

ある種の高次元結び目の構成及びその性質

佐賀大学教育学部 丸本嘉彦 (Yoshihiko Marumoto)

このノートでは [1], [2] の拡張について, その概略を述べることにする。詳細は [3] を見られたい。

すべての議論は PL カテゴリーで行なう。

1次元結び目については, その豊富な具体例が結び目理論の研究のための手助けとなっている。しかし高次元の場合, 結び目の構成法はあまり多くは知られていない, 例えば ribbon knots, spun knots, twist spun knots あるいは fibered knots 等である。

ここでは次で定義される結び目について考える。

定義 1. $1 \leq p \leq n$ とし, $S^{n+2} = \partial D^{n+3}$ としおく。 $K \subset S^{n+2}$ が次をみたすとき, n -knot of type p であると呼ぶ:

D^{n+3} 上の trivial $(n-p+2)$ -handles $\{h_i^{n-p+2}\}$ で次をみたすものが存在する,

- (1) $K^n \cap h_i^{n-p+2} = \emptyset$ for $\forall i$,
 (2) K^n は $\partial(D^{n+3} \cup \bigcup_i h_i^{n-p+2})$ 内で $(n+1)$ -disk を張る。

上で定義された結び目はそれほど特殊なものではなく、次は容易に分かる：

命題 2. ribbon n -knot は type 1 であり, type n でもある。

この命題に関してはもっと一般化したものを後で示す。

2-knot に関しては, 松本 [4] の結果を使うことにより次が示される：

定理 3. すべての 2-knot は type 2 である。

命題 2, 定理 3 及び ribbon でない 2-knot の存在より,

系 3.1. $\{2\text{-knots of type 1}\} \subseteq \{2\text{-knots of type 2}\}$

次は knots of type p と [1], [2] との関連を示す：

定理 4. $K^n \subset S^{n+2}$ が type p であるための必要十分条件は次

が成り立つことである：

- D^{n+3} の trivial handle decomposition $D_0^{n+3} \cup \bigcup_i h_i^p \cup \bigcup_i h_i^{p+1}$
 及び $(n+1)$ -disk $\Delta \subset \partial D_0^{n+3}$ が存在して次を満たす
- (1) $\Delta \cap h_i^p = \emptyset, \quad \partial \Delta \cap h_i^{p+1} = \emptyset \quad \text{for } \forall i,$
 - (2) $(S^{n+2}, K^n) = (\partial D^{n+3}, \partial \Delta).$

定理 4 と [1] より，次が得られる：

系 4.1. K^n が ribbon n -knot であるための必要十分条件は
 K^n が type 1 であることである。

さらに定理 4 を利用すると，異なる type の間の関係が得られる，

定理 5. $2 \leq 2p \leq n$ としたとき，

$$\{n\text{-knots of type } p\} \subset \{n\text{-knot of type } (n-p+1)\}$$

この定理 5 の逆の関係については，系 3.1 より一般には成り立たない。

定理 4 において，交わり $\Delta \cap \alpha(h_i^{p+1})$ は一般の位置の理論より $(p-1)$ 次元多様体であることしか分らない ($\alpha(h_i^{p+1})$ は

$(p+1)$ -handle h_i^{p+1} の attaching sphere を表す)。本質的には Hacon [5] の議論及び [2] より次が分かる：

定理 6. 定理 4 において, $p=1, 2$ あるいは $3 \leq p \leq n-1$ とするとき, 次の条件 (3) を付け加えることができる,

(3) Δ^{p+1} と $\alpha(h_i^{p+1})$ は一般の位置で交わり, $\Delta \cap \alpha(h_i^{p+1})$ は有限個の $(p-1)$ -spheres からなる。

次に type p knot と bounding manifold, immersed disk との関係について述べる。

定義 7.

(1) $f_i: S^p \times D^q \rightarrow M$ を disjoint embeddings と $\text{Im } f_i \subset \text{int } M$ あるいは $f_i^{-1}(\partial M) = S^p \times \partial D^q$ をみたしているとする。このとき $\{f_i\}$ (あるいは $\{f_i(S^p \times D^q)\}$) が M で trivial であるとは次をみたすときである：

$\exists \bar{f}_i: B^{p+1} \times D^q \rightarrow M$: disjoint embeddings

such that

$$\bar{f}_i|_{\partial B \times D} = f_i$$

$$\text{Im } \bar{f}_i \subset \text{int } M \quad \text{if} \quad \text{Im } f_i \subset \text{int } M$$

$$\bar{f}_i^{-1}(\partial M) = B^{p+1} \times \partial D^q \quad \text{if} \quad f_i^{-1}(\partial M) = S^p \times \partial D^q$$

(2) $W \subset S^{n+2}$ を orientable $(n+1)$ -manifold τ , $\partial W \approx S^n$ となるものが次をみたすとき, W を semi-unknotted of type p と呼ぶ:

$$\exists \bar{D}_i : S^{n-p+1} \times D^p \rightarrow \text{int } W : \text{disjoint embeddings}$$

such that

$$\chi(W; \{D_i\}) \text{ は } (n+1)\text{-disk}$$

$$\{j \circ D_i\} \text{ は trivial in } S^{n+2}$$

ただし $\chi(W; \{D_i\})$ は W を $\{D_i\}$ を使って surgery して得られるものを示し, $j: W \rightarrow S^{n+2}$ は inclusion map である。

定義 8.

(i) $p: D^{n+1} \rightarrow S^{n+2}$ が次をみたすとき pseudo-ribbon map for K^n と言う;

$$(ii) \quad p|_{\partial D^{n+1}} \text{ は embedding, } p(\partial D^{n+1}) = K^n$$

$$(iii) \quad \text{任意の } x \in D^{n+1} \text{ に対し}$$

$$\exists V: \text{ nbd of } x \text{ such that } p|_V: \text{embedding}$$

$$\text{しかも } \#p^{-1}p(x) \leq 2.$$

$$(iii) \quad \#p^{-1}p(x) = 2 \text{ のとき, } p(x) = p(x') \quad (x \neq x') \text{ とする}$$

$$\exists V, V': \text{ nbd of } x, x' \text{ s.t. } p|_V, p|_{V'}: \text{embedding}$$

$$\text{でしかも, } p(V) \text{ と } p(V') \text{ は general position で交わる}$$

$$\text{ようにできる。}$$

(2) pseudo-ribbon map $\rho: D^{n+1} \rightarrow S^{n+2}$ が次をみたすとき,
separable と言う;

$\exists \Delta_i$: disjoint $(n+1)$ -disks in $\text{int } D^{n+1}$

such that

$\rho|_{\bigcup_i \Delta_i}, \rho|_{D^{n+1} - \bigcup_i \Delta_i}$ は共に embeddings

(3) pseudo-ribbon map $\rho: D^{n+1} \rightarrow S^{n+2}$ が次をみたすとき,
 type p とあると言う;

$\{x \in D^{n+1} \mid \# \rho^{-1}(\rho(x)) = 2\}$ の各 component は $S^{p+1} \times D^{n-p+1}$
 と同相で, それぞれ $T_1^+, T_1^-, T_2^+, T_2^- \dots$ としたとき次
 を満たす:

$$\begin{cases} (1) \rho(T_i^+) = \rho(T_i^-) \\ (2) T_i^+ : \text{proper in } D^{n+1}, T_i^- \subset \text{int } D^{n+1} \\ (3) \bigcup_i T_i^+ : \text{trivial in } D^{n+1} - \bigcup_i T_i^- \end{cases}$$

[6] で ribbon knot を ribbon map を使って特徴づけがされ
 ているが, も, 弱い形で次が得られる;

定理 9. K^n が ribbon n -knot であるための必要十分条件は K^n
 に対する separable pseudo-ribbon map が存在することである。

定理 10. $1 \leq p \leq n$ とし, K^n を n -knot とするとき, 次は同値

- (1) K^n に対する pseudo-ribbon map of type p が存在する
- (2) K^n を張る semi-unknotted of type p の $(n+1)$ -manifold が存在する。

type p knot と bounding manifold に関して は次が示される:

定理 11.1 $1 \leq p \leq n$ とし、 W を K^n を張る semi-unknotted of type p $(n+1)$ -manifold とすると K^n は type p である。

その逆に関しては、定理 6 を使うことにより、

定理 11.2 $p=1, 2$ あるいは $3 \leq p \leq n-1$ とし、 K^n を type p とすると、 K^n を張る semi-unknotted manifold of type p が存在する。

つまり、定理 10, 11.1, 11.2 をまとめると、

系 12.1 $p=1, 2$ あるいは $3 \leq p \leq n-1$ のとき次は同値である

- (1) K^n は n -knot of type p である、
- (2) K^n に対する pseudo-ribbon map of type p が存在する、
- (3) K^n を張る semi-unknotted mfd. of type p が存在する、

さらに $1 \leq p \leq n$ のときには

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$$

となる。

定理 3, 11.2 を合わせると,

系 12.2. すべての 2-knot に対し pseudo-ribbon map が存在する。

次に type p knot の代数的性質について述べる:

定理 4 を用い, 注意深く計算すると n により次が得られる:

定理 13. K^n を n -knot of type p とし, $q = n - p + 2$ とおく。

$\tilde{X}$ を $S^{n+2} - K^n$ の infinite cyclic cover とすると,

$$H_i(\tilde{X}) = 0 \quad \text{if } 1 \leq i \leq n, \text{ ただし } i \neq p, q-1,$$

定義 14. K^n を n -knot of type p とし, $2 \leq p < n - p + 1$ としと置く。

定理 4 で得られた必要十分条件において, $V = D_0^{n+3} \cup \bigcup_i h_i^p$ と

し, Δ' は Δ の interior を V の interior に push してえられたもの

とする, すると $\Delta' : \text{proper in } V$ としても $\partial \Delta' = \partial \Delta$ となっ

ている。このとき $V_0 = V - \Delta'$ とおくと, $\pi_1(V_0) \cong \mathbb{Z}$ であり

この生成元を大とし, $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ と書くことにすると,
 $\pi_p(V_0)$ は Λ -module として考えることができ, この時各 p -
 handle h_i^p から自然に生成元 z_i が得られる。この時

$$[\alpha(h_i^{p+1})] = \sum \lambda_{ij}(t) z_j$$

とおくことができる ($\lambda_{ij}(t) \in \Lambda$),

$$M_K(t) = (\lambda_{ij}(t))$$

と定義する。

定義 15. 単位元を持つ ^{可換} 環 A 上の正方行列全体の集合を $\mathcal{M}(A)$

と書くことにし, $M_1, M_2 \in \mathcal{M}(A)$ に対して, これらが

S -equivalent の時 $M_1 \sim_S M_2$ と書くことにする,

つまり, 行(あるいは列)に関する基本変形及び $M \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 を有限回施して一方から他方に変化する時, $M_1 \sim_S M_2$ と書く。

定義 16. $\varphi: \mathcal{M}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{Z})$ とし $\varphi(M(t)) = M(1)$ とし,

これから自然に $\bar{\varphi}: \mathcal{M}(\Lambda) / \sim_S \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{Z}) / \sim_S$ が得られる。この

とき $m_0 = \bar{\varphi}^{-1}([E])$ とおく。ただし E は単位行列。

以上の定義のもとで次が成り立つ:

定理 17. m_0 は無限個の元を含み, $2 \leq p < n-p+1$ のとき,

n -knots of type p 全単の集合から M_0 への全単射が存在する。

より n 次も得られる；

定理 18. $4 \leq 2p \leq n$, $4 \leq 2q \leq n$, $p \neq q$ とし, K^n は type p であり, また type q でもあるとする. この時 K^n は unknot である。

References

- [1] Asano, K., Marumoto, Y., Yanagawa, T.: Ribbon knots and ribbon disks, Osaka J. Math., 18 (1981), 161-174.
- [2] Marumoto, Y.: A class of higher dimensional knots, J. Fac. Educ. Saga Univ., 31 (1984) 177-185
- [3] Marumoto, Y.: Some higher dimensional knots, (in preparation)
- [4] Matumoto, T.: On a weakly unknotted 2-sphere in a simply connected 4-manifold, Osaka J. Math., 21 (1984), 489-492.
- [5] Hacon, D.: Knotted spheres in tori, Quart. J. Math. 20 (1969) 431-445.
- [6] Yanagawa, T.: On ribbon 2-knots. I., Osaka J. Math., 6 (1969), 447-464.