

ある種の双曲型 Cauchy 問題の解の特異性について

筑波大数学系 若林誠一郎 (Seiichiro Wakabayashi)

1. 序 双曲型方程式の解の特異性を記述する手段として、Hamilton flow (null bicharacteristic flow) が重要な役割を果たしてきたが、特性根が滑らかでないとき、Hamilton flow をもはや定義することとできない。一般の双曲型方程式の解の特異性を記述するために、Hamilton flow を一般化・拡張する必要がある。ここでは、Hamilton flow の定義を拡張して、 C^∞ のカテゴリーである種の仮定の下に (包括的な場合を含む)、この一般化された Hamilton flow を用いて、解の波面集合が上から評価されることをしめす (定理 1 参)。また、Gevrey クラス (特性根の重複度に依存して異なる) において、係数が実解析的であると仮定して、Gevrey クラスでの解の特異性が一般化された Hamilton flow によって評価されることをしめす (定理 2 参、講演における予想が正しいことをしめす)。

2. "flow" の定義および結果 $P(x, \xi)$ を C^∞ 係数をもつ $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ の m 次多項式とし.

$P(x, \xi) = \sum_{j=1}^m P_j(x, \xi)$, $P_j(x, \xi)$: j 次斉次多項式
 とかく。ここで、 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi \overset{\text{dual}}{\longleftrightarrow} x$ である。次の Cauchy 問題を考えよう:

$$(CP) \quad \begin{cases} P(x, D) u(x) = f(x) \\ \text{supp } u \subset \{x_1 \geq 0\} \end{cases}$$

ここで、 $f \in \mathcal{D}'$, $\text{supp } f \subset \{x_1 \geq 0\}$ である。また、 C^∞ を法とした Cauchy 問題

$$(CP)' \quad \begin{cases} P(x, D) u(x) \equiv f(x) \pmod{C^\infty} \\ \text{sing supp } u \subset \{x_1 \geq 0\} \end{cases}$$

を考えよう。ここで、 $f \in \mathcal{D}'$, $\text{sing supp } f \subset \{x_1 \geq 0\}$ である。まず、

(A-1) $P_m(x, \xi)$ は各 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $\eta = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ に関して、双曲型多項式である。すなわち、

$P_m(x, \xi - i\tau\eta) \neq 0$ for $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$
 を仮定する。

"flow" の定義 $z = (x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n$ に対して、

$$P_m(z + s\delta z) = s^\mu (P_{m,z}(\delta z) + o(1)) \quad \text{as } s \rightarrow 0$$

$$P_{m,z}(\delta z) \neq 0 \quad \text{in } \delta z \in T_z(T^*\mathbb{R}^n)$$

によつて、 z における P_m の localization $P_{m,z}(\delta z)$ を定義する。

Atiyah-Bott-Gårding [1] の定義の一般化。

Lemma 1 $P_m(z)$ は δz の μ 次斉次多項式で、 $(0, \nu) \in \mathbb{R}^{2n}$ に関して双曲型多項式である。

証明は、Ivrii-Petrov [10], Hörmander [6], Bronshtein [2] より明らかであろう。故に、 $z \in T^*\mathbb{R}^n$ に対して、

$$\Gamma_z \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(P_m(z), (0, \nu)) \subset T_z(T^*\mathbb{R}^n)$$

が定義できる。ここで、

$\Gamma(P_m(z), (0, \nu)) = \{ \delta z; P_m(z)(\delta z) \neq 0 \}$ の $(0, \nu)$ を含む連結成分である。

$$\Gamma_z^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{ \delta z \in T_z(T^*\mathbb{R}^n); \sigma(\delta z, \delta z') \geq 0 \text{ for } \forall \delta z' \in \Gamma_z \}$$

とおく。ここで、 $\sigma(\delta z, \delta z') = \delta x \cdot \delta \xi' - \delta x' \cdot \delta \xi$, $\delta z = (\delta x, \delta \xi)$, $\delta z' = (\delta x', \delta \xi')$ である。

$$K_z^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \{ z(t) \in T^*\mathbb{R}^n; \{ z(t) \} \text{ は Lipschitz 連続な曲線で、}$$

$$\frac{d}{dt} z(t) \in \Gamma_{z(t)}^\sigma \text{ (a.e. } t), z(0) = z, \pm t \geq 0 \}$$

により、"flow" を定義する。ここで、 $A_z \subseteq \{ \delta z; P_m(z)(\delta z) = 0 \}$

において、 $K_z^\pm$ の定義における $\Gamma_{z(t)}^\sigma$ を $\Gamma_{z(t)}^\sigma \cap A_{z(t)}$ で置きかえても同じものを定義する。

$K_z^\pm$ の性質 (i) $P_m(z) \neq 0$ ならば、 $K_z^\pm = \{ z \}$ である ($\because$

$$P_m(z)(\delta z) \equiv P_m(z) \text{ より } \Gamma_z^\sigma = \{ 0 \}) .$$

(ii) $z \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ ならば、 $K_z^\pm \subset T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ であり、 $z = (x, 0)$

ならば、 $K_{(x,0)}^\pm = K_x^\pm \times \{ 0 \}$ とかける ($\because P_{m(x,0)}(\delta x, \delta \xi) = P_m(x, \delta \xi)$)

より, $\Gamma_{(x,0)}^\sigma = \Gamma(P_m(x, \cdot), \nu)_{\lambda}^{(x|0)}$ となる. ここで,

$$\Gamma^* = \{ \delta x; \delta x \cdot \delta \xi \geq 0 \text{ for } \forall \delta \xi \in \Gamma \}$$

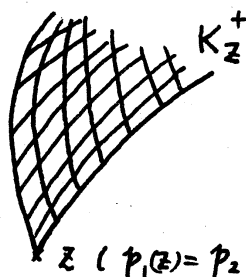
である). $K_x^\pm$ は解の台 (support) を記述するものと考えられる (狭義双曲型作用素に対しては, Duistermaat [4] 参).

(iii) P_m が狭義双曲型 のとき,

$$K_z^\pm = \{ z \text{ から } \pm x_1 \text{ が増加する方向に } P_m \text{ の零特性帯} \\ \text{ かつ } z \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0, P_m(z) = 0 \}$$

(iv) P_m が重複度一定 のとき, P_m に対する $K_z^\pm$ は P_m よりつくられる狭義双曲型多項式に対する $K_z^\pm$ と一致する.

(v) $P_2(z) = p_1(z)p_2(z)$, $\{p_1, p_2\} = ap_1 + bp_2$ (p_1, p_2 は z について 1 次正斉次) のとき, 包合的すなわち, $H_{p_1}, H_{p_2}(\sum \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j})$

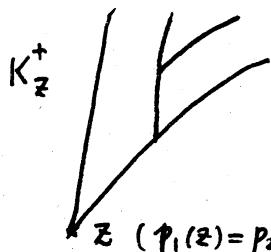


が一次独立であると仮定すれば左図のようになる。そこから出る p_1 の零特性帯上

$p_2 = 0$ より, p_1 の零特性帯上の各点から p_2 の零特性帯がでて, それらの

broken bichar. の全体が K_z^+ である (2次元曲面に含まれる). 一次独立性を仮定しないときは, 上のようなものの射影であって, p_1, p_2 の零特性帯が一点になる場合も許せば, 上のよう記述される.

(vi) $P_2(z) = p_1(z)p_2(z)$, $\{p_1, p_2\} \neq 0$ のとき, z が $p_1(z) = p_2(z) = 0$ を満たすならば, z からでる p_1 の零特性帯と p_2 の零特性帯の



和集合が z の近傍で K_z^+ と一致する。 p_1 の零特性帯 $p_2(z)$ が零になる点があれば、そこから出る p_2 の零特性帯も K_z^+ に含まれる。すなわち、 K_z^+ は z から出る broken null bichar. の x_1 が増加する方向のもの全体である。

ば、そこから出る p_2 の零特性帯も K_z^+ に含まれる。すなわち、 K_z^+ は z から出る broken null bichar. の x_1 が増加する方向のもの全体である。

(vii) $P_m(x, \xi) \equiv P_m(\xi)$ (定係数) のとき、

$$K_{(x, \xi)}^{\pm} = (\{x\} \pm \Gamma(P_{m, \xi}, \nu)^*) \times \{\xi\}$$

である。

C^∞ のカテゴリで解の特異性を考えるときには、次の仮定をおく：

(A-2) 任意の $(x^0, \xi^0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ に対して、斉次正準変換 $\chi: \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ ($\tilde{\Gamma}: (0, \eta^0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ の錐近傍, $\Gamma: (x^0, \xi^0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ の錐近傍) が存在して、

$$P_m \circ \chi(y, \eta) = e(y, \eta) p(\eta), \quad (y, \eta) \in \tilde{\Gamma}$$

$$e(y, \eta) \neq 0 \quad \text{in } \tilde{\Gamma}$$

となる。ここで、 $p(\eta)$ は (斉次) 多項式である。

仮定(A-2)より、 χ, χ^{-1} にそれぞれ対応する Fourier 積分作用素 F_1, F_2 が存在して (F_1, F_2 はそれぞれ $(0, \eta^0), (x^0, \xi^0)$ で elliptic)。

$$'F_2 P F_1 \text{ のシンボル}' = p(\eta) - g(y, \eta)$$

in a conic nbd of $(0, \eta^0)$ (with "at $(0, \eta^0)$ " とかく)

ここで、 $p(\eta)$ が主シンボルになるように F_1, F_2 がとられている。

(A-3) (Levi 条件) 各 $(x^0, \xi^0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ に対して、今定義された $p(\eta)$, $g(\eta, \eta)$ は、

$$|g(\eta, \eta)| \leq C |p(\eta - i\tilde{\eta})| \quad \text{at } (0, \eta^0), \quad |\eta| \geq C_0$$

をみたす。ここで、 $\tilde{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial \xi}(x^0, \xi^0) \neq 0$ (となる)、 $\chi^{-1}(x, \xi) = (y(x, \xi), \eta(x, \xi))$ である。

(A-3) は

$$|g(\eta, \eta)| \leq C \tilde{p}(\eta) \quad \text{at } (0, \eta^0)$$

に同値である(仮定 (A-1) の下で)。ここで、 $\tilde{p}(\eta) = \left(\sum_{\alpha} \left| \frac{\partial p}{\partial \eta_{\alpha}}(\eta) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ である。

(A-4) 各 $z \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ に対して、 $K_z^+ \cap \{x_1 \geq 0\}$ はコンパクトである。

定理 1 (A-1) - (A-4) の仮定の下で、 u が $(CP)'$ の解ならば、

$WF(u) \subset \{z; z \in K_z^+, \text{ for some } z' \in WF(f)\} \equiv \text{supp. } WF(f)$ である。

注意 (A-2) は非常にきつい仮定であるが、包合的である場合および主部が定係数である場合にはみえされる。一般には (A-3) は χ の選ぶ方に依存する条件だが、Levi 条件の自然な拡張になっている(定理 3, 4 参)。

* によって $\Gamma(k)$ または $\{k\}$ を表わすことにする ($1 < k < \infty$)。 $\mathcal{D}^*$ によってコンパクトな台をもつ Gevrey 族を、 $\mathcal{D}^{*'}$ によって ultradistribution の空間を表わすことにする (Komatsu [11] 参)。 $WF_*(f)$ によって超局所的に f が $\mathcal{D}^*$ (or $\mathcal{E}^*$) に属さない $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ の閉部分集合を表わすことにする (例えば, Wakabayashi [18] 参)

定理 2 $P(x, \xi)$ の係数が実解析的であつ、仮定 (A-1)

および 仮定

(A-4)' 各 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $K_x^- \cap \{x_1 \geq 0\}$ がコンパクトである。

が満たされているとする。 $P_m(x, \xi, \xi') = 0$ の ξ についての根の重複度が高々 r (≥ 2) であるとする。 そのとき、 $1 < k < \frac{r}{r-1}$ に対して、 $f \in \mathcal{D}^{*'}$ ならば、 (CP) の解 u に対して、

$$WF_*(u) \subset \emptyset \cup WF_*(f)$$

が成立する。

注意 Gevrey クラスでの適切性は、 Ivrii [8], Bronshtein [3], Trepreau [17] によって示されている。 定理 2 においては、 $P_m(x, \xi)$ の係数が実解析的であることを仮定すればよく、低階の係数について実解析的であると仮定する必要はない。 また、特性根が滑らかならば、 $P_m(x, \xi)$ の係数が実解析的である必要はない。

系 定理2の仮定の下で、

$\text{supp } u \subset \{x \in \mathbb{R}^n; x \in K_y^+ \text{ for some } y \in \text{supp } f\}$
である。

注意 $P(x, \xi)$ の係数が実解析的である必要はないが、そのときは、定理2の証明と同じようにして証明する必要がある。

3. 定理1に対する注意および例 狭義双曲型作用素 (real principal type) に対しては、Hörmander [7] によって定理1が示めされた。重複度一定の場合には Chazarain, 包合的な場合は (例1参), 森本, Lascar, Nolas (特に Nolas) によって示めされた ([20], [14], [12], [16])。non-involutive に対しては, Ivrii, Hange, Melrose によって定理1は証明された ([9], [5], [13])。その他多くの研究があり、結果としては定理1をそれぞれの場合に証明したことになるように思われる。

定理1の仮定 (A-3) は、簡単な場合には、斉次正準変換 χ の選ぶ方に依存しないことがわかる。

定理3 P_m の特性根の重複度が高々2であるとする。そのとき

$$(A-3) \text{ at } (x^0, \xi^0) \iff \left| \frac{P_{m-1}'(x, \xi)}{P_m(x, \xi - i0)} \right| \leq C \text{ at } (x^0, \xi^0)$$

ここでも、

$$P'_{m-1}(x, \xi) = P_{m-1}(x, \xi) + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j} P_m(x, \xi) \quad (\text{subprincipal symbol})$$

である。

定理 4 $(x^0, \xi^0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ とし、

$$P_m(x, \xi) = e(x, \xi) \prod_{j=1}^s (\xi_j - \lambda_j(x, \xi'))^{\nu_j} \quad \text{at } (x^0, \xi^0)$$

なる形であるとする。ここで、 $\lambda_j(x, \xi') \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}))$,

$e(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ かつ、 $e(x^0, \xi^0) \neq 0$ である。また

に、 $p_j = \xi_j - \lambda_j(x, \xi')$ とおいて、 $\{p_j, p_k\} = 0$ ($j, k = 1, \dots, s$)

かつ $H_{p_1}, \dots, H_{p_s}$, $\sum \xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}$ が 1 次独立であると仮定する(

すなわち、包合的であると仮定する)。そのとき、

$$(A-3) \text{ at } (x^0, \xi^0)$$

$\iff$

$$P(x, D) = e(x, D) p_1(x, D)^{\nu_1} \dots p_s(x, D)^{\nu_s}$$

$$+ \sum_{\mu < \nu} a_\mu(x, D) p_1(x, D)^{\mu_1} \dots p_s(x, D)^{\mu_s} \quad \text{at } (x^0, \xi^0)$$

である。ここで、 $a_\mu(x, D) \in L^{m-r}$ かつ、 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s)$,

$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_s)$, $\nu_1 + \dots + \nu_s = r$ である。

定理 5 $w = (w_1, \dots, w_l)$ とし、 $(n+l)$ 変数の偏微分作用素 $\tilde{P}(x, w, D_x, D_w)$ が存在して、

$$\tilde{P}(x, w, D_x, D_w) u(x) = P(x, D_x) u(x) \quad (\forall u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$$

(i.e. $\tilde{P}(x, w, \xi, 0) = P(x, \xi)$ for $\forall x, \forall w, \forall \xi$) かつ、 $\tilde{P}$ が

(A-1) - (A-4) を満たすならば、定理 1 が成立する。

例 1 (Nosmas [16])

$$P(x, D) = p_1(x, D)^{\nu_1} \cdots p_s(x, D)^{\nu_s} \\ + \sum_{\mu < \nu} a_\mu(x, D) p_1(x, D)^{\mu_1} \cdots p_s(x, D)^{\mu_s}, \quad a_\mu(x, D) \in L^0$$

$$p_j(x, \xi) \sim \xi_1 - \lambda_j(x, \xi'), \quad \lambda_j(x, \xi') \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}))$$

$\lambda_j(x, \xi')$ は ξ' について 1 次斉次

$$\{p_j, p_k\} = a_{jk} p_j + b_{jk} p_k$$

a_{jk}, b_{jk} は $\xi' \neq 0$ に対して滑らか

ならば、定理 1 が成立する。実際 ρ を適当につくって定理 5 が適用できる。

例 2 $n=3$.

$$P(x, \xi) = \xi_1^3 + 3\xi_1^2\xi_3 - 3x_2^2(\xi_2^2 + \xi_3^2)(\xi_1 + \xi_3) + a(x)\xi_1^2 \\ + x_2^2(b(x)\xi_2^2 + c(x)\xi_3^2) + d(x)\xi_1\xi_3 + x_2(e(x)\xi_1\xi_2 + f(x)\xi_2\xi_3)$$

に対して定理 5 が適用できる。 $\xi_1^0 = x_2^0 = \xi_3^0 = 0$ なる (x^0, ξ^0)

に対して、特性根は 3 重根となる (滑らかでない)。そのとき、

$$\bigcup_{\lambda > 0} K_{(x^0, \lambda \xi^0)}^+ = \{(x, \xi); 0 \leq x_3 - x_3^0 \leq 3(x_1 - x_1^0), \\ x_2 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = \lambda \xi_2^0, \xi_3 = 0 \text{ and } \lambda > 0\}$$

である (conical refraction)。

定理 1 の証明については、Wakabayashi [19] を参照されたい。

4. 定理 2 に対する注意

定理6 $P(x, \xi)$ の係数が実解析的でかつ, (A-1), (A-4)' を満たすとする。 (CP) が C^∞ 適切ならば,

$$WF(u) \subset \mathcal{C} \circ WF(f)$$

が成立する。

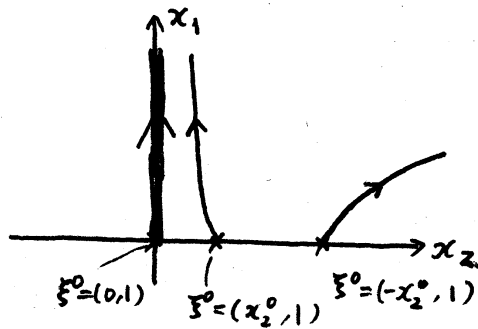
注意 特 κ , Nishitani [15] において2階2変数双曲型偏微分作用素(係数は実解析的)に対する Cauchy問題が C^∞ 適切であるための必要十分条件が与えられているので, 定理6より, 実解析的係数をもつ2階2変数双曲型偏微分作用素に対する C^∞ 適切な Cauchy問題の解の波面集合は, ほぼ完全に評価されたことになる。

例 $m=2, n=2$ とする。

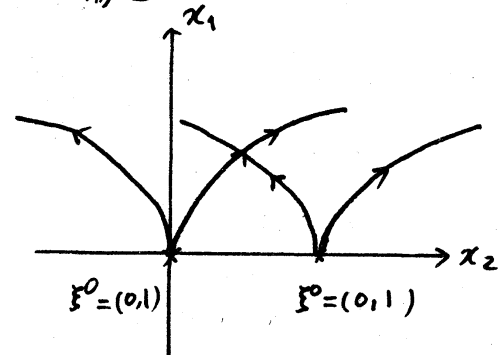
$$P_m(x, \xi) = \begin{cases} \xi_1^2 - x_2^2 \xi_2^2 & \text{--- (i)} \\ \xi_1^2 - x_1^2 \xi_2^2 & \text{--- (ii)} \\ \xi_1^2 - (x_1^2 + x_2^2) \xi_2^2 & \text{--- (iii)} \end{cases}$$

として, $P(x, \xi)$ を Cauchy問題が C^∞ 適切となるよう選ぶ (Nishitani [15] の条件を満たすように低階を定める)。そのとき, $x_1=0$ 上の真よりである解の波面集合を評価する $K_{(0, x_2^0, \xi_0)}^+$ は, 図のようになる (C^∞ 適切を仮定しているので, 解の波面集合が $K_{\frac{1}{2}}^+$ によって評価できる)。

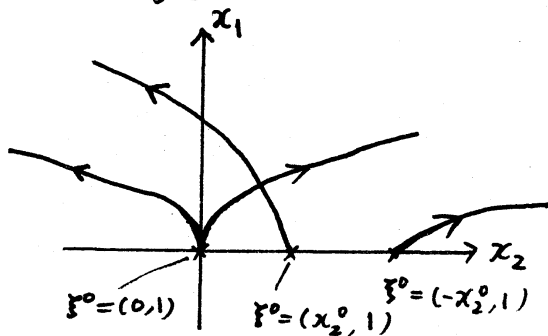
(i) の場合



(ii) の場合



(iii) の場合



(i) の場合には、定理 1 (定理 5) を適用してもよい。(ii) の場合は、non-involutive の場合で、Ivni, Hanges, Melrose でも扱っている。

定理 2 の証明は、Bronshstein [3] の方法・評価と Wakabayashi [19] における方法を組み合わせることによってなされる。次の Lemma を証明するために、定理 2 において係数が実解析的であると仮定した。

Lemma 2 任意のコンパクト集合 $M \subset \Gamma_{\mathbb{R}^2}$ に対して、 $\mathbb{R}^2$ の近傍 U が存在して

$$z' \in U \Rightarrow M \subset \Gamma_{z'}$$

が成立する (inner semi-continuity)。

この Lemma より、 $K_{\mathbb{R}^2}^{\pm}$ が近似的に構成されることがしめせ、定理 2 を証明するためには、次をしめせばよいことになる。

$z^0 \in T^*R^n \setminus 0$, $M \subset \Gamma_{z^0}$: コンパクト, $U \supset U'$: z^0
 の近傍で, $\forall z \in U$ に対して $M \subset \Gamma_z$ をみたすとする.
 ☆ $\text{supp } f \subset U'$ かつ $WF_*(f) \cap (\{z^0\} - M^\sigma) = \emptyset$ なる
 $f \in \mathcal{D}'$ に対して, $P(x, D)u = f$, $\text{supp } u \subset \{x, z\}$
 $z^0 \in WF_*(u)$ ならば, $z \in U' \cap (\{z^0\} - M^\sigma)$ が存在
 して, $z \in WF_*(u)$ かつ $z \neq z^0$ をみたす.

☆ は, 逐次近似によつて解 u を構成して, Bronshtein の評価
 を用いて, 解 u の表現における積分路を変更して証明される.

REFERENCES

- [1] M. F. Atiyah, R. Bott and Gårding, Acta Math. 124 (1970), 109-189.
- [2] M. D. Bronshtein, Sib. Mat. Zh. 20 (1979), 493-501.
- [3] _____, Trudy Moskov. Mat. Obšč. 41 (1980), 83-99.
- [4] J. D. Duistermaat, Courant Institute Lecture Notes, New York 1974.
- [5] H. Hanges, Indiana Univ. Math. J. 28 (1979), 89-97.
- [6] L. Hörmander, J. Analyse Math. 32 (1977), 118-196.
- [7] _____, Enseignement Math. 17 (1971), 99-163.
- [8] V. Ja. Ivrii, Mat. Sb. 96 (1975), 390-413.
- [9] _____, Functional Anal. Appl. 10 (1976), 141-142.
- [10] V. Ja. Ivrii and V. M. Petkov, Uspehi Mat. Nauk. 29 (1974), 3-70.
- [11] H. Komatsu, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 20 (1973), 25-105.
- [12] R. Lascar, Springer Lecture Notes in Math. 856 (1981).
- [13] R. B. Melrose, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 939-940.
- [14] Y. Morimoto, Comm. in P. D. E. 4 (1979), 609-643.
- [15] T. Nishitani, A necessary and sufficient condition for the hyperbolicity
 of second order equations with two independent variables, to appear.
- [16] J. C. Nolasco, Comm. in P. D. E. 5 (1980), 1-22.
- [17] J. M. Trepreau, Comm. in P. D. E. 4 (1979), 339-387.

- [18] S. Wakabayashi, Japanese J. Math. 6 (1980), 179-228.
- [19] _____, Singularities of solutions of the Cauchy problems for operators with nearly constant coefficient hyperbolic principal part, to appear in Comm. in P. D. E.
- [20] J. Chazarain, Ann. Inst. Fourier Grenoble 24 (1974), 173-202.