

Second Order Asymptotic Optimality of Estimators
for the Non-Regular Distribution

赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

はじめに.

非正則な場合の 2 次の漸近最適性、特に 2 次の漸近有効性は、いくつかの特別な場合に論じられている (Akahira, 1982). また両側指数分布の位置母数の推定量の 2 次の漸近有効性に関する議論は知られている (Akahira and Takeuchi, 1981). ここでは、より一般的に、有限個の cusp をもつ密度関数の場合に、2 次の漸近中央値不偏推定量の 2 次の分布の限界を求め、さらに修正された最尤推定量の 2 次の漸近分布も求めて、比較を試みたい。またいくつかの例題についても述べる。

1. 定義と仮定

$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ をたがいに独立に、いずれも (Lebesgue 測度に関して連続な) 密度関数 $f(x, \theta)$ ($\theta \in \mathbb{H}$) に従う確率変数列とし、 $\mathbb{H} = \mathbb{R}^1$ で $f(x, \theta) = f(x - \theta)$ である、すなわち

θ は位置母数であると仮定する. さらに次の (A.1), (A.2), (A.3) も仮定する.

(A.1). $f(x)$ は連続で、 m 個の点 $s_1, \dots, s_m$ に対して

$$\lim_{x \rightarrow s_j \pm 0} f'(x), \lim_{x \rightarrow s_j \pm 0} f''(x) \quad (j=1, \dots, m) \text{ が存在し、}$$

その他の点では $f(x)$ は 3 回微分可能で、すべ

ての x に対して $f(x) > 0$ であつ $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ である.

(A.2). f に関する Fisher 情報量 I は正であつ有限である.

すなわち

$$0 < I = E_0 \left[\left\{ \frac{d \log f(x)}{dx} \right\}^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d \log f(x)}{dx} \right\}^2 f(x) dx < \infty$$

である.

(A.3). 各 $i=1, 2, 3$ に対して、 $l^{(i)}(x) = d^i \log f(x) / dx^i$ と

おくと、 $J = E_0[l^{(1)}(x)l^{(2)}(x)]$, $K = E_0[\{l^{(1)}(x)\}^3]$,

$L_3 = E_0[l^{(3)}(x)]$ が存在する.

条件 (A.1) ~ (A.3) を満たす分布としては、区分的指数分布が考えられる.

各 $\theta \in \mathbb{H}$ と n について、密度関数 $f(x-\theta)$ をもつ確率測度 P_θ の n 個の直積を $P_{\theta,n}$ とする. 推定量 $\hat{\theta}_n$ が $\sqrt{n}$ -一致推定量であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $\psi \in \mathbb{H}$ に対して、十分小さな正数 δ が存在して

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sup_{\theta: |\theta - \psi| < \delta} P_{\theta,n} \{ \sqrt{n} |\hat{\theta}_n - \theta| \geq L \} = 0$$

が成り立つことであると定義する.

ある $\sqrt{n}$ -一致推定量 $\hat{\theta}_n$ が 2 次の漸近的中央値不偏 (asymptotically median unbiased 略して AMU) であるとは、

任意の $\theta \in \Theta$ に対して、正数 δ が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta: |\theta - \theta_0| < \delta} \sqrt{n} |P_{\theta, n} \{ \hat{\theta}_n \leq \theta \} - \frac{1}{2}| = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta: |\theta - \theta_0| < \delta} \sqrt{n} |P_{\theta, n} \{ \hat{\theta}_n \geq \theta \} - \frac{1}{2}| = 0$$

が成り立つことである。

2 次の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ について、 $G_0(t, \theta) + n^{-1/2} G_1(t, \theta)$ が $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ (または $\hat{\theta}_n$) の 2 次の漸近分布であるとは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} |P_{\theta, n} \{ \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \leq t \} - G_0(t, \theta) - n^{-1/2} G_1(t, \theta)| = 0$$

が成り立つことである。ここで $G_0(t, \theta)$ は分布関数であるが、 $G_1(t, \theta)$ は一般には、絶対連続関数で、従って 2 次の漸近分布は、いわゆる分布関数にはならない。

ある 2 次の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n^*$ の 2 次の漸近分布が、2 次の AMU 推定量の 2 次の漸近分布の限界を一樣に達成するとき、 $\hat{\theta}_n^*$ を 2 次の漸近有効推定量であるという。

これから以後は、有限個の cusp をもつ密度関数の場合を考え、第 2 節で 2 次の AMU 推定量の 2 次の漸近分布の限界を求め、第 3 節で最尤推定量の 2 次の漸近分布を求め、第 4 節で、前節で得られた結果に関するいくつかの例題について述べる。

3. 2 次の AMU 推定量の 2 次の漸近分布の限界

ここでは、位置母数の場合を考えるので、真のパラメータ θ_0 は 0 として一般性を失わない。2 次の AMU 推定量の 2 次の漸近分布の限界を求めるために、仮説 $H^+ : \theta = \Delta$ ($\Delta > 0$)、対立仮説 $K : \theta = 0$ という仮説検定問題を考える。このとき、対数尤度比検定統計量 $\log L$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \log L &= \log \prod_{i=1}^n \frac{f(X_i)}{f(X_i - \Delta)} = \sum_{i=1}^n \{ \log f(X_i) - \log f(X_i - \Delta) \} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\Delta \frac{f'(X_i)}{f(X_i)} \left\{ 1 - \sum_{j=1}^m \chi_{I_j(\Delta)}(X_i) \right\} + \left\{ \frac{\Delta^3}{6} l^{(3)}(X_i) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\Delta^2}{2} \cdot \frac{f(X_i)f''(X_i) - f'(X_i)^2}{f(X_i)^2} \right\} \left\{ 1 - \sum_{j=1}^m \chi_{I_j(\Delta)}(X_i) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{b_{j+} - b_{j-}}{a_j} (X_i - s_j) + \Delta \frac{c_{j-}}{a_j} \right\} \chi_{I_j(\Delta)}(X_i) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \{ c_{j-} (X_i - s_j - \Delta)^2 - c_{j+} (X_i - s_j)^2 \} \chi_{I_j(\Delta)}(X_i) \right] \\ &\quad + o_p(n\Delta^3) \\ &= \sum_{i=1}^n Z_i(\Delta) + o_p(n\Delta^3) \quad (\text{say}), \end{aligned}$$

ただし、各 $j = 1, \dots, m$ について、 $\chi_{I_j(\Delta)}(x)$ の区間 $I_j(\Delta) = (s_j, s_j + \Delta)$ の定義関数、 $a_j = f(s_j)$ 、 $b_{j\pm} = \lim_{x \rightarrow s_j \pm 0} f'(x)$ 、

$c_{j\pm} = \lim_{x \rightarrow s_j \pm 0} \{ f(x)f''(x) - f'(x)^2 \} / f(x)^2$ (複号同順) とする。

そこで $\sum_{i=1}^n Z_i(\Delta)$ の漸近平均、分散、3 次のキュムラントを分布 $P_{0,n}$ の下で Δ^3 のオーダーまで求める。

各 $i = 1, \dots, n$ について

$$E_0[Z_i(\Delta)] = \frac{\Delta^2}{2} I + \frac{\Delta^3}{6} \left[L_3 - \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{b_{j+}(b_{j+} - b_{j-})}{a_j} - a_j(c_{j+} - c_{j-}) \right\} \right] + o(\Delta^3),$$

$$E_0[Z_i^2(\Delta)] = \Delta^2 I - \Delta^3 \left\{ J + \sum_{j=1}^m \frac{1}{3a_j} (b_{j+} - b_{j-})(2b_{j+} + b_{j-}) \right\} + o(\Delta^3),$$

$$E_0[Z_i^3(\Delta)] = \Delta^3 K + o(\Delta^3)$$

が成り立つ.

このとき $\Delta = t n^{-1/2}$ ($t > 0$) とすれば、次の補題が成り立つ.

補題 3.1. 仮定 (A.1) ~ (A.3) の下で、 $\sum_{i=1}^n Z_i(\Delta)$ の漸近平均、分散、3 次のキュムラントが分布 $P_{0,n}$ の下で、 $n^{-1/2}$ のオーダーまで、次のように与えられる.

$$E_0 \left[\sum_{i=1}^n Z_i(\Delta) \right] = \frac{t^2 I}{2} + \frac{t^3}{6\sqrt{n}} \left[L_3 - \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{1}{a_j} b_{j+}(b_{j+} - b_{j-}) - a_j(c_{j+} - c_{j-}) \right\} \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$V_0 \left(\sum_{i=1}^n Z_i(\Delta) \right) = t^2 I - \frac{t^3}{\sqrt{n}} \left\{ J + \sum_{j=1}^m \frac{1}{3a_j} (b_{j+} - b_{j-})(2b_{j+} + b_{j-}) \right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\kappa_0 \left(\sum_{i=1}^n Z_i(\Delta) \right) = E_0 \left[\left\{ \sum_{i=1}^n Z_i(\Delta) - E_0 \left(\sum_{i=1}^n Z_i(\Delta) \right) \right\}^3 \right] = \frac{t^3 K}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

同様にして、 $\sum_{i=1}^n Z_i(\Delta)$ の漸近平均、分散、3 次のキュムラントを分布 $P_{\Delta,n}$ の下で、 Δ^3 のオーダーまで求める.

各 $i = 1, \dots, n$ について、

$$\log \frac{f(x_i + \Delta)}{f(x_i)} = \log f(x_i + \Delta) - \log f(x_i)$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta \frac{f'(X_i)}{f(X_i)} \left\{ 1 - \sum_{j=1}^m \chi_{I_j(\Delta)}(X_i) \right\} \\
&\quad + \frac{\Delta^2}{2} \cdot \frac{f(X_i)f''(X_i) - f'(X_i)^2}{f(X_i)^2} \left\{ 1 - \sum_{j=1}^m \chi_{I_j(\Delta)}(X_i) \right\} \\
&\quad + \frac{\Delta^3}{6} l^{(3)}(X_i) \left\{ 1 - \sum_{j=1}^m \chi_{I_j(\Delta)}(X_i) \right\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{b_{j+} - b_{j-}}{a_j} (X_i - s_j) + \Delta \frac{b_{j+}}{a_j} \right\} \chi_{I_j(\Delta)}(X_i) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \{ c_{j+}(X_i - s_j + \Delta)^2 - c_j(X_i - s_j)^2 \} \chi_{I_j(\Delta)}(X_i) + o_p(\Delta^3) \\
&= Z_i^*(\Delta) + o_p(\Delta^3) \quad (\text{say})
\end{aligned}$$

となる。ただし $I_j(\Delta) = (s_j - \Delta, s_j)$ ($j=1, \dots, m$) とする。

このとき

$$\begin{aligned}
&E_{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n Z_i(\Delta) \right) + o_p(n\Delta^3) \\
&= E_{\Delta}(\log L) \\
&= n \int_{-\infty}^{\infty} \{ \log f(x) - \log f(x-\Delta) \} f(x-\Delta) dx \\
&= n \int_{-\infty}^{\infty} \{ \log f(x+\Delta) - \log f(x) \} f(x) dx \\
&= n E_0 [Z_i^*(\Delta)] + o_p(n\Delta^3) \\
&= -\frac{1}{2} n \Delta^2 I + \frac{n \Delta^3}{6} \left[L_3 - \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{b_{j-}}{a_j} (b_{j+} - b_{j-}) - a_j (c_{j+} - c_{j-}) \right\} \right] + o(n\Delta^3)
\end{aligned}$$

となる。

同様にして、 $E_{\Delta}[Z_i^2(\Delta)] = E_0[Z_i^{*2}(\Delta)]$, $E_{\Delta}[Z_i^3(\Delta)] = E_0[Z_i^{*3}(\Delta)]$

が求められる。 $\Delta = t n^{-1/2}$ ($t > 0$) とおくと、次の補題が成り立つ。

補題 3.2. 仮定 (A.1) ~ (A.3) の下で $\sum_{i=1}^n Z_i(\Delta)$ の漸近平均、分散、3次のキュムラントは、分布 $P_{\Delta, n}$ の下で、 $n^{-1/2}$ のオーダーまで次のように与えられる。

$$E_{\Delta} \left[\sum_{i=1}^n Z_i(\Delta) \right] = -\frac{t^2 I}{2} + \frac{t^3}{6\sqrt{n}} \left[L_3 - \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{1}{a_j} b_{j+} (b_{j+} - b_{j-}) - a_j (c_{j+} - c_{j-}) \right\} \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$V_{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n Z_i(\Delta) \right) = t^2 I + \frac{t^3}{\sqrt{n}} \left\{ J + \sum_{j=1}^m \frac{1}{3a_j} (b_{j+} - b_{j-}) (b_{j+} + 2b_{j-}) \right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$k_{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n Z_i(\Delta) \right) = \frac{t^3 K}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

次に $t > 0$ のときに、2次のAMU推定量の2次の漸近分布の限界を Edgeworth 展開を用いて求める (Akahira and Takeuchi, 1981). 補題 3.2 から $\sum_{i=1}^n Z_i(\Delta)$ の分布の Edgeworth 展開より

$$a = -\frac{t^2 I}{2} + \frac{t^3}{6\sqrt{n}} \left[L_3 - \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{b_{j+}}{a_j} (b_{j+} - b_{j-}) - a_j (c_{j+} - c_{j-}) \right\} \right] - \frac{tK}{6I\sqrt{n}}$$

とあくと

$$P_{\Delta, n} \left\{ \sum_{i=1}^n Z_i(\Delta) \leq a \right\} = \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となることがわかる。

$W_n = - \left\{ \sum_{i=1}^n Z_i(\Delta) - t^2 I - a \right\}$ とあくと、補題 3.1 より

$$E_0(W_n) = \frac{t^3}{6\sqrt{n}} \sum_{j=1}^m \frac{1}{a_j} (b_{j+} - b_{j-})^2 - \frac{tK}{6I\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$V_0(W_n) = t^2 I - \frac{t^3}{\sqrt{n}} \left\{ J + \sum_{j=1}^m \frac{1}{3a_j} (b_{j+} - b_{j-}) (2b_{j+} + b_{j-}) \right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\kappa_0(W_n) = -\frac{t^3 K}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となるから、 W_n の分布の Edgeworth 展開は次のようになる。

$$(3.1) \quad P_{0,n} \{W_n \leq It^2\}$$

$$= \Phi(\sqrt{I}t) + \frac{t^2}{6\sqrt{I}n} \phi(\sqrt{I}t) \left\{ 3J+K + \sum_{j=1}^m \frac{1}{a_j} (b_{j+} - b_{j-})(b_{j+} + 2b_{j-}) \right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

ただし $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ で $\Phi(u) = \int_{-\infty}^u \phi(x) dx$ とする。

$\log L = \sum_{i=1}^n Z_i(\Delta) + o_p(n\Delta^3)$ であるから、Neyman-Pearson の基本定理より、棄却域 $\left\{ \sum_{i=1}^n Z_i(\Delta) \geq a \right\}$ をもつ検定は、水準 $1/2 + o(1/\sqrt{n})$ をもつ最強検定となる。従って、2 次の AMU 推定量の 2 次の漸近分布 $P_{0,n} \{ \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \leq t \}$ の限界が、 $t > 0$ に対して、 $n^{-1/2}$ のオーダーまで (3.1) によって得られることがわかる。

$t < 0$ の場合には、仮説 $H^-: \theta = \Delta$ ($\Delta < 0$)、対立仮説 $K: \theta = 0$ なる仮説検定問題を考えて、 $\Delta = tn^{-1/2}$ ($t < 0$) として $t > 0$ の場合と同様に論じられる。

定理 3.1. 仮定 (A.1) ~ (A.3) の下で、2 次の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ の 2 次の漸近分布の限界は、次のように与えられる。

$$(3.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} [P_{0,n} \{ \sqrt{In}(\hat{\theta}_n - \theta) \leq t \} - \Phi(t) - \frac{t^2 \phi(t)}{6I^{3/2}\sqrt{n}} \left\{ 3J+K + \sum_{j=1}^m \frac{1}{a_j} (b_{j+} - b_{j-})(b_{j+} + 2b_{j-}) \right\}] \leq 0$$

for all $t > 0$,

$$(3.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} [P_{\theta, n} \{ \sqrt{I n} (\hat{\theta}_n - \theta) \leq t \} - \Phi(t) - \frac{t^2 \phi(t)}{6 I^{3/2} \sqrt{n}} \left\{ 3J + K + \sum_{j=1}^m \frac{1}{a_j} (b_{j+} - b_{j-}) (2b_{j+} + b_{j-}) \right\}] \geq 0$$

for all $t < 0$.

注意, (3.2), (3.3) の第3項目の $\{\dots\}$ において、最初の項 $3J+K$ は、分布の密度関数 $f(x)$ の正則な部分、2番目の項は $f(x)$ の非正則な部分、すなわち cusp の部分に対応している。従って、もし $f(x)$ の cusp の部分が無くなって滑らかになる、すなわち $b_{j+} = b_{j-}$ ($j=1, \dots, m$) の場合には、最初の項 $3J+K$ だけになり、正則な場合に求めた限界と一致すること分かる。

系 3.1. 仮定 (A.1) ~ (A.3) の下で、さらに

$$(3.4) \quad \sum_{j=1}^m \frac{b_{j+}^2}{a_j} = \sum_{j=1}^m \frac{b_{j-}^2}{a_j}$$

ならば、2次の AMU 推定量の2次の漸近分布の限界は、

$$\Phi(t) + \frac{t^2 \phi(t)}{6 I^{3/2} \sqrt{n}} \left\{ 3J + K + \sum_{j=1}^m \frac{1}{a_j} (b_{j+} - b_{j-}) (b_{j+} + 2b_{j-}) \operatorname{sgn} t \right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

によって与えられる。

系 3.1 は (3.2) と (3.3) の第3項目の $\{\dots\}$ の部分の和が0となることから証明される。両側指数分布の場合には (3.4) の条件が満たされる (例題 5.1 を参照)。

4. 修正された最尤推定量の2次の漸近分布

真のパラメータを θ_0 、 θ の最尤推定量を $\hat{\theta}_{ML}$ で表わす。

$t > 0$ のとき、 $\hat{\theta}_{ML} < \theta_0 + t n^{-1/2}$ と $(\partial/\partial \theta) \sum_{i=1}^n \log f(X_i - \theta_0 - t n^{-1/2}) < 0$ とは同等になる。位置母数の場合には、 $\theta_0 = 0$ として一般性を失わないから、 $\hat{\theta}_{ML} < t n^{-1/2}$ と $\sum_{i=1}^n l'''(X_i - t n^{-1/2}) > 0$ と同等になる。このとき

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n l''(X_i - \frac{t}{\sqrt{n}}) &= \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{f'(X_i)}{f(X_i)} - \frac{t}{\sqrt{n}} \frac{f''(X_i)f(X_i) - f'(X_i)^2}{f(X_i)^2} + \frac{t^2}{2n} l^{(3)}(X_i) \right\} \right. \\ &\quad \cdot \left. \left\{ 1 - \sum_{j=1}^m \chi_{I_j}(X_i) \right\} + \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{b_{j-}}{a_j} + \frac{f''(s_j-0)a_j - b_{j-}^2}{a_j^2} (X_i - s_j - \frac{t}{\sqrt{n}}) \right\} \chi_{I_j}(X_i) \right] \\ &\quad + o_p(1) \\ &= \sum_{i=1}^n Y_i + o_p(1) \quad (\text{say}) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし $I_j = (s_j, s_j + t n^{-1/2})$ ($j=1, \dots, m$) とする。第3節と同様の議論から、 $\sum_{i=1}^n Y_i / \sqrt{n}$ の漸近平均、分散、3次のキュムラントは、分布 $P_{0,n}$ の下で、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i \right) &= tI + \frac{t^2}{2\sqrt{n}} \left[L_3 - \sum_{j=1}^m \frac{1}{a_j} (b_{j+} - b_{j-}) (2b_{j+} + b_{j-}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^m \{ f''(s_j+0) - f''(s_j-0) \} \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

$$V_0 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i \right) = I - \frac{t}{\sqrt{n}} \left\{ 2J + \sum_{j=1}^m \frac{1}{a_j} (b_{j+}^2 - b_{j-}^2) \right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$K_0 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i \right) = \frac{K}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

従って、 $\sum_{i=1}^n Y_i / \sqrt{n}$ の分布の Edgeworth 展開から、 $t > 0$ の時、 $\hat{\theta}_{ML}$ の 2 次の漸近分布

$$\begin{aligned}
 (4.1) \quad P_{0,n} \{ \sqrt{n} \hat{\theta}_{ML} < t \} &= P_{0,n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i > 0 \right\} \\
 &= 1 - P_{0,n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i \leq 0 \right\} \\
 &= \Phi(\sqrt{I} t) + \phi(\sqrt{I} t) \left[- \frac{K}{6 I^{3/2} \sqrt{n}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{t^2}{2 \sqrt{I} n} \left(2J + \frac{K}{3} + L_3 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{t^2}{2 \sqrt{I} n} \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{b_{j+}}{a_j} (b_{j+} - b_{j-}) - f''(s_{j+0}) + f''(s_{j-0}) \right\} \right] \\
 &\quad + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)
 \end{aligned}$$

が得られる。

(4.1) から、最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ は 2 次の AMU 条件を満たさないことがわかる。従って $\hat{\theta}_{ML}$ を

$$\hat{\theta}_{ML}^* = \hat{\theta}_{ML} - \frac{K}{6nI^2}$$

と修正した最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}^*$ を考えると、(4.1) から $\hat{\theta}_{ML}^*$ の 2 次の漸近分布も求められる。

また $t < 0$ の場合にも、 $t > 0$ のときと同様にして、修正最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}^*$ の 2 次の漸近分布も得られる。

定理 4.1. 仮定 (A.1) ~ (A.3) の下で、修正最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}^* = \hat{\theta}_{ML} - \{K/(6nI^2)\}$ の 2 次の漸近分布は、次のように与えられる。

$$(4.2) \quad P_{\theta,n} \{ \sqrt{In} (\hat{\theta}_{ML}^* - \theta) \leq t \}$$

$$= \begin{cases} \Phi(t) + \frac{t^2 \phi(t)}{6I^{3/2}\sqrt{n}} \left[6J + K + 3L_3 - 3 \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{b_{j+}}{a_j} (b_{j+} - b_{j-}) - f''(s_{j+0}) + f''(s_{j-0}) \right\} \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & \text{for all } t > 0; \\ \Phi(t) + \frac{t^2 \phi(t)}{6I^{3/2}\sqrt{n}} \left[6J + K + 3L_3 - 3 \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{b_{j-}}{a_j} (b_{j+} - b_{j-}) - f''(s_{j+0}) + f''(s_{j-0}) \right\} \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & \text{for all } t < 0. \end{cases}$$

注意. 修正最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}^*$ の 2 次の漸近分布 (4.2) の右辺の項 $[\dots]$ の $6J + K + 3L_3$ は、分布の密度関数 $f(x)$ の正則部分に、その他は $f(x)$ の非正則部分、すなわち cusp の部分に対応している。従って、もし $f(x)$ の cusp を滑らかになる、すなわち $b_{j+} = b_{j-}$, $f'(s_{j+0}) = f'(s_{j-0})$ の場合には、 $[\dots]$ の項は $6J + K + 3L_3$ のみとなり、正則な場合には $L_3 = E_0[l^{(3)}(x)] = -3J - K$ でさらに位置母数の時の $K = -2J$ という関係に注意すると、 $6J + K + 3L_3 = J$ となり以前に求めた限界と一致することが分かる。

系 4.1. 仮定 (A.1) ~ (A.3) の下で、さらに

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \frac{b_{j+}^2}{a_j} - 2f''(s_j+0) \right\} = \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{b_{j-}^2}{a_j} - 2f''(s_j-0) \right\}$$

ならば、修正最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}^*$ の 2 次の漸近分布は

$$\Phi(t) + \frac{t^2 \phi(t)}{6I^{3/2}\sqrt{n}} \left[6J+K+3L_3 - 3 \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{b_{j+}}{a_j} (b_{j+} - b_{j-}) - f''(s_j+0) + f''(s_j-0) \right\} \operatorname{sgn} t \right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

によって与えられる。

修正最尤推定量の 2 次の漸近分布は、定理 3.1, 系 3.1 で与えられた 2 次の AMU 推定量の 2 次の漸近分布の限界と $n^{1/2}$ のオーダーの項を比較できる。一般に、 $\hat{\theta}_{ML}^*$ の 2 次の漸近分布はその限界も一様に達成しないから、 $\hat{\theta}_{ML}^*$ は 2 次の漸近有効推定量にならないことがわかる。

5. 例題

この節では、前節で得られた結果に関するいくつかの例を述べる。

例題 5.1. (両側指数分布). $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ をたかいに独立に、いずれも密度関数 $f(x-\theta) = e^{-|x-\theta|}/2$ ($-\infty < x < \infty$) に従う確率変数列とする。このとき $f(x)$ は $x=0$ で cusp をもつから、 $m=1$ で $s_1=0$ の場合になる。また $I=1, J=K=L_3=0$ $a_1 = b_{1-} = -b_{1+} = 1/2$, $f''(0-0) = f''(0+0) = 1/2$ となる。よって

系 3.1 の条件は満たされるから、2 次の AMU 推定量の 2 次の漸近分布の限界は

$$\Phi(t) - \frac{t^2 \phi(t)}{6\sqrt{n}} \operatorname{sgn} t + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となる。一方は、最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ は $X_1, \dots, X_n$ の中央値 $\operatorname{med} X_i$ になり、この 2 次の漸近分布は、系 4.1 より

$$\Phi(t) - \frac{t^2 \phi(t)}{2\sqrt{n}} \operatorname{sgn} t + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となる。従って $\hat{\theta}_{ML}$ は 2 次の AMU であるが、その分布は限界を一樣に達成しないから、2 次の漸近有効推定量にはならないことが分かる。これらの事実は、Akahira and Takeuchi (1981, page 97) の結果と一致している。

例題 5.2. (対称な密度関数). $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ をたかいに独立に、いずれも密度関数

$$f(x-\theta) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{x-\theta} & (x < \theta), \\ \frac{1}{3} & (\theta \leq x < \theta+1), \\ \frac{1}{3} e^{1-(x-\theta)} & (\theta+1 < x), \end{cases}$$

に従う確率変数列とする。このとき、 $f(x)$ は $x=0, 1$ で cusp をもつから $m=2$ で $s_1=0, s_2=1$ の場合になる。また $I=2/3, J=K=L_3=0$ で、 $a_1=a_2=1/3, b_{1-}=1/3,$

$b_{1+} = 0$, $b_{2-} = 0$, $b_{2+} = -1/3$, $f''(0-0) = 1/3$, $f''(0+0) = 0$,
 $f''(1-0) = 0$, $f''(1+0) = 1/3$ となる. 従って 系 3.1 から,
 2 次の AMU 推定量の 2 次の漸近分布の限界は,

$$\Phi(t) - \frac{t^2 \phi(t)}{18 \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \sqrt{n}} \operatorname{sgn} t + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となり, 系 4.1 から 最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ の 2 次の漸近分布は

$$\Phi(t) - \frac{t^2 \phi(t)}{6 \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \sqrt{n}} \operatorname{sgn} t + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

になり, $\hat{\theta}_{ML}$ は 2 次の AMU となるが, 2 次の漸近有効推定量にはならないことが分かる.

例題 5.3. (非対称な密度関数). $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ をたがい
 に独立に, いずれも密度関数

$$f(x-\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x-\theta} & (x < \theta), \\ \frac{1}{2} & (\theta \leq x < \theta + \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{2} e^{-2(x-\theta-\frac{1}{2})} & (\theta + \frac{1}{2} \leq x), \end{cases}$$

に従う確率変数列とする. このとき $f(x)$ は $x=0, 1/2$ の時
 cusp をもつから, $m=2$ で $S_1=0$, $S_2=1/2$ の場合になる.

また, $I=3/2$, $J=0$, $K=-3/2$, $L_3=0$, $a_1=a_2=1/2$,

$b_{1-}=1/2$, $b_{1+}=0$, $b_{2-}=0$, $b_{2+}=-1$, $f''(0-0)=1/2$,

$f''(0+0)=0$, $f''(\frac{1}{2}-0)=0$, $f''(\frac{1}{2}+0)=2$ となる. よって

定理 3.1 から、2 次の AMU 推定量の 2 次の漸近分布の限界は

$$\begin{cases} \Phi(t) - \frac{t^2 \phi(t)}{12 \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & (t > 0), \\ \Phi(t) + \frac{t^2 \phi(t)}{3 \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & (t < 0) \end{cases}$$

となる。一方、定理 4.1 から、修正最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}^* = \hat{\theta}_{ML} + (1/4n)$ の 2 次の漸近分布は

$$\begin{cases} \Phi(t) - \frac{t^2 \phi(t)}{2 \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & (t > 0), \\ \Phi(t) + \frac{3 t^2 \phi(t)}{4 \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & (t < 0) \end{cases}$$

となるから、 $\hat{\theta}_{ML}^*$ は 2 次の漸近有効推定量にはならないことが分かる。

6. おわりに.

これまでの議論から分かるように、ここで考えた有限個の cusp をもつ密度関数は、正則、非正則の両面をもつ場合になっていて、そのことは、1 次の漸近分布には影響しないが 2 次の漸近分布まで考えると、 $n^{-1/2}$ のオーダーで利いてくることかわかる。さらに、AMU 推定量の 2 次の漸近分布の $n^{-1/2}$ のオーダーの項に、その正則、非正則の両面に対応する

部分が現われる。また2次のAMU推定量の2次の漸近分布の限界が得られているので、修正最尤推定量のみならず、他の2次のAMU推定量の2次の漸近分布の $n^{-1/2}$ のオーダーの項での差が求められる。それによって、2次のオーダーまでの漸近的比較が可能になるであろう。

References

Akahira, M. (1982). Remarks on asymptotic properties of generalized Bayes estimators in non-regular cases. Technical Report No. 185, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, California.

Akahira, M. and Takeuchi, K. (1981). Asymptotic Efficiency of Statistical Estimators: Concepts and Higher Order Asymptotic Efficiency. Lecture Notes in Statistics 7, Springer, New York.