

language における words の permutation
について

静大 エ 大 芝 猛

§ 1 序

language $A \subseteq \Sigma^*$ に対し $\rho(A)$ は A の中の words の文字を permute することによって得られるすべての words の集合とする。

一般に、 A が context-free language であっても $\rho(A)$ は context-free とは限らない。以下では $\rho(A)$ が context-free になるための A に関する 1 つの代数的十分条件を与え、その応用として Ginsburg の 1 つの open problem の解答を与える。またこの十分条件は A が「1 次独立な periods の集合をもつ linear set に対応する bounded set $(\leq a_1^* \dots a_n^*)$ 」の場合には必要十分条件となる。

定義と記号

- $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, n 個の相異なる文字の集合

- $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, 自然数の集合
- $u, v \in \Sigma^*$ に対し $u \equiv v \Leftrightarrow \#_x(u) = \#_x(v) \text{ for all } x \in \Sigma$
但し $\#_x(w) = w$ の中の文字 x の個数
- $w \in \Sigma^*$ に対し $\rho(w) = \{u \mid u \equiv w, u \in \Sigma^*\}$
 $A \subseteq \Sigma^*$ に対し $\rho(A) = \bigcup_{w \in A} \rho(w)$
- $A, B \subseteq \Sigma^*$ に対し $A \equiv B \Leftrightarrow \rho(A) = \rho(B)$
- $f_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}$ は N^n から $a_1^* \dots a_n^*$ の上への次のような
1:1 写像

$$f_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}([k_1, \dots, k_n]) = a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}; [k_1, \dots, k_n] \in N^n$$

$$f_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}(L) = \{f_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}(\varphi) \mid \varphi \in L\}; L \subseteq N^n$$

- また $\psi_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}$ は Σ^* から N^n への次のような写像

$$\psi_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}(w) = [\#_{a_1}(w), \dots, \#_{a_n}(w)]; w \in \Sigma^*$$

$$\psi_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}(A) = \{\psi_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}(w) \mid w \in A\}; A \subseteq \Sigma^*$$

- $\tau \in N^n, \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subseteq N^n$ に対し

$$L(\tau; \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}) = \{\tau + \alpha_1 \alpha_1 + \dots + \alpha_r \alpha_r \mid \alpha_1, \dots, \alpha_r \in N\} \text{ とし}$$

また $V[\alpha_1, \dots, \alpha_r] = \{\alpha_1 \alpha_1 + \dots + \alpha_r \alpha_r \mid \alpha_1, \dots, \alpha_r \in N\}$ も用いる。

Proposition

- (1) $A, B \subseteq \Sigma^* \Rightarrow \rho(A \cup B) = \rho(A) \cup \rho(B), \rho(AB) = \rho(BA)$
- (2) $U, V \subseteq N^n \Rightarrow \rho(f_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}(U+V)) = \rho(f_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}(U) \cdot f_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}(V))$
- (3) $V \subseteq N^n \Rightarrow \rho(f_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}(V)) \cap a_{i_1}^* \dots a_{i_n}^* = f_{\langle a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \rangle}(V(\overset{1 \dots n}{i_1 \dots i_n}))$
但し $[x_1, \dots, x_n](\overset{1 \dots n}{i_1 \dots i_n}) = [x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$ (置換)

§ 2 $\mathcal{P}(A)$ が Context-free になるための条件.

[Proposition] $A, B \subseteq \Sigma^*$ に対し.

(1) $\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)$ context-free $\Rightarrow \mathcal{P}(A \cup B)$ context-free

(2) $\mathcal{P}(A)$ context-free, $\mathcal{P}(B)$ regular
(regular) $\Rightarrow \mathcal{P}(AB)$ context-free
(regular)

(3)^(*) $\mathcal{P}(A)$ context-free, $\mathcal{C}(A) \Rightarrow \mathcal{P}(A^*)$ context-free

但し $\mathcal{C}(A) \Leftrightarrow$

$$\forall w \in \mathcal{P}(A^* - A) \exists u, v, y (w = u y v, uv \in \mathcal{P}(A^*), y \in \mathcal{P}(A^*) \\ |uv| \neq 0, |y| \neq 0)$$

さて, 「 $A \subseteq a_1^* \cdots a_n^*$ に対し

(*) 1 $\mathcal{P}(A)$ context-free $\Rightarrow A$ context-free

は $A = \mathcal{P}(A) \cap a_1^* \cdots a_n^*$ から明らかである。このとき
bounded context-free language の characterization
から

(*) 2 $\psi_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}(A) = \bigcup_{i=1}^m L(\tau_i; P_i)$

各 $P_i = \{\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ir_i}\}$ は 1 次独立 か stratified
とかける。但し

(定義) $P = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subseteq N^n$ が stratified とは

「(1) 各ベクトル α_i は高々 2 つの座標を除いて 0.

(*) Maurer (1969)

(2) nonzero座標を2つ持つ任意の2つのベクトル $\in \mathbb{P}$

$$\alpha_i = [0, \dots, 0, x_k, 0, \dots, 0, x_l, 0, \dots, 0], \alpha_j = [0, \dots, 0, y_{k'}, 0, \dots, 0, y_{l'}, 0, \dots, 0]$$

に対しては 決して $k < k' < l < l'$ とおらずまた

$$k' < k < l' < l \quad \text{とまらない。}$$

ことをいう。

一方 (*) の逆は一般に成立しない。例えば

$$(*)3) \quad A_1 = f_{\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle} L([0, 0, 0, 0], \{[1, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0]\}) \subseteq a_1^* \dots a_4^*$$

は periods の stratified set である。Context-free であるが $\rho(A_1)$ は context-free ではない。

($\therefore$) $\rho(A_1)$ context-free ならば

$$A_2 = \rho(A_1) \cap a_1^* a_2^* \underline{a_4^* a_3^*} \text{ は context-free である。}$$

$$\text{一方 } A_2 = f_{\langle a_1, a_2, a_4, a_3 \rangle} L([0, 0, 0, 0], \{[1, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 1]\})$$

の periods の集合は stratified でなく、 A_2 は Context-free ではない。(矛盾。)

(*) の逆が成立するためには A の periods の集合に対する条件が stratified だけでは不足であり、これに次の

pairwise connected なる条件を付すると $\rho(A)$ は

Context-free となる。

(定義) $\mathbb{P} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq N^*$ が pairwise connected とは

「nonzero座標を2つ以上持つ $\mathbb{P}$ の任意の2つのベクトル

α_i, α_j は少なくとも1つの座標番号において共に nonzero

要素をもつ。」

[定理 1] $A \equiv f_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle} L(\tau; P)$, $\tau \in N^n$, $P \subseteq N^n$ 1 次独立ならば

$\rho(A)$ context-free $\Leftrightarrow P$ stratified かつ pairwise connected.

この定理を用いるならば更に一般に $\rho(A)$ が context-free なる十分条件として

[定理 2] $A \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}^*$ に対し

「 $\psi_{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}(A) = \bigcup_{i=1}^m L(\tau_i; P_i)$, 各 P_i は stratified かつ pairwise connected」 $\Rightarrow \rho(A)$ は context-free.

という。

更に $P \subseteq N^3$ のときは必ず P は pairwise connected となるので、次の系をうる。

[系] $A \subseteq a^* b^* c^*$ に対して

$\rho(A)$ context-free $\Leftrightarrow A$ context-free.

この系は次の Ginsburg の open problem に対する否定的解答を与える。

“ $A \subseteq a^* b^* c^*$ に対し $\rho(A)$ が not context-free になる context free language A は存在するか? ”

さて [定理 1] の証明 “ $\Leftarrow$ ” には次の lemma が用いられる。
 (“ $\Rightarrow$ ” の証明は前記 (*3) の証明と同様に容易。)

が context-free であることを示すために

$\rho(f(V[a_1, \dots, a_r]))$ が context-free である。ことを示せば十分である。

$$a_i = [0, \dots, 0, \overset{\hat{I}_i}{K_i}, 0, \dots, 0, \overset{\hat{J}_i}{L_i}, 0, \dots, 0]$$

座標番号 $1 \dots \hat{I}_i, \dots, \hat{J}_i \dots n$ } とすると

$\{a_1, \dots, a_r\}$ も pairwise connected であることから

「 $\ell_i = \{I_i, J_i\}$ ($i=1, \dots, r$) を $\mathcal{L}$ とするグラフは lemma 1 の仮定をみたし、従って次の2つの場合のみを生ずる。

(Case 1) $\{\ell_1, \dots, \ell_r\} = \{\{H, I\}, \{I, J\}, \{J, H\}\}$ $1 \leq H < I < J \leq n$

(Case 2) $\{\ell_1, \dots, \ell_r\} = \{\{I, I_1\}, \dots, \{I, I_r\}\}$, $I \neq I_i$ ($i=1, \dots, r$)

Case 1 の場合は $\{a_1, \dots, a_r\}$ の 1 次独立性から

$r=3$ でなければならず

$$\begin{aligned} \{a_1, \dots, a_r\} &= \{a_1, a_2, a_3\} \\ &= \left\{ [0, \dots, \overset{H}{\downarrow}, \dots, 0, K, 0, \dots, 0, \overset{I}{\downarrow}, 0, \dots, 0], \right. \\ &\quad [0, \dots, 0, M, 0, \dots, 0, N, 0, \dots, 0], \\ &\quad \left. [0, \dots, 0, P, 0, \dots, 0, Q, 0, \dots, 0] \right\} \end{aligned}$$

$$\therefore \rho(f(V[a_1, \dots, a_r])) = \rho((a_I^K a_J^L)^* (a_J^N a_H^M)^* (a_H^P a_I^Q)^*)$$

従って lemma 2 より context-free.

Case 2 の場合には同様にして

$$\rho(f(V[a_1, \dots, a_r])) = \rho((a_I^{K_1} a_{I_1}^{L_1})^* \dots (a_I^{K_r} a_{I_r}^{L_r})^*)$$

従って lemma 3 より context-free.

§ 4. lemma の証明.

lemma 2, 3 の証明にはそれぞれの集合の words のみと
 互つちり accept する push-down acceptor を与える。

lemma 3 については容易なので lemma 2 についてのみ述べる。

$$A_0 = \wp((b^k c^l)^* (c^N a^M)^* (a^P b^Q)^*) = T(A_0)$$

$$A_0 = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, q_0, F)$$

$$K = K_1 \cup \{q_F\}$$

$$K_1 = \{ \langle -l, -m, -n \rangle \mid l, m, n \text{ integers, } 0 \leq l, m, n \leq H \}$$

$$H = \max(K, L, M, N, P, Q)$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}, \quad \Gamma = \{z_0, a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$$

$$q_0 = \langle 0, 0, 0 \rangle, \quad F = \{q_F\}$$

δ は次の関係のすべてを含む最小の集合 (但し、特に条件と
 付して " なし" ときは $0 \leq l, m, n \leq H, z \in \Gamma$ なるすべての l, m, n
 z に対する関係を与えて " するものとする。)

1.1 Input to inner counter rules

$$\delta(\langle -l, -m, -n \rangle, a, z) \ni \langle -l+1, -m, -n \rangle, z) \text{ for } l, 0 < l \leq H$$

$$\delta(\quad, b, z) \ni \langle -l, -m+1, -n \rangle, z) \quad " \quad m, 0 < m \leq H$$

$$\delta(\quad, c, z) \ni \langle -l, -m, -n+1 \rangle, z) \quad " \quad n, 0 < n \leq H$$

1.2 Input to push down storage rules

$$\delta(\langle 0, -m, -n \rangle, a, z) \ni \langle 0, -m, -n \rangle, za)$$

$$\delta(\langle -l, 0, -n \rangle, b, z) \ni \langle -l, 0, -n \rangle, zb)$$

$$\delta(\langle -l, -m, 0 \rangle, c, z) \ni (\langle -l, -m, 0 \rangle, zc)$$

1.3 Delete rules

$$\delta(\langle 0, 0, -n \rangle, \Lambda, z) \ni (\langle -p, -q, -n \rangle, z)$$

$$\delta(\langle 0, -m, 0 \rangle, \Lambda, z) \ni (\langle -M, -m, -N \rangle, z)$$

$$\delta(\langle -l, 0, 0 \rangle, \Lambda, z) \ni (\langle -l, -K, -L \rangle, z)$$

1.4 Adjust (storage to counter) rules

$$\delta(\langle -l, -m, -n \rangle, \Lambda, a) \ni (\langle -l+1, -m, -n \rangle, \Lambda), \text{ for } l; 0 < l \leq H$$

$$\delta(\quad, \Lambda, b) \ni (\langle -l, -m+1, -n \rangle, \Lambda), \quad m; 0 < m \leq H$$

$$\delta(\quad, \Lambda, c) \ni (\langle -l, -m, -n+1 \rangle, \Lambda), \quad n; 0 < n \leq H$$

2.1 Positive store rules

$$\delta(\langle -l, -m, -n \rangle, \Lambda, z) \ni (\langle -l-1, -m, -n \rangle, za), \text{ for } l; 0 \leq l < H$$

$$\delta(\quad, \quad, \quad) \ni (\langle -l, -m-1, -n \rangle, zb), \quad m; 0 \leq m < H$$

$$\delta(\quad, \quad, \quad) \ni (\langle -l, -m, -n-1 \rangle, zc), \quad n; 0 \leq n < H$$

2.2 Negative store rules

$$\delta(\langle -l, -m, -n \rangle, \Lambda, z_0) \ni (\langle -l+1, -m, -n \rangle, z_0 \bar{a}), \text{ for } l; 0 < l \leq H$$

$$\delta(\quad, \Lambda, \bar{a}) \ni (\quad, \bar{a} \bar{a}), \quad "$$

$$\delta(\quad, \Lambda, z_0) \ni (\langle -l, -m+1, -n \rangle, z_0 \bar{b}), \quad m; 0 < m \leq H$$

$$\delta(\quad, \Lambda, \bar{b}) \ni (\quad, \bar{b} \bar{b}), \quad "$$

$$\delta(\quad, \Lambda, z_0) \ni (\langle -l, -m, -n+1 \rangle, z_0 \bar{c}), \quad n; 0 < n \leq H$$

$$\delta(\quad, \Lambda, \bar{c}) \ni (\quad, \bar{c} \bar{c}), \quad "$$

2.3 Adjust (input to storage) rules

$$\delta(\langle 0, -m, -n \rangle, a, \bar{a}) \ni (\langle 0, -m, -n \rangle, \Lambda)$$

$$\delta(\langle -l, 0, -n \rangle, b, \bar{b}) \ni (\langle -l, 0, -n \rangle, \Lambda)$$

$$\delta(\langle -l, -m, 0 \rangle, c, \bar{c}) \ni (\langle -l, -m, 0 \rangle, \Lambda)$$

2.4 End rule

$$\delta(\langle 0, 0, 0 \rangle, \Lambda, z_0) \ni (q_F, \Lambda)$$

$$[A_0 = \delta((b^k c^l)^*(c^n a^m)^*(a^p b^q)^*) = T(A_0) \text{ の証明}]$$

A_0 の各 Configuration $G = (\langle -l, -m, -n \rangle, u, \gamma) \in K_1 \times \Sigma^* \times \Gamma^*$

に対して G の含む文字情報の量と意味する

$$I(G) = a^{-l + \#_a(u, \gamma) - \#_a(\gamma)} b^{-m + \#_b(u, \gamma) - \#_b(\gamma)} c^{-n + \#_c(u, \gamma) - \#_c(\gamma)}$$

に対応させる。

(I) " $T(A_0) \subseteq A_0$ ": ルール δ の作り方から一般に

$$G \xrightarrow{\delta} G', I(G) \equiv (b^k c^l)^{d'} (c^n a^m)^{e'} (a^p b^q)^{f'}, d', e', f' \geq 0$$

$$\text{ならば } I(G) \equiv (b^k c^l)^d (c^n a^m)^e (a^p b^q)^f \text{ for some } d, e, f \geq 0$$

が成立する。従って, $w \in T(A_0)$ ならば

$$G_0 = (\langle 0, 0, 0 \rangle, w, z_0) \xrightarrow{\delta} (\langle 0, 0, 0 \rangle, \Lambda, z_0) = G' \xrightarrow{\delta} (q_F, \Lambda, \Lambda)$$

のとき, $I(G') = a^0 b^0 c^0 \equiv (b^k c^l)^0 (c^n a^m)^0 (a^p b^q)^0$ に注意すれば

$$w \equiv I(G_0) \equiv (b^k c^l)^d (c^n a^m)^e (a^p b^q)^f, \text{ 即ち } w \in A_0$$

(II) " $A_0 \subseteq T(A_0)$ ": $w \in A_0$ ならば $w \equiv (b^k c^l)^{d_0} (c^n a^m)^{e_0} (a^p b^q)^{f_0}, d_0, e_0, f_0 \geq 0$

に於て ルール δ 1.1 ~ 1.4 を用いて

$$(i) G_0 = (\langle 0, 0, 0 \rangle, w, z_0) \xrightarrow{\delta} G'(\langle -l, -m, -n \rangle, u, z_0 z^g), \chi = a, b \text{ or } c$$

$$I(G') \equiv \textcircled{1} (c^n a^m)^e (a^p b^q)^f \text{ or } \textcircled{2} (b^k c^l)^d (a^p b^q)^f \text{ or } \textcircled{3} (b^k c^l)^d (c^n a^m)^e$$

とするとこれが出来る。更にルール $\delta 2.1 \sim 2.4$ を追加することにより、

(ii) ①, ②, ③ のいずれの場合にも

$$\mathcal{G}' = (\langle -l, -m, -n \rangle, u, z_0 x^g) \vdash_{\delta}^* (\langle 0, 0, 0 \rangle, \Lambda, z_0) \vdash_{\delta} (\{F, \Lambda, \Lambda\})$$

とすることが出来る (i), (ii) より $w \in T(A_0)$ となる。

(i) によりては, Acceptor A_0 は 1 時点の Configuration が $\mathcal{G}_i = (x, y, v, \gamma)$; $\gamma \in (z_0 a^* \cup z_0 b^* \cup z_0 c^*)$ なる形をしており、必ず文字 y を読み込みに再び $\mathcal{G}_i \vdash_{\delta}^* \mathcal{G}_{i+1}$,

$\mathcal{G}_{i+1} = (x', v', \gamma')$, $\gamma' \in (z_0 a^* \cup z_0 b^* \cup z_0 c^*)$ とし、 $\mathcal{G}_{i+1}$ の文字情報 $I(\mathcal{G}_{i+1})$ は $I(\mathcal{G}_i)$ に対し 不変か, $(b^k c^l)$, $(c^N a^M)$, or $(a^P b^Q)$ のいずれか 1 組の情報のみがきっかり減少したものである としうる。この結果すべての Input 文字を読み終り

$$\mathcal{G}_0 \vdash_{\delta}^* \mathcal{G}_1 \vdash_{\delta}^* \dots \vdash_{\delta}^* \mathcal{G}_s = (\langle -l, -m_s, -n_s \rangle, \Lambda, z_0 x^g), \quad g \geq 0,$$

$I(\mathcal{G}_i) \equiv (b^k c^l)^{d_i} (c^N a^M)^{e_i} (a^P b^Q)^{f_i}$ ($d_i, e_i, f_i \geq 0$ integers) ^(*)
 $(i=1, \dots, s)$ とすることが出来る。このとき d_s, e_s, f_s の少なくとも 1 つは non positive であることが導びかれ、3 つの非増大列 $d_0, \dots, d_s$; $e_0, \dots, e_s$; $f_0, \dots, f_s$ のいずれかは必ず 0 を含む。従って

- | | |
|--|----------------|
| $\left. \begin{array}{l} \text{① } d_j = 0 \text{ の場合は (i) の Case ①} \\ \text{② } e_k = 0 \text{ の場合は (i) の case ②} \\ \text{③ } f_t = 0 \text{ の場合は (i) の case ③} \end{array} \right\}$ | であり、(i) が示される。 |
|--|----------------|

(ii) の ① については (1-2) $x=b$ or c の場合は $x=a$ の場合に帰着しうること、及び (1-1) $x=a$ の場合は容易に

$\mathcal{G}' \vdash_{\delta}^* (\langle 0, 0, 0 \rangle, \Lambda, z_0) \vdash_{\delta} (g_F, \Lambda, \Lambda)$ が示されることから

$\mathcal{G}_0 \vdash_{\delta}^* \mathcal{G}' \vdash_{\delta} (g_F, \Lambda, \Lambda)$, 即ち $w \in T(\Lambda_0)$ となる。

(ii) の ②, ③ についても (i) の ① と同様に表示される。

(註)(*) 一般に $I(\mathcal{G}) = a^i b^j c^k \quad i, j, k \geq 0$

に対し $a^i b^j c^k \equiv (b^k c^L)^d (c^N a^M)^e (a^P b^Q)^f$

なる $d, e, f (\geq 0)$ integers が存在する場合は一意である。

但し $k, L, N, M, P, Q \neq 0$ であり。

≡ は 3文字 a, b, c から生成される commutative group の要素としての equality と考える。