

1 次元 2 状態量子ウォークの定常測度について

横浜国立大学大学院・工学研究院 今野 紀雄 (Norio Konno)

Graduate School of Engineering,
Yokohama National University

横浜国立大学大学院・工学研究院 竹居 正登 (Masato Takei)

Graduate School of Engineering,
Yokohama National University

1 次元 2 状態量子ウォークにおいて、一様測度は定常測度であることが分かるが ([1]), その他にも定常測度が存在するかという問題 ([3]) を考える.

1 1 次元 2 状態量子ウォーク

1.1 定義

2×2 のユニタリ行列 $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U(2) = U(2, \mathbb{C})$ に対応する 1 次元 2 状態量子ウォークを次のように定義する.

- $P = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$ を用いて $P + Q = U$ と分解する.

- 時刻 $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, 位置 $x \in \mathbb{Z}$ における振幅 (amplitude) を

$$\Psi_n(x) = \begin{bmatrix} \Psi_n^L(x) \\ \Psi_n^R(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \text{ で表し, } \mu_n(x) = |\Psi_n^L(x)|^2 + |\Psi_n^R(x)|^2 \text{ を,}$$

時刻 n で位置 x にウォーカーが観測される「度合い」と考える.

- 振幅の関係式: $\Psi_{n+1}(x) = P\Psi_n(x+1) + Q\Psi_n(x-1)$, すなわち,

$$\begin{bmatrix} \Psi_{n+1}^L(x) \\ \Psi_{n+1}^R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\Psi_n^L(x+1) + b\Psi_n^R(x+1) \\ c\Psi_n^L(x-1) + d\Psi_n^R(x-1) \end{bmatrix} \text{ と定める.}$$

- 次の記号を導入すると $\Psi_n = (U^{(s)})^n \Psi_0$ と表すことができる:

$$U^{(s)} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & O & P & O & O & O & \cdots \\ \cdots & Q & O & P & O & O & \cdots \\ \cdots & O & Q & O & P & O & \cdots \\ \cdots & O & O & Q & O & P & \cdots \\ \cdots & O & O & O & Q & O & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \left(O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$\Psi_n = {}^T \left[\cdots, \begin{bmatrix} \Psi_n^L(-1) \\ \Psi_n^R(-1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Psi_n^L(0) \\ \Psi_n^R(0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Psi_n^L(1) \\ \Psi_n^R(1) \end{bmatrix}, \cdots \right].$$

- 一般に, $\Psi = {}^T \left[\dots, \begin{bmatrix} \Psi^L(-1) \\ \Psi^R(-1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Psi^L(0) \\ \Psi^R(0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Psi^L(1) \\ \Psi^R(1) \end{bmatrix}, \dots \right]$ に対して

$$\phi(\Psi) = {}^T [\dots, |\Psi^L(-1)|^2 + |\Psi^R(-1)|^2, |\Psi^L(0)|^2 + |\Psi^R(0)|^2, |\Psi^L(1)|^2 + |\Psi^R(1)|^2, \dots]$$

と定め, $\phi((U^{(s)})^n \Psi_0)$ を初期振幅 Ψ_0 に対する時刻 n での測度という.

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{U}(2) \text{ は}$$

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ -\Delta \bar{b} & \Delta \bar{a} \end{bmatrix} \quad [|a|^2 + |b|^2 = 1, |\Delta| = 1]$$

と書き直すことができる ($\det U = \Delta$). このことから, 次の3つの場合に分けて考察することが多い.

- $a = 0$ の場合: 反対角行列 $U = \begin{bmatrix} 0 & e^{i\eta} \\ -\Delta e^{-i\eta} & 0 \end{bmatrix}$ ($\eta \in [0, 2\pi)$, $\Delta \in \mathbb{C}$).
- $b = 0$ の場合: 対角行列 $U = \begin{bmatrix} e^{i\eta} & 0 \\ 0 & \Delta e^{-i\eta} \end{bmatrix}$ ($\eta \in [0, 2\pi)$, $\Delta \in \mathbb{C}$).
- $abcd \neq 0$ の場合.

1.2 1点から出発する場合

確率1で原点からウォーカーが出発する場合は, 初期の確率振幅 Ψ_0 が

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} \varphi = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 & (x = 0), \\ \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & (x \neq 0) \end{cases} \quad [x \in \mathbb{Z}]$$

で与えられる. 時刻 $n \in \mathbb{Z}_+$, 位置 $x \in \mathbb{Z}$ における確率振幅 Ψ_n は次のようになる:

$$\begin{array}{ccccccc} & \dots & -2 & -1 & 0 & +1 & +2 & \dots \\ n=0 & & & & \varphi & & & \\ n=1 & & & P\varphi & \swarrow \searrow & Q\varphi & & \\ n=2 & & P^2\varphi & \swarrow \searrow & (QP+PQ)\varphi & \swarrow \searrow & Q^2\varphi & \\ \vdots & & \swarrow \searrow & & \vdots & & \swarrow \searrow & \\ & & & & & & & \end{array}$$

時刻 n でのウォーカーの位置の確率分布 μ_n は

$$\underbrace{\mu_0(x)}_{\text{"P}(X_0=x)"} = \phi(\Psi_0)(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0), \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases} \quad [x \in \mathbb{Z}],$$

$$\underbrace{\mu_n(x)}_{\text{"P}(X_n=x)"} = \phi(\Psi_n)(x) = \phi((U^{(s)})^n \Psi_0)(x) \quad [x \in \mathbb{Z}]$$

である.

$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{U}(2)$ とする. 次のことが知られている. (詳しくは文献 [2] を参照.)

- $b = 0$ の場合,

$$\mu_n = |\alpha|^2 \delta_{-n} + |\beta|^2 \delta_{+n}$$

だから,

$$P\left(\frac{X_n}{n} \in \{-1, 1\}\right) = 1$$

となり, 時間に比例して広がってゆく.

- $a = 0$ の場合,

$$\mu_{2n}(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0), \\ 0 & (x \neq 0), \end{cases} \quad \mu_{2n+1}(x) = \begin{cases} |\beta|^2 & (x = -1), \\ |\alpha|^2 & (x = +1), \\ 0 & (x \neq \pm 1) \end{cases}$$

であり, 原点の近くに局在化していることが分かる. 特に,

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{d} \delta_0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

- $abcd \neq 0$ を満たすとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(z_1 \leq \frac{X_n}{n} \leq z_2\right) = \int_{z_1}^{z_2} \{1 - C(a, b; \alpha, \beta)x\} f_K(x; |a|) dx$$

が成り立つ. ここで,

$$f_K(x; r) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi(1-x^2)\sqrt{r^2-x^2}} 1_{(-r,r)}(x),$$

$$C(a, b; \alpha, \beta) = |\alpha|^2 - |\beta|^2 + \frac{a\alpha\bar{b}\beta + \bar{a}\alpha b\beta}{|a|^2}.$$

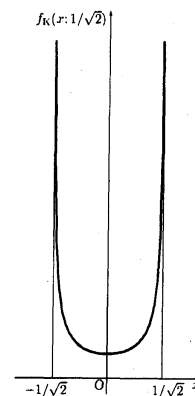
典型的な場合が

$$U = H := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

とした Hadamard walk である. このとき,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(z_1 \leq \frac{X_n}{n} \leq z_2\right) &= \int_{z_1}^{z_2} f_K(x; 1/\sqrt{2}) dx \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\pi(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}} dx \end{aligned}$$

$$[-1/\sqrt{2} \leq z_1 < z_2 \leq 1/\sqrt{2}].$$



2 定常測度

定常測度の集合を

$$\mathcal{M}_s(U) = \left\{ \mu \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \setminus \{0\} : \begin{array}{l} \exists \Psi_0 \text{ s.t.} \\ \forall k = 0, 1, 2, \dots, \phi((U^{(s)})^k \Psi_0) = \mu \end{array} \right\}$$

によって定義する：ここでは Ψ_0 は確率振幅には限らず、一般の振幅まで広げて考える。
補助的に、 $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$\mathcal{M}_n(U) = \left\{ \mu \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}} \setminus \{0\} : \begin{array}{l} \exists \Psi_0 \text{ s.t.} \\ \forall k = 0, 1, \dots, n, \phi((U^{(s)})^k \Psi_0) = \mu \end{array} \right\}$$

と定義すると、

$$\mathcal{M}_1(U) \supseteq \mathcal{M}_2(U) \supseteq \dots \supseteq \mathcal{M}_n(U) \supseteq \mathcal{M}_{n+1}(U) \supseteq \dots, \quad \mathcal{M}_s(U) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n(U).$$

定常測度を見いだす基本的な手段として、

$$U^{(s)}\Psi = \lambda\Psi \quad [\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1]$$

という固有値問題を考察する方法がある：初期振幅 $\Psi_0 = \Psi$ のとき、 $\Psi_n = \lambda^n \Psi$ だから、

$$\mu_n = \phi(\Psi_n) = \phi(\lambda^n \Psi) \stackrel{|\lambda|=1}{=} \phi(\Psi) = \mu_0$$

となって、 $\phi(\Psi) \in \mathcal{M}_s$ と分かる。上の式は

$$\begin{cases} \lambda \Psi^L(x) = a \Psi^L(x+1) + b \Psi^R(x+1), \\ \lambda \Psi^R(x) = c \Psi^L(x-1) + d \Psi^R(x-1) \end{cases} \quad [\forall x \in \mathbb{Z}] \quad (*)$$

と書き直すことができる。

3 主結果

$c > 0$ として $\mu_u^{(c)}(x) = c \quad (x \in \mathbb{Z})$ と定め、 $\mathbb{Z}$ 上の一様測度の全体を

$$\mathcal{M}_{\text{unif}} = \{\mu_u^{(c)} : c > 0\}$$

で表す。一様測度は 1 次元 2 状態量子ウォークの定常測度となることが分かる：

定理 3.1 ([1, 3]). 任意の $U \in U(2)$ に対して、 $\mathcal{M}_s(U) \supset \mathcal{M}_{\text{unif}}$.

注意 3.2. 定理 3.1 は、最初 [1] により固有値問題の考察を通じて証明された。一方、[3] は、

$$\varphi := \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad [c := |\alpha|^2 + |\beta|^2 > 0]$$

を任意にとり、全ての $x \in \mathbb{Z}$ で $\Psi_0(x) = \varphi$ とした初期振幅 Ψ を考えると、これは固有ベクトルとは限らないが $((U^{(s)})^n \Psi)(x) = U^n \varphi$ が成り立つことに注目し、 $\mu_u^{(c)} \in \mathcal{M}_s(U)$ となることの別証明を与えた。この方法によると、[1] で扱われた Grover walk (1 次元 3 状態量子ウォークの代表例) 等も含め、より一般のモデルにおいて一様測度が定常測度となることが分かる。

$U \in U(2)$ が対角行列でない場合には、一様でない定常測度が存在する：

定理 3.3 ([3]). $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U(2)$ が $abcd \neq 0$ または $a = 0$ を満たすとき、

$$\mathcal{M}_s(U) \setminus \mathcal{M}_{\text{unif}} \neq \emptyset.$$

$U \in U(2)$ が対角行列である場合には、定常測度は一様測度に限られる：

定理 3.4 ([3]). $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U(2)$ が $b = 0$ を満たすとき、 $\mathcal{M}_s(U) = \mathcal{M}_{\text{unif}}$.

さらに詳しく、 $\mathcal{M}_1(U) \supsetneq \mathcal{M}_2(U) = \mathcal{M}_s(U) = \mathcal{M}_{\text{unif}}$ が成立する。

定理 3.3, 3.4 の証明の概要を述べる。

- $b = 0$ の場合, (*) は

$$\begin{cases} \Psi_n^L(x) = e^{i\eta n} \Psi_0^L(x+n), \\ \Psi_n^R(x) = \Delta^n e^{-i\eta n} \Psi_0^R(x-n) \end{cases} \quad [\forall n \in \mathbb{Z}_+, \forall x \in \mathbb{Z}]$$

となるが、 $\mu_0(x) = |\Psi_0^L(x)|^2 + |\Psi_0^R(x)|^2 =: a_x + b_x$ とおくと、

$$\underbrace{a_{x+n} + b_{x-n}}_{=\mu_n(x)} = \underbrace{a_x + b_x}_{=\mu_0(x)} \quad [\forall n \in \mathbb{Z}_+, \forall x \in \mathbb{Z}]$$

と書き直される。この式で $n = 1, 2$ としたもののから定常測度が一様測度でなければならないことが導かれる。測度だけで議論できる点が他の場合との大きな違いといえる。

- $a = 0$ の場合, (*) は

$$\begin{cases} \lambda \Psi^L(x) = e^{i\eta} \Psi^R(x+1), \\ \lambda \Psi^R(x) = -\Delta e^{-i\eta} \Psi^L(x-1) \end{cases} \quad [\forall n \in \mathbb{Z}_+, \forall x \in \mathbb{Z}]$$

となるから、

$$\left(1 + \frac{\Delta}{\lambda^2}\right) \Psi^j(x) = 0 \quad [j = L, R; \forall x \in \mathbb{Z}]$$

が成り立つ。 $\lambda_{\pm} := \pm i\sqrt{\Delta}$ に対して、 $U^{(s)}\Psi^{(\pm)} = \lambda_{\pm}\Psi^{(\pm)}$ を満たす $\Psi^{(\pm)}$ を構成することができる：

$$\begin{cases} \Psi^{(\pm, L)}(2x) = \alpha_{2x}, \quad \Psi^{(\pm, R)}(2x) = \beta_{2x} \quad [\alpha_{2x}\beta_{2x} \neq 0: \text{自由}], \\ \Psi^{(\pm, L)}(2x-1) = \frac{e^{i\eta}}{\lambda_{\pm}}\beta_{2x}, \quad \Psi^{(\pm, R)}(2x+1) = \frac{\lambda_{\pm}}{e^{i\eta}}\alpha_{2x}. \end{cases}$$

$C := \frac{e^{i\eta}}{\lambda_{\pm}}, C' := \frac{\lambda_{\pm}}{e^{i\eta}}$ とおくと、次の要領で定常測度が決まる：

$$\begin{array}{ccccccc}
& \dots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \dots \\
\Psi^{(\pm,L)}(x) & & \alpha_{-2} & C\beta_0 & \alpha_0 & C\beta_2 & \alpha_2 & \\
& & \nwarrow & \searrow & \nwarrow & \searrow & \nwarrow & \\
\Psi^{(\pm,R)}(x) & & \beta_{-2} & C'\alpha_{-2} & \beta_0 & C'\alpha_0 & \beta_2 &
\end{array}$$

α_{2x}, β_{2x} ($x \in \mathbb{Z}$) は自由に決められるから, 多種多様な定常測度が存在することが分かる.

- $abcd \neq 0$ の場合, 次のようにして定常測度を構成できる:

▷ (*) が成り立つとき, $\Psi^L(x)$ および $\Psi^R(x)$ は, いずれも

$$a_{x+2} - \frac{1}{a} \left(\lambda + \frac{\Delta}{\lambda} \right) a_{x+1} + \frac{d}{a} a_x = 0 \quad [\forall x \in \mathbb{Z}]$$

を満たす.

▷ 特性方程式 $\gamma^2 - \frac{1}{a} \left(\lambda + \frac{\Delta}{\lambda} \right) \gamma + \frac{d}{a} = 0$ が重根をもつような λ (4つある) を考えると, 対応する重根 $\gamma = \frac{\lambda + \Delta\bar{\lambda}}{2a}$.

▷ $\Psi^L(x) = (A + xB)\gamma^x$ のとき,

$$\Psi^R(x) = \left\{ (A + xB) \left(\frac{\lambda - \Delta\bar{\lambda}}{2} \right) - \lambda B \right\} \frac{\gamma^{x-1}}{b}.$$

▷ $\phi(\Psi)$ を計算すると,

$$\phi(\Psi)(x) = 2|A + xB|^2 - 2x|B|^2 + \frac{|B|^2 - \Re(A\bar{B}(1 - \Delta\bar{\lambda}^2))}{|b|^2}$$

となり, このクラスには一様でない定常測度が含まれている; 例えば, Hadamard walk の場合,

$$\text{任意の } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ に対して, } \mu_n(x) = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$$

となる初期振幅 Ψ_0 を構成することができる.

参考文献

- [1] Konno, N. (2014). The uniform measure for discrete-time quantum walks in one dimension, *Quantum Inf. Process.*, **13**, 1103–1125.
- [2] 今野紀雄 (2014). 量子ウォーク, 森北出版.
- [3] Konno, N. and Takei, M. (2014). The non-uniform stationary measure for discrete-time quantum walks in one dimension, arXiv:1410.7651