

Quantum Doubles of Hopf *-Algebras

福岡大学・理・黒瀬秀樹

1. Introduction

Hopf algebra $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, m, \delta, \varepsilon, \kappa)$ において、 m は product, δ は coproduct, ε は counit, κ は antipode を表わす. Hopf algebra $\mathcal{A}$ が involution $*$ をもち、coproduct δ が $*$ -preserving であるとき、Hopf $*$ -algebra と呼ばれる. Hopf $*$ -algebra $\mathcal{A}$ の dual convolution algebra $\mathcal{A}'$ にはここでは次の involution を考える:

$$\langle a, \varphi^* \rangle = \langle \kappa(a)^*, \varphi \rangle, \quad a \in \mathcal{A}, \quad \varphi \in \mathcal{A}'.$$

paired Hopf $*$ -algebras $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ とは、 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ が Hopf algebras としての pairing であるだけでなく、 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の involution が上と同様な関係を満たしているときをいう.

あるクラスの Hopf algebra $\mathcal{A}$ は dual convolution algebra $\mathcal{A}'$ 以外に重要な dual object をもつことが知られている. 一つは coquasitriangular というクラスの Hopf algebra $\mathcal{A}$ に対する paired Hopf algebra $\mathcal{U}$ であり、quantum group $\mathcal{A}$ の quantum enveloping algebra に相当する. もう一つは cosemisimple Hopf algebra $\mathcal{A}$ に対する reduced dual $\hat{\mathcal{A}}$ である. $\hat{\mathcal{A}}$ は一般に Hopf algebra ではなく、より広い multiplier Hopf algebra というクラスの object である. またこれは quantum group $\mathcal{A}$ の dual quantum group に相当する.

paired Hopf algebras $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ あるいは paired multiplier Hopf algebras $(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})$ から quantum double と呼ばれる新しい Hopf algebra あるいは multiplier Hopf algebra が定義できることが知られている. また、Van Daele 等により、paired multiplier Hopf algebras $(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}})$ からはもう一つ新しい multiplier Hopf algebra で前のものと pairing をなすものが定義できる. この構成方法は quantum double の dual version で、double group construction と呼ばれている.

$\mathcal{A}$ が coquasitriangular Hopf algebra であるとき、paired Hopf algebras $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ に残念ながら double group construction は適用できない. この小文の目的は、coquasitriangular Hopf algebra $\mathcal{A}$ から構成される quantum double $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}$ がじつは $(\mathcal{A}, \mathcal{U})$ による double group construction の代用物であることを主張することにある. 特に、real coquasitriangular compact Hopf $*$ -algebra に対して、このあたりの事情をすこし詳しく述べる.

また、この小文は Y. Nakagami との共同研究 [KY2], A. Van Daele, Y. Zhang との共同研究 [KVZ] に一部依っている.

II-1. Coquasitriangular Hopf Algebras

定義. (c.f. [M], [KS]).

Hopf algebra $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, m, \delta, \varepsilon, \kappa)$ が coquasitriangular (CQT) であるとは, 次の (o), (i), (ii) を満たす $\mathcal{A}$ 上の bilinearform s が存在するときを言う.

(o) $\exists$ inverse s^{-1} of s in the convolution algebra $\mathcal{L}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mathbb{C})$

(i) $s(a a', b) = s(a \otimes a', \delta(b))$

$s(a, b b') = s(\delta(a), b' \otimes b)$

(s は $\mathcal{A}$ とそれ自身の間の skew pairing)

(ii)¹ $\sum_{(a)(b)} s(a_{(2)}, b_{(2)}) b_{(1)} a_{(1)} = \sum_{(a)(b)} s(a_{(1)}, b_{(1)}) a_{(2)} b_{(2)}.$

(quasicommutativity)

CQTHopf*-algebra $(\mathcal{A}, s)$ が real (resp. anti-real) であるとは, skew pairing s が

$$\overline{s(a^*, b^*)} = s(b, a) \quad (\text{resp. } \overline{s(a^*, b^*)} = s^{-1}(a, b))$$

が満たすときをいう.

標準的な Yang-Baxter 行列 R_q ($q \in \mathbb{C} - \{0\}$) から, FRT-formalism (c.f. [RTF]) を用いて構成される Hopf algebra は coquasitriangular (CQT) である. また, q : real のとき $(\mathcal{A}, s)$ が real さらに $|q| = 1$ のとき $(\mathcal{A}, s)$ が anti-real となっている.

CQTHopf algebra $(\mathcal{A}, s)$ に対して,

$$i; a \in \mathcal{A} \longrightarrow s(a, \cdot) \in \mathcal{A}',$$

$$j; a \in \mathcal{A} \longrightarrow s^{-1}(\cdot, a) \in \mathcal{A}',$$

$$\mathcal{U}; \text{ the subalgebra of } \mathcal{A}' \text{ generated by } i(\mathcal{A}), j(\mathcal{A})$$

とすると,

¹ Sweedler の記号 $\delta(a) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ を使っている.

$\mathcal{U}$ は Hopf algebra paired with $\mathcal{A}$.

$i, j; \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{U}^{\text{op}}$ は Hopf algebra homomorphisms.

さらに $\mathcal{A}$ が real or anti-real CQT Hopf $*$ -algebra ならば, $\mathcal{U}$ は Hopf $*$ -algebra paired with $\mathcal{A}$, また i と j は Hopf $*$ -algebra homomorphism となる.

$\mathcal{A}$ を quantum Lie group と考えるとき, $\mathcal{U}$ は quantum enveloping algebra に相当している.

II-2. Quantum Doubles of Coquasitriangular Hopf Algebras

CQT Hopf algebra $(\mathcal{A}, s)$ に対して, 代数的テンソル $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ に次のように Hopf algebra structure を定義することができる:

$$\begin{array}{ll} \text{product} & (a \otimes b)(c \otimes d) = \sum_{(b)(c)} s^{-1}(b_{(1)}, c_{(1)}) s(b_{(3)}, c_{(3)}) a c_{(2)} \otimes b_{(2)} d, \\ \text{unit} & 1 \otimes 1, \\ \text{coproduct} & \delta = \sigma_{23}(\delta_{\mathcal{A}} \otimes \delta_{\mathcal{B}}) \quad (\sigma \text{ は flip を表わす}) \\ \text{counit} & \varepsilon = \varepsilon_{\mathcal{A}} \otimes \varepsilon_{\mathcal{B}} \\ \text{antipode} & \kappa(a \otimes b) = \sum_{(a)(b)} s(b_{(1)}, a_{(1)}) s^{-1}(b_{(3)}, a_{(3)}) \kappa(a_{(2)}) \otimes \kappa(b_{(2)}) \end{array}$$

coalgebra structure は tensor coalgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ としてのそれであるが, algebra structure は s を用いて twist されていることに注意. この Hopf algebra をとくに $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}$ とかく.

$(\mathcal{A}, s)$ が real または anti-real CQT Hopf $*$ -algebra であれば, $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}$ に involution;

$$\begin{aligned} (a \otimes b)^* &= b^* \otimes a^* && (\text{for real } s) \\ (a \otimes b)^* &= \sum_{(a)(b)} s(b_{(1)}, a_{(1)}) s^{-1}(b_{(3)}, a_{(3)}) a_{(2)}^* \otimes b_{(2)}^* && (\text{for anti-real } s) \end{aligned}$$

を定義でき $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}$ は Hopf $*$ -algebra となる.

定理. (K-Nakagami) (real or anti-real) CQT Hopf $(*)$ -algebra $\mathcal{A}$ に対して,
 $\exists$ unital $(*)$ -algebra homomorphism $f: \mathcal{A} \bowtie \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{U}$.

さらに $\mathcal{A}$ が factorizable であるとき、またそのときに限り、上の f は injective となる。

ここで CQT Hopf algebra $(\mathcal{A}, s)$ が factorizable であるとは、quantum (inverse) Killing form $(s \circ \sigma)s \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})'$ (σ は flip) が nondegenerate であるときをいう。

Real CQT Hopf algebra $\mathcal{A}$ が compact で compact quantum Lie group (の関数環) に相当しているとき、上の quantum double $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ の複素化にあたる。さらに $\mathcal{A}$ が factorizable であるとき、上の定理は複素化 $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}$ の分解 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{U}$ を与える。これは岩沢分解の一般化に相当している。Podles-Woronowicz は逆に岩沢分解からスタートし、compact quantum Lie group $SU_q(2)$ の複素化として quantum Lorentz group を定義した。後に Podles 等がこの quantum Lorentz group が $SU_q(2) \bowtie SU_q(2)$ であることを発見した。

CQT Hopf algebra $(\mathcal{A}, s)$ から得られる skew paired Hopf algebras $(\mathcal{U}, \mathcal{A}^{\text{op}})$, $(\mathcal{U}^{\text{cop}}, \mathcal{A})$, $(\mathcal{A}, \mathcal{U}^{\text{op}})$, $(\mathcal{A}^{\text{cop}}, \mathcal{U})$ ² のそれぞれに対して、上と同様にして、Quantum Double $\mathcal{U} \bowtie \mathcal{A}^{\text{op}}$, $\mathcal{U}^{\text{cop}} \bowtie \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{U}^{\text{op}}$, $\mathcal{A}^{\text{cop}} \bowtie \mathcal{U}$ が構成できる³。さらに $(\mathcal{A}, s)$ が real または anti-real CQT Hopf $*$ -algebra であれば、これらは Hopf $*$ -algebra となる。

² ここに、 $\mathcal{A}^{\text{op}}$ は $\mathcal{A}$ の積を、 $\mathcal{A}^{\text{cop}}$ は $\mathcal{A}$ の余積を flip して得られる Hopf algebra を表わす。

³ Tensor coalgebra structure と twist された algebra structure を考える。積の twist に関しては、例えば、 $x \in \mathcal{A}$, $\varphi \in \mathcal{A}'$ に対して、

$$S(x \otimes \varphi) = \sum_{(x)} \varphi(x_{(1)} \cdot \kappa(x_{(3)})) \otimes x_{(2)} \in \mathcal{A}' \otimes \mathcal{A},$$

$$m \equiv (m_{\mathcal{A}'} \otimes m_{\mathcal{A}^{\text{op}}}) \circ S_{23}; (\mathcal{A}' \otimes \mathcal{A}^{\text{op}}) \otimes (\mathcal{A}' \otimes \mathcal{A}^{\text{op}}) \longrightarrow \mathcal{A}' \otimes \mathcal{A}^{\text{op}}.$$

とすると、 m は $\mathcal{A}' \otimes \mathcal{A}^{\text{op}}$ の associative な積を定義する。この積をもつ algebra $\mathcal{A}' \otimes \mathcal{A}^{\text{op}}$ は $\mathcal{A}' \bowtie \mathcal{A}^{\text{op}}$ と書かれる。 $\mathcal{U} \bowtie \mathcal{A}^{\text{op}}$ は $\mathcal{A}' \bowtie \mathcal{A}^{\text{op}}$ の subalgebra である。

上の定理によれば、Hopf $(*)$ -algebra $f(\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A})$ の algebra $(*)$ -structure は tensor algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{U}^{\text{op}}$ の subalgebra としてのそれであるが、coalgebrastructure は一般に $\mathcal{A} \otimes \mathcal{U}^{\text{op}}$ の tensor coalgebrastructure を twist したものである。次のことが証明できる：

定理. f の値域 $f(\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A})$ と Quantum Double $\mathcal{U} \bowtie \mathcal{A}^{\text{op}}$ は Hopf algebra としての pairing をなす。この pairing は $\mathcal{A}$ が factorizable であるとき、またそのときに限り、nondegenerate である。

III-1. Cosemisimple Hopf Algebras

定義. Hopf algebra $\mathcal{A}$ に関する次の3つの条件

- (i) $\mathcal{A}$ は cosimple subcoalgebras の直和.
- (ii) $\mathcal{A}$ の任意の corepresentation は完全可約.
- (iii) $\exists h$: left invariant functional⁴ on $\mathcal{A}$ s.t. $h(1)=1$.

は互いに同値であり、これが満たされるとき $\mathcal{A}$ は cosemisimple であると言う。

cosemisimple Hopf algebra $\mathcal{A}$ に対して、

$$\hat{\mathcal{A}} = \{ \varphi_a \equiv h(\cdot a); a \in \mathcal{A} \} (= \{ h(a \cdot); a \in \mathcal{A} \}) \subset \mathcal{A}',$$

とおき、これを以後 $\mathcal{A}$ の reduced dual と呼ぶ。 $\hat{\mathcal{A}}$ は semisimple algebra であり、dual convolution algebra $\mathcal{A}'$ の ideal であることがわかる。

定理. cosemisimple Hopf algebra $\mathcal{A}$ の reduced dual $\hat{\mathcal{A}}$ には $\mathcal{A}$ と dual pair になるよう (regular) multiplier Hopf algebra の構造が入る⁵。

⁴ a functional h on a Hopf $(*)$ -algebra $\mathcal{A}$ が left invariant であるとは

$$(\iota \otimes h)(\delta(a)) = h(a)1, \quad a \in \mathcal{A}$$

のときをいう。

⁵ multiplier Hopf algebra $\hat{\mathcal{A}}$ は一般に nonunital で、coproduct は multiplier algebra $M(\hat{\mathcal{A}} \otimes \hat{\mathcal{A}})$ への homomorphism である。multiplier Hopf algebras の詳細

$a \in \mathcal{A}$, $\varphi \in \hat{\mathcal{A}}$ に対して,

$$\pi(a)b = ab, \quad \hat{\pi}(\varphi)b = (\varphi \circ \kappa^{-1} \otimes \iota)\delta(b), \quad b \in \mathcal{A}$$

で $\pi(a), \hat{\pi}(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ を定義すると, $\pi, \hat{\pi}$ はそれぞれ $\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}$ の $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ 上への faithful な表現. $\hat{\pi}$ はさらに multiplier algebra $M(\hat{\mathcal{A}})$ の表現に拡大できる. これら $\pi, \hat{\pi}$ を用いて,

$$\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{A}), \mathcal{A} \otimes \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{A}} \otimes \hat{\mathcal{A}}, M(\hat{\mathcal{A}} \otimes \hat{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}),$$

等々と考え、以後 $\pi, \hat{\pi}$ を省略する.

Kac-Takesaki operator: $W \in \mathcal{L}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$ を

$$W : a \otimes b \longrightarrow \delta(b)(a \otimes 1)$$

で定義すると W は invertible で次が成立.

- $W_{12} W_{23} = W_{23} W_{13} W_{12}$ (Pentagon equation.)
- $W(1 \otimes a)W^{-1} = \delta(a)$
- $\hat{W}(1 \otimes \varphi)\hat{W}^{-1} = \hat{\delta} \circ \text{p}(\varphi), \quad W^{-1}(\varphi \otimes 1)W = \hat{\delta}(\varphi)$

ただし, $\hat{W} = \sigma \circ W^{-1} \circ \sigma$ である.

III-2. Cosemisimple Hopf Algebras に対する Double Group Construction と Quantum Doubles

定理. (Double group construction) tensor algebra $\mathcal{A} \otimes \hat{\mathcal{A}}^{\text{cop}}$ の積を m とかき、

については, [V] 参照.

$$\begin{aligned}\delta &\equiv \text{Ad} \hat{W}_{23} \circ (\delta_{13} \otimes \hat{\delta}^{\text{op}}_{24}) ; \mathcal{A} \otimes \hat{\mathcal{A}} \longrightarrow M(\mathcal{A} \otimes \hat{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{A} \otimes \hat{\mathcal{A}}) \\ \varepsilon &\equiv \varepsilon_{\mathcal{A}} \otimes \varepsilon_{\hat{\mathcal{A}}^{\text{cop}}} \\ \kappa &\equiv (\kappa_{\mathcal{A}} \otimes \kappa_{\hat{\mathcal{A}}^{\text{cop}}}) \circ \text{Ad} W^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{A} \otimes \hat{\mathcal{A}})\end{aligned}$$

と定義すると、 $(\mathcal{A} \otimes \hat{\mathcal{A}}^{\text{cop}}, m, \delta, \kappa, \varepsilon)$ は (regular) multiplier Hopf algebra となる。
これを $\mathcal{A} \bowtie \hat{\mathcal{A}}^{\text{cop}}$ とかく。

ここに coproduct δ は

$$\delta(a \otimes \varphi) = \text{Ad}(\hat{W}_{23} W_{13} \hat{W}_{24})(1 \otimes 1 \otimes a \otimes \varphi)$$

ともかけ、その coassociativity は Kac-Takesaki operator $W, \hat{W}$ の Pentagonal equation に依っている。

一方、p4 の脚注と同様にして quantum bouble $\hat{\mathcal{A}} \bowtie \mathcal{A}^{\text{op}}$ が構成でき、これは $\mathcal{A}' \bowtie \mathcal{A}^{\text{op}}$ の ideal である。これに関して、

定理. algebra $\hat{\mathcal{A}} \bowtie \mathcal{A}^{\text{op}}$ は tensor multiplier coalgebra structure のもとで、(regular) multiplier Hopf algebra となる。さらに $\mathcal{A} \bowtie \hat{\mathcal{A}}^{\text{cop}}, \hat{\mathcal{A}} \bowtie \mathcal{A}^{\text{op}}$ は multiplier Hopf algebra としての pairing をなす。

IV. Compact Hopf*-Algebra の Quantum Double

Hopf*-algebra $\mathcal{A}$ 上に non-zero, positive, left invariant functional h があるとき、 $\mathcal{A}$ は compact であるという。このとき h は unique (up to scalar), faithful, bothsided invariant である。これは Haar measure と呼ばれ、以後は normalize されているものとする。

compact Hopf*-algebra は cosemisimple である。

$\mathcal{A}$ を compact Hopf $*$ -algebra, h を Haar measure, $(\pi, \mathcal{H})$ を $\mathcal{A}$ の h に関する GNS representation とする. これは compact quantum group $\mathcal{A}$ の正則表現に相当. Non-trivial な事実であるが, π は 有界な表現であることがわかる.

$$\hat{\pi}(\phi)a \equiv (\phi \circ \kappa^{-1} \otimes 1)\delta(a), \quad \phi \in \mathcal{A}', \quad a \in \mathcal{A}.$$

と置くと, $\hat{\pi}$ は Hilbert space $\mathcal{H}$ における dense subspace $\mathcal{A}$ を定義域とする $\mathcal{A}'$ の非有界表現 ($*$ -representation of $\mathcal{A}'$ as a O^* -algebra) となる. しかし, $\hat{\pi}$ の reduced dual $\hat{\mathcal{A}}$ への制限は有界となり, 次のような von Neumann algebras を考える:

$$M \equiv \pi(\mathcal{A})'' \quad \hat{M} \equiv \hat{\pi}(\hat{\mathcal{A}})'.$$

定理. $\mathcal{A}$ を compact な real coquasitriangular Hopf $*$ -algebra とし, $\mathcal{U}$ を § II-1 で定義された Hopf $*$ -algebra paired with a compact Hopf $*$ -algebra $\mathcal{A}$ とする. このとき, $\mathcal{A}$ が factorizable であることと

$$\{ \{ (\pi \otimes \hat{\pi})(f(\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A})) \}'_w \}' = M \bar{\otimes} \hat{M} (= \{ (\pi \otimes \hat{\pi})(\mathcal{A} \bowtie \hat{\mathcal{A}}^{\text{cop}}) \}')$$

が成立することは同等である⁶.

$\mathcal{A}$ が factorizable であるとき, この定理よりもっと強く, 余積の構造, さらにには Woronowicz algebra という代数構造まで込めて, 定理の等式が成立することがわかる. これは quantum double $\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}$ が double group construction $\mathcal{A} \bowtie \hat{\mathcal{A}}^{\text{cop}}$ の代替物であることを示している.

⁶ ここで $\{ (\pi \otimes \hat{\pi})(f(\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A})) \}'_w$ は非有界作用素環 $(\pi \otimes \hat{\pi})(f(\mathcal{A} \bowtie \mathcal{A}))$ に対する weak commutantを表わす.

References

- [DV] B. Drabant, A. Van Daele, Pairing and the quantum double of multiplier Hopf algebras, preprint in 1996.
- [KN1] H. Kurose, Y. Nakagami, Compact Hopf $\ast$ -algebras, quantum enveloping algebras and Dual Woronowicz algebras, *Int. J. Math.* 8(1997), 959-997.
- [KN2] H. Kurose, Y. Nakagami, in preparation.
- [KS] A. Klimyk, K. Schmudtgen, *Quantum Groups and Their Representations*, Texts and Monographs in Physics, Springer, 1997.
- [KVZ] H. Kurose, A. Van Daele, Y. Zhang, Corepresentation theory of Multiplier Hopf algebras II, preprint (1998), to appear in *Int. J. Math.*
- [M] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge U. P., 1995.
- [P] P. Podleś, P., Complex quantum groups and their real representations, *Publ. RIMS* 28(1992), 709-745.
- [PW] P. Podleś, S.L. Woronowicz, Quantum deformation of Lorentz group, *Comm. Math. Phys.*, 130(1990), 381-431.
- [RTF] Reshetikhin, N.Yu., L.A. Takhtadzhyan, L.D. Faddeev, Quantization of Lie groups and Lie algebra, *Leningrad Math. J.* 1 (1990), 193-225.
- [V] A. Van Daele, An algebraic framework for group duality, preprint, Jan. 1996.