right) \\ &= \frac{r}{2\sqrt{\pi t_+^3}} e^{-r^2/4t_+} \end{aligned}$$

がわかる。それ故

$$\begin{aligned}
 W_3(t, x) &= \frac{1}{4\pi|x|_+} \mathcal{L}_t^{-1} \left(e^{-\sqrt{\tau}|x|} \right) \\
 (16.5) \qquad &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t_+})^3} e^{-|x|^2/4t_+}.
 \end{aligned}$$

2次元の場合は, r を $\mu|x|$ におきかえた (16.4) を

$$W_2(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-1} \mathcal{L}_t^{-1} \left(e^{-\sqrt{\tau}\mu|x|} \right) \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - 1}}$$

に代入して

$$(16.6) \qquad W_2(t, x) = \frac{1}{4\pi t_+} e^{-|x|^2/4t_+}$$

を得る。一般の次元の公式

$$(16.7) \qquad W_n(t, x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t_+})^n} e^{-|x|^2/4t_+}$$

は, (14.10) または (14.11) からわかるように (16.5) または (16.6) に $\partial^2/\partial|x|^2 - \partial/\partial t$ を $(n-3)/2$ または $(n-2)/2$ 回施して, $\omega_3/(\omega_n(n-2)!)$ または $\omega_2/(\omega_n(n-2)!)$ を掛けることによって得られる。この際に生ずる原点に台のある超関数は, 極座標から Descartes 座標にもどるとき因子 $|x|^{n-1}$ を掛けるため 0 になる。

17. ケーブルの理論

Heaviside [4], Carson [2] らによって建設されたケーブルの理論は次の通りである。時刻を t , 発信側から測ったケーブル上の位置を x とし, (t, x) における電圧, 電流をそれぞれ $v(t, x)$, $i(t, x)$ とする。ケーブル上の区間 $(x, x + \Delta x)$ がはじめの図の 1 ブロックであるとする

$$\begin{cases} v + \Delta v = v - R\Delta x i - L\Delta x \frac{\partial i}{\partial t} \\ i - \Delta i = i + G\Delta x v + C\Delta x \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases}$$

という関係が成り立つから, $\Delta x \rightarrow 0$ とする極限をとって (1.3) 式が成立する。これから, i または v を消去した式はいずれも電信方程式 (1.4) となる。従って, 受信端の位置を l とするとき, 電圧に関して解くべき方程式は

$$(17.1) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left(L \frac{\partial}{\partial t} + R \right) \left(C \frac{\partial}{\partial t} + G \right) v,$$

$$(17.2) \qquad v(t, 0) = e(t),$$

$$(17.3) \qquad v(t, l) = 0,$$

$$(17.4) \qquad v(t, x) = 0, \quad t < 0,$$

である.

Thomson ケーブルでは $L = G = 0$ が成立するとするから, (17.1) は熱方程式

$$(17.5) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = CR \frac{\partial v}{\partial t}$$

になる. このとき, $v(t, x)$ の t に関する Laplace 変換 $\hat{v}(\tau, x)$ が満たすべき方程式は

$$(17.6) \quad \frac{\partial^2 \hat{v}(\tau, x)}{\partial x^2} = CR \tau \hat{v}(\tau, x)$$

である. $\alpha = \sqrt{CR}$ とおいて, これを解くと

$$(17.7) \quad \hat{v}(\tau, x) = A(\tau)e^{-\alpha x\sqrt{\tau}} + B(\tau)e^{\alpha x\sqrt{\tau}}.$$

このとき, 境界条件 (17.2), (17.3) は

$$(17.8) \quad \begin{cases} A(\tau) + B(\tau) = \hat{e}(\tau), \\ A(\tau)e^{-\alpha l\sqrt{\tau}} + B(\tau)e^{\alpha l\sqrt{\tau}} = 0. \end{cases}$$

になる. 以上により

$$(17.9) \quad \begin{aligned} \hat{v}(\tau, x) &= \frac{e^{-\alpha x\sqrt{\tau}} - e^{-\alpha(2l-x)\sqrt{\tau}}}{1 - e^{-2\alpha l\sqrt{\tau}}} \hat{e}(\tau) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha(2nl+x)\sqrt{\tau}} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha(2nl-x)\sqrt{\tau}} \right) \hat{e}(\tau). \end{aligned}$$

$$(17.10) \quad \mathcal{L}_t^{-1} \left(e^{-r\sqrt{\tau}} \right) = \frac{r}{2\sqrt{\pi t_+}} e^{-r^2/4t}$$

であったから,

$$(17.11) \quad \begin{aligned} v(t, x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(2nl+x)}{\sqrt{s^3}} e^{-\alpha^2(2nl+x)^2/4s} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(2nl-x)}{\sqrt{s^3}} e^{-\alpha^2(2nl-x)^2/4s} \right) e(t-s) ds. \end{aligned}$$

$n = 0$ の項以外の項は反射波を表わし, $l \rightarrow \infty$ の極限では 0 に収束する. 従って, 十分長いケーブルでは

$$(17.12) \quad v(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\sqrt{CR}x}{\sqrt{s^3}} e^{-CRx^2/4s} e(t-s) ds$$

が良い近似で解を表わす. 特に, $e(t) = e_0\theta(t)$ のとき,

$$(17.13) \quad v(t, x) = \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{CR}{t}} \right) \right) e_0,$$

ここで,

$$(17.14) \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy.$$

これらの式は Thomson ケーブルの伝送特性がほぼ $l\sqrt{CR}$ で定まることを示している. C, R はそれぞれ単位長さ当りの電気容量及び電気抵抗であるから, $l\sqrt{CR}$ はケーブル全体の電気容量と電気抵抗の積の平方根である. 100 ヘルツ程度の信号を伝えるにはこの値が 0.1 以下でなければならない. 直径 1mm の銅線を用い, 二つの導線の距離を 10cm としたとき, ケーブルの全長がおよそ 300km でこの限界に達することになる.

$LC \neq 0$ の条件の下では

$$(17.15) \quad \frac{\partial^2 \hat{v}(\tau, x)}{\partial x^2} = (L\tau + R)(C\tau + G) \hat{v}(\tau, x)$$

を解いて

$$(17.16) \quad \hat{v}(\tau, x) = A(\tau)e^{-\gamma(\tau)x} + B(\tau)e^{\gamma(\tau)x}$$

を得る. ここで,

$$(17.17) \quad \begin{aligned} \gamma(\tau) &= \sqrt{(L\tau + R)(C\tau + G)} \\ &= \sqrt{LC} \sqrt{(\tau + \rho)^2 - \sigma^2}. \end{aligned}$$

但し,

$$(17.18) \quad \rho = \frac{RC + LG}{2LC},$$

$$(17.19) \quad \sigma = \frac{RC - LG}{2LC}.$$

ケーブルが十分に長くて, 反射波の影響が小さいときは $B(\tau) = 0$ としてよい. このとき, 境界条件 (17.2) により

$$(17.20) \quad A(\tau) = \hat{e}(\tau).$$

Heaviside の無歪条件 (1.5) は $\sigma = 0$ と同等である. この条件が満たされるとき, 第 2 移動則により

$$(17.21) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_t^{-1}(e^{-\gamma(\tau)x}) &= \mathcal{L}_t^{-1}\left(e^{-\sqrt{LC}x(\tau+\rho)}\right) \\ &= e^{-\sqrt{LC}\rho x} \delta(t - \sqrt{LC}x) \\ &= e^{-\sqrt{RG}x} \delta(t - \sqrt{LC}x). \end{aligned}$$

従って, 解は起電力 $e(t)$ とのたたみこみ

$$(17.22) \quad v(t, x) = e^{-\sqrt{RG}x} e(t - \sqrt{LC}x).$$

として得られる. 第 1 因子により距離 x の指数函数として減衰するが, 波形は変らない.

無歪条件 (1.5) が成り立たないときは, $a = \sqrt{LC}x$ とおき,

$$(17.23) \quad \mathcal{L}_t^{-1} \left(e^{-a\sqrt{\tau^2 - \sigma^2}} \right) = \delta(t - a) + \frac{a\sigma}{\sqrt{(t^2 - a^2)_+}} I_1 \left(\sigma \sqrt{(t^2 - a^2)_+} \right) \theta(t)$$

を用いる. ここで τ を $\tau + \rho$ におきかえなければならないから第 1 移動則により減衰因子が加わり, 最終的に解の表示

$$(17.24) \quad \begin{aligned} v(t, x) = & e^{-\rho\sqrt{LC}x} e(t - \sqrt{LC}x) \\ & + \int_0^{t-\sqrt{LC}x} \frac{e^{-\rho(t-s)} \sqrt{LC}\sigma x}{\sqrt{(t-s)^2 - LCx^2}} I_1 \left(\sigma \sqrt{(t-s)^2 - LCx^2} \right) e(s) ds \end{aligned}$$

が得られる.

(17.23) の証明は, Heaviside [4] の第 2 巻以来, 演算子法の論者の腕の見せ所なのであるが, 長くなるのでここでは省略する.

参 考 文 献

- [1] T.J.P.A. Bromwich, Normal coordinates in dynamical systems, Proc. London Math. Soc., **15** (1916), 401-448.
- [2] J.R. Carson, The Heaviside operational calculus, Bull. Amer. Math. Soc., **32** (1926), 43-68.
- [3] I.M. Gelfand and G.E. Shilov, Generalized Functions, vol. I, Academic Press, New York-London, 1964.
- [4] O. Heaviside, Electromagnetic Theory, vols. I, II, III, The Electrician, London, 1893, 1899, 1912.
- [5] Y. Ikeda, Anwendung der Operatorengleichung auf die lineare Differentialgleichung, Tôhoku Math. J., **37** (1933), 202-208.
- [6] H. Komatsu, On the index of ordinary differential operators, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, **18** (1971), 379-398.
- [7] H. Komatsu, Laplace transforms of hyperfunctions - A new foundation of the Heaviside calculus, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, **34** (1987), 805-820.
- [8] H. Komatsu, Operational calculus, hyperfunctions and ultradistributions, "Algebraic Analysis," Vol. 1, Academic Press, 1988, pp. 357-372.
- [9] H. Komatsu, Operational calculus and semi-groups of operators, Lecture Notes in Math., **1540** (1993), 213-234.
- [10] H. Komatsu, Multipliers for Laplace hyperfunctions - A justification of Heaviside's rules, Proc. Steklov Math. Inst., **203** (1994), 323-333.
- [11] 小松彦三郎, ベクトル解析と多様体 I, 岩波講座応用数学, 岩波, 1994.
- [12] 小松彦三郎, ベクトル解析と多様体 II, 岩波講座応用数学, 岩波, 1995.
- [13] P. Lévy, Le calcul symbolique d'Heaviside, Bull. Sci. Math., (2) **50** (1926), 174-192.
- [14] J. Mikusiński, Operational Calculus, Pergamon Press, 1959, 2nd Ed., 1983.

- [15] B. van der Pol and H. Bremmer, Operational Calculus Based on the Two-sided Laplace Integral, Cambridge Univ. Press, 1950, 2nd Ed., 1955.
- [16] G. Pólya, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Z., **29** (1929), 549–640.
- [17] L. Schwartz, Transformation de Laplace des distributions, Medd. Lunds Math. Sem. Suppl., (1952), 196–206.
- [18] J. Sebastião e Silva, Les fonctions analytiques comme ultradistributions dans le calcul opérationnel, Math. Ann., **136** (1958), 58–96.
- [19] K.W. Wagner, Über eine Formel von Heaviside zur Berechnung von Einschaltvorgängen (Mit Anwendungsbeispielen.), Archiv für Elektrotechnik, **4** (1916), 159–193.
- [20] G.N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1922.
- [21] 山田直平–国枝寿博, ラプラス変換・演算子法, コロナ社, 東京, 1959.
- [22] 吉田耕作, 演算子法 一つの超函数論, 東京大学出版会, 1982.
- [23] K. Yosida, The algebraic derivative and Laplace's differential equation, Proc. Japan Acad. Ser. A, **59** (1983), 1–4.