

多重調和関数のグラフの多項式凸包

奈良教育大学 神保 敏弥 (Toshiya Jimbo)

Nara University of Education

1. 序. $\mathbb{C}^n$ のコンパクト集合 X の多項式凸包は、

$$\hat{X} = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |p(z)| \leq \|p\|_X, \text{ for every polynomial } p\}.$$

で定められる。 $\hat{X} = X$ を満たすとき X は多項式凸集合といわれる。 X 上の複素数値連続関数の全体を $C(X)$ で、多項式によって X 上で一様近似される関数の全体を $P(X)$ で表す。 K を $\mathbb{C}^n$ のコンパクト集合とし、関数 $f_1, \dots, f_m \in C(K)$ に対して写像 $f = (f_1, \dots, f_m)$ の K 上のグラフを $G(f)$ または $G(f; K)$ で表す。すなわち

$$G(f) = \{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^{n+m} : z \in K\}.$$

$f_1, \dots, f_m \in C(K)$ に対して $[f_1, \dots, f_m; K]$ によって $f_1, \dots, f_m$ の多項式によって、 K 上一様に近似される関数の全体を表す。 $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ とし、その境界を T とする。 $\mathbb{C}^2$ の単位開多重円板を D^2 で、 $\mathbb{C}^n$ の超球を $B = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^n |z_j|^2 < 1\}$ で表し、その境界を ∂B で表す。

ここで考える K は、 $\mathbb{C}^2$ のトーラス $T^2 = T \times T$ や超球面 ∂B とする。関数または写像 f の成分関数は、 $\overline{D^2}$ や $\bar{B}$ で多重調和な関数の K への制限関数とする。このとき、次の問題を考える。

- (1) グラフ $G(f)$ はどんなとき 多項式凸集合か?
- (2) どんなとき $[z_1, \dots, z_n, f_1, \dots, f_m; K] = C(K)$ となるか?
- (3) もし $\widehat{G(f)} \neq G(f)$ ならば、集合 $\widehat{G(f)} \setminus G(f)$ の解析構造はどうなっているか?

ここでの報告は前回 [6] の続きである。上の問題については古くは $K = T$ の場合が調べられ、近いところでは $K = \partial B$ の場合が、さらに $K = T^2$ の場合の研究も現れてきている。

ここでは、前回の時と重複しないように、つぎの定理をあげておこう。

Weinstock の定理 ([7]) 各 $f_j (j = 1, \dots, m)$ は K の近傍で C^1 級の関数とする。 $E = \{z \in K : \text{rank}(\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k}(z)) < n\}$ とおき、 $A =$

$[z_1, \dots, z_n, f_1, \dots, f_m; K]$ とおく。さらに写像 $f = (f_1, \dots, f_m)$ のグラフ $G(f)$ は多項式凸包とする。このとき

$$A = \{g \in C(K) : g|_E \in A|_E\}.$$

A を X 上の関数環とし、 M_A を A の極大イデアル空間とする。 A の関数 $f_1, \dots, f_m$ が関数環 A を生成するならばこのとき

$$\widehat{G(f)} = \{(\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_m)) \in \mathbb{C}^m : \varphi \in M_A\}.$$

関数 f が D^n や B^n で多重調和なときには、そこでの2つの正則関数 g, h があって、 $f = \bar{g} + h$ と表せる事が知られている。このことから $\overline{D^n}$ や $\bar{B}^n$ で多重調和な場合にも $f_j = \bar{g}_j + h_j$ とおき、 $K = T^2$ や $K = \partial B$ へのその制限関数も $f_j, \bar{g}_j, h_j$ で表すと次を得る。

$$[z_1, \dots, z_n, f_1, \dots, f_n; K] = [z_1, \dots, z_n, \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n; K]$$

するとこの2つの関数環の極大イデアル空間が一致しているので、写像 $f = (f_1, \dots, f_n)$ のグラフの多項式凸包を求めるためには写像 $\bar{g} = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n)$ のグラフの多項式凸包を求めればよいことがわかる。

グラフの多項式凸包を決定するのに次の二つの補題が役立つ。

補題 1.1 ([5]) 上の仮定のもとで、 $f = (\bar{g}_1 + h_1, \dots, \bar{g}_n + h_n)$ とするとき、 $G(f, K) \supset \widehat{G(f)}$ が成り立つ。

前回の報告の補題 8 をより一般的にかくと次のようになる。

補題 1.2 X は $\mathbb{C}^N$ のコンパクト集合、 U を $\bar{U} \cap X = \emptyset$ を満たす開集合とする。もし $\hat{X} \cap U$ が U 内のある totally real submanifold M に含まれるならば、 $\hat{X} \cap U = \emptyset$ が成り立つ。

2. トーラス上のグラフの多項式凸包 まず簡単な例をあげておこう。 z_j -平面の単位閉円板を $\overline{D_j}$ ($j = 1, 2$) とし、その境界を T_j とする。 g_j は $\overline{D_j}$ で、定数でない連続な内関数とする。 g_j の T_j への制限関数 $g_j|_{T_j}$ も、さらに $g_j|_{T_j}$ の T^2 への自然な拡張関数も、また g_j で表す。このとき、

例 2.1 $f(z_1, z_2) = \overline{g_1(z_1)g_2(z_2)}$ とすると、

$$[z_1, z_2, f; T^2] = [z_1, \bar{g}_1; T_1] \otimes [z_1, \bar{g}_2; T_2] = C(T^2), \quad \text{かつ} \quad \widehat{G(f)} = G(f).$$

U は $\mathbb{C}^2$ の開集合とし、 g と h は U での正則関数とする。このとき集合 $N = \{z \in U : \bar{g}(z) = h(z)\}$ を考える。また N のある点 z の小さな近傍が manifold になり、さらに totally real manifold になるかの判定に、次のものを用いる。

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial z_1}(z) & \frac{\partial g}{\partial z_2}(z) \\ \frac{\partial \bar{h}}{\partial z_1}(z) & \frac{\partial \bar{h}}{\partial z_2}(z) \end{vmatrix}.$$

次の補題は、トーラス上のグラフの多項式凸包の決定において、補題 1.2 の仮定を満たすかどうかにより用いられる。

補題 2.2 N のある点 z_0 が $\Delta(z_0) \neq 0$ を満たすならば、 z_0 を中心とする小さな開球 B_0 をとれば、 $B_0 \cap N$ は B_0 内で totally real submanifold である。

前の節で、 f が多重調和の場合を考える時は、antiholomorphic な場合を考えることが本質的であったので、ここでは、 f を z_1, z_2 の多項式 $g(z_1, z_2) = \sum_{j,k} a_{jk} z_1^j z_2^k$ の複素共役関数の場合を考えてみる。すなわち、 $f(z_1, z_2) = \overline{g(z_1, z_2)}$ を考える。

g について、 z_1 の次数を m 、 z_2 の次数を n とし、多項式 $k(z_1, z_2)$ と正則関数 $h(z_1, z_2)$ を次の式で定める。 $\bar{D}^2 \setminus L$ の上で

$$\bar{g}\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) = \sum_{j,k} \bar{a}_{jk} \frac{1}{z_1^j} \frac{1}{z_2^k} = \frac{k(z_1, z_2)}{z_1^m z_2^n} = h(z_1, z_2).$$

ここで、 $L = (\bar{D} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \bar{D})$ 。さて補題 1.1 によって

$$\widehat{G(f)} \subset \{(z_1, z_2, z_3) \in \bar{D}^2 \times \|\bar{f}\| \bar{D} : z_3 - \overline{g(z_1, z_2)} = 0, \\ z_1^m z_2^n z_3 - k(z_1, z_2) = 0\}$$

となるので、2つの式から z_3 を消去して、集合 V を定める。

$$V = \{(z_1, z_2) \in \bar{D} \setminus (T^2 \cup L) : \overline{g(z_1, z_2)} = h(z_1, z_2)\}.$$

さらに、 $\bar{D} \setminus L$ 上で、 $\Delta(z_1, z_2) \neq 0$ と仮定する。そこで互いに素な規約多項式 q_i を用いて、

$$\Delta(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1^{m+1} z_2^{n+1}} \prod_i q_i(z_1, z_2)$$

と表す。この q_i を用いて集合 Q_i と $\tilde{Q}_i$ を

$$Q_i = \{(z_1, z_2) \in T^2 : q_i(z_1, z_2) = 0\},$$

$$\tilde{Q}_i = \{(z_1, z_2) \in \bar{D}^2 : q_i(z_1, z_2) = 0\}$$

と定め、次の添え字集合を定める。

$$I = \{i : Q_i \neq \hat{Q}_i = \tilde{Q}_i, \tilde{Q}_i \setminus (T^2 \cup L) \subset V\}.$$

このとき、次の定理が得られる。

定理 2.1 $\widehat{G(f)} = G(f) \cup \bigcup_{i \in I} \{(z_1, z_2, \overline{g(z_1, z_2)}) : (z_1, z_2) \in \tilde{Q}_i\}$.
とくに、 $I = \emptyset$ ならば、 $\widehat{G(f)} = G(f)$, かつ $[z_1, z_2, f; T^2] = C(T^2)$.

従って、グラフ $G(f)$ が多項式凸集合でないならば、その多項式凸包の増加部分は、analytic varieties の和集合と言うことである。

証明の一つのポイントは、点 $(z_1, z_2) \in \tilde{Q}_i \setminus (T^2 \cup L)$ の近傍が、 ζ -平面の単位円板 $\bar{D}$ で正則な関数 $z_j = \varphi_j, j = 1, 2$ で表される時を考え、この関数を V を定めた両辺に代入して、その両辺を ζ の多項式をかけて、 T 上で積分してみることである。後は、互いに素な規約多項式の零点集合の共通部分は孤立点である事を用いる。勿論証明に補題 1.1, 1.2, 2.2 が用いられるが、補題 1.2 は Main lemma といえる。

3. 超球上の関数のグラフの多項式凸包 $g_j (j = 1, \dots, n)$, は $\bar{B}$ の近傍で正則な関数とする。写像 f は $\bar{g} = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n)$ の ∂B への制限関数とする。すなわち $f = \bar{g}|_{\partial B}$.

命題 3.1 U は ∂B のある開近傍とする。上に述べた $f = \bar{g}|_{\partial B}$ は $\det(\frac{\partial g_j}{\partial z_k}(z)) \neq 0$ ($z \in B \cap U$) を満たすとする。このとき

$$\widehat{G(f)} = G(f), \text{ さらに } [z_1, \dots, z_n, f_1, \dots, f_n; \partial B] = C(\partial B).$$

証明は補題 1.2 によって、 $\widehat{G(f)}$ からグラフ $G(\bar{g}, B)$ の部分がまず除かれることとなる。よって $\widehat{G(f)} = G(f)$ を得る。次に $\det(\frac{\partial g_j}{\partial z_k}(z)) = 0$ を満たす ∂B 上の z の集合は関数環 $P(\bar{B})$ の補完集合となるので、Weinstock の定理 [7] を用いて残りが得られる。

例 3.2 $f_1 = \bar{z}_1^2 + 2\bar{z}_2 - \bar{z}_2^2, f_2 = 2\bar{z}_1 + 2\bar{z}_1\bar{z}_2$ とおくと、 B 上で $\det(\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k}(z)) = 4(z_1^2 + z_2^2 - 1) \neq 0$. 超球面 ∂B 上のグラフ $G(f)$ は多項式集合で、 $[z_1, z_2, f_1, f_2; \partial B] = C(\partial B)$ となる。

例 3.3 $g_1 = \bar{z}_1$ and $g_2 = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ とおき、 $f_j = g_j|_{\partial B}$, $j = 1, 2$ とし、 $f = (f_1, f_2)$ とする。 $\det(\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k}(z)) = \bar{z}_1$ であるので、補題を用いると $\widehat{G}(f) = G(f) \cup \{(0, z_2, 0) : z_2 \in D\}$ を得る。 $\mathbb{C}^3$ から $\mathbb{C}^2$ への射影を $\pi(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2)$ とすると $\partial B \subseteq \pi(\widehat{G}(f)) \subseteq \bar{B}$ であり、 $\widehat{G}(f)$ は写像 $g = (g_1, g_2)$ のグラフ $G(g, \bar{B})$ ではない。

最後に、トーラス T^2 上のグラフについては、トーラスを T^n の場合に考え、 T^2 上のグラフでは、関数を $\overline{D^2}$ で antiholomorphic な関数の場合で調べたい。超球面上のグラフについては、 $\widehat{G}(f) \setminus G(f) \neq \emptyset$ の場合を現在調べている。

参考文献

- [1] P. Ahern and W. Rudin, Hulls of 3-spheres in $\mathbb{C}^3$, Contemporary Math., 137(1992), 1-27.
- [2] H. Alexander, Polynomial hulls of graphs, Pacific J. Math., 147(1991), 201-212.
- [3] H. Alexander and J. Wermer, Several Complex Variables and Banach Algebras, Springer-Verlag, 1998.
- [4] R. Harvey and R. O. Wells, Jr., Holomorphic approximation and hyperfunction theory on a $\mathbb{C}^1$ totally real submanifold of a complex manifold, Math. Ann., 197 (1972), 287-312.
- [5] T. Jimbo and A. Sakai, Polynomially convex hulls of graphs on the sphere, Proc. Amer. Math. Soc., 127(1999), 2697-2702.
- [6] 神保敏弥、Polynomial hulls of graphs on the torus, 数理解析研究所講究録、2000 年 4 月, 51-56.
- [7] B. M. Weinstock, Uniform approximation on the graph of a smooth map in $\mathbb{C}^n$, Can. J. Math., 32 (1980), 1390-1396.