

非粘性二次元乱流の定常エネルギースペクトル

航 技 研 山本稀義
岩手大 工 細川 巖

§1. 序 論

二次元乱流は大規模な大気乱流^{1), 2)} やプラズマ乱流^{3), 4)} との関連で近年注目されているが, 他方では統計理論の演習課題として理論的に重要である。とくに近年の計算機の発達に伴い, 二次元Navier-Stokes方程式の計算がかなりの精度で実行出来る様になった事から^{5), 6)}, 今後ますますその性質の解明が期待されている。しかしながら, 二次元乱流と言えども現在の所では, 粘性の有る場合はそう簡単に解けるといふわけにはいかない。これに反して, 非粘性の場合はその定常解がKraichnan^{7), 8)} によって理論的に導かれているので, もしこれが正しいとすれば, 乱流現象の力学的特徴の一面である速度場の非線型な相互作用の性質について調べる場合の便利な理論的モデルを提供していると言える。

Kraichnan⁸⁾ は非粘性二次元Navier-Stokes方程式が流れのエネルギーとエントロフィを力学的に保存する事を

考慮して、非粘性二次元乱流の平衡状態を記述する速度の定常確率分布としてこれらの保存量（エネルギーとエントロピー）を用いたカノニカル分布を提案し、これから、エネルギースペクトルの定常解を導いた。しかし、この定常解は、エネルギーとエントロピーが保存量である事と自由度の大きい力学系に於ける熱平衡状態においてカノニカル分布が最も確率の大きい分布になるという統計法則に基いて導かれたもので、流れの力学の詳細は全く考慮されていない結果である。したがって、当然の事ながら次の問題として、この定常解が実現するかどうかを力学的に調べる事が重要となる。

この検証はまず Fox and Orszag⁹⁾ によって行われた。彼らは非粘性二次元 Navier-Stokes 方程式の初期値問題を解き、得られた数値解を波数空間上で帯域平均をとる事によってエネルギースペクトルを計算し、Kraichnan の理論と比較した。しかし、得られた計算結果は必ずしも理論を支持するに十分であったとは言えなかった。この事は彼ら自身も認めていて、その原因はもしかしてエネルギーとエントロピー以外にもこれらに独立な保存量が存在するせいかもしれないと述べている。しかし、筆者の推測では、彼らの計算と理論の不一致の原因は、計算結果がいまだ平衡状態には到達していない過渡的な状態において得られている事および計算の

際に行なわれた高波数成分の打切りの仕方が適切でなかった点にあると考えられる。そして、この推測を確かめると共に Kraichnan の理論を実証する事が本研究の主たる動機である。

次に Seyler et al.¹⁰⁾ は同じ目的で同様な計算を行っている。唯この場合は平均値の計算を各波数成分の時間平均で行っている違いがある。このため、理論と比較するデータとしてどの成分を選ぶかによって計算結果はかなりばらついていて、各点はほぼ理論曲線のまわりに分布していて、理論を支持していると言える。

ここでは前記の推測に基づき Fox and Orszag⁹⁾ の計算方法を改良し、計算結果を Kraichnan の理論と比較した時良く一致する結果が得られたので報告する。

§ 2. 非粘性二次元乱流の定常エネルギースペクトルについて

まず、Kraichnan⁸⁾ に従って非粘性二次元乱流の定常エネルギースペクトルについて説明する。速度のフーリエ成分 $V(k)$ に対する非粘性二次元 Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial V_m(k)}{\partial t} = -i P_{mn}(k) \sum_{k'} V_n(k') k \cdot V(k - k') \quad (2.1)$$

$$P_{mn}(k) = \delta_{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2}$$

である。そして単位質量当りのエネルギー E とエントロピー Ω

$$E = \frac{1}{2} \sum_k |V(k)|^2 \quad (2.2)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_k k^2 |V(k)|^2 \quad (2.3)$$

は (2.1) の保存量 (積分と言うべきか) である。これから, (2.1) で記述される非粘性二次元乱流については $\langle E \rangle$, $\langle \Omega \rangle$ が保存する事がわかる。ここで $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を表わす。

(2.1) は熱的に閉じた力学系であるので, 今ある時刻で流れの状態が与えられたとすると, 例えこの時流れが非平衡な状態であったとしても, 時間と共にやがて, ある種の (巨視的な視点から見ても) 平衡状態が実現する事が期待される。

Kraichnan はこの様な平衡状態を記述する $V(k)$ の確率分布として次の様なガウス分布を提案した。

$$\exp(-\alpha E - \beta \Omega) \quad (2.4)$$

(2.4) からエネルギースペクトル $E(k)$ はたゞちに

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \frac{k}{\alpha + \beta k^2} \quad (2.5)$$

と得られる。

さて，われわれの目的はこの様に統計的観点から提案された平衡状態が，力学的にも存在するかどうかを(2.1)を解いて調べる事である。ところで，数値計算の場合は有限個のフーリエ成分を取扱う事になるが，これを今波数空間 k 上で $|k| \in [k_{\min}, k_{\max}]$ の範囲の成分と考える。ここで $k_{\min} \neq 0$ とする。したがって，(2.5)の積分から

$$\langle E \rangle = \frac{\pi}{4\beta} \ln \left[\frac{\alpha + \beta k_{\max}^2}{\alpha + \beta k_{\min}^2} \right] \quad (2.6)$$

$$\langle \Omega \rangle = \frac{\pi}{4\beta} (k_{\max}^2 - k_{\min}^2) - \left(\frac{\pi\alpha}{4\beta^2} \right) \ln \left[\frac{\alpha + \beta k_{\max}^2}{\alpha + \beta k_{\min}^2} \right] \quad (2.7)$$

が得られる。この結果，ある時刻で $\langle E \rangle$ ， $\langle \Omega \rangle$ がわかると(2.6)，(2.7)から定数 α ， β が求まり，(2.5)は定まる。

次に

$$k_a^2 = \frac{1}{2} \frac{k_{\max}^2 - k_{\min}^2}{\ln(k_{\max}/k_{\min})} \quad (2.8)$$

$$k_b^2 = \frac{1}{2} (k_{\max}^2 + k_{\min}^2) \quad (2.9)$$

$$k_i^2 = \frac{\langle \Omega \rangle}{\langle E \rangle} \quad (2.10)$$

を導入すると k_i をパラメーターとして α, β の正負が定まり、(2.5) の形状は各々の場合に対応して次の3種類に分類出来る。

$$\text{Case I} \quad k_{\min}^2 < k_i^2 < k_a^2 \text{ の時 } \beta > 0, -\beta k_{\min}^2 < \alpha < 0 \quad (2.11)$$

$$\text{Case II} \quad k_a^2 < k_i^2 < k_b^2 \text{ の時 } \beta > 0, \alpha > 0 \quad (2.12)$$

$$\text{Case III} \quad k_b^2 < k_i^2 < k_{\max}^2 \text{ の時 } \alpha > 0, -\alpha < \beta k_{\max}^2 < 0 \quad (2.13)$$

当然の事であるが、エネルギースペクトルの非負性により α と β が同時に負となる場合は存在しない。

これら3種類のエネルギースペクトルの典型を図1に示す。図は §3. に於ける数値計算と比較される理論値を示したもので、各パラメーターの値はそこで使われる値である。(表1. 参照) 曲線A, B, Cはそれぞれ(2.11)から(2.13)までのCase I, II, IIIに対応している。図より次の事がわかる。Case I の特徴は $k = k_{\min}$ の近くにエネルギーの大部分が集中し、 k の大きい領域で k^{-1} の勾配を持つ分布をしている。($\alpha < 0$ であるため、negative temperature regime と呼ばれることがある。⁸⁾) Case III はこれと対称的でエネルギーの大部分は $k = k_{\max}$ の近くに集中し、 k の小さい領域では k に比例する勾配を持つ分布をしている。一方Case II はこれらの中間の場合と見る事が出来るが、 $k_{\min}$ と $k_{\max}$ の

間の一点 $k_s = \sqrt{\alpha/\beta}$ (≈ 4.53) で極大値を持ち, $k < k_s$ の領域では k に比例する勾配に漸近し, $k > k_s$ の領域では k^{-1} に比例する勾配に漸近する分布をしている。これら3つの Case は k_1 をパラメーターとして連続的に接続している事は言うまでもない事である。ところで, エネルギースペクトルが k に比例するという事は, そこではエネルギーの等分配が実現している事を意味し, k^{-1} に比例する事は, そこではエントロピーの等分配が実現している事を意味している。したがって, 定常解(2.5)は k_1 をパラメーターとして波数空間上で, エネルギーの等分配が実現したり, エントロピーの等分配が実現したり, あるいはこれらの二つの等分配領域がエネルギースペクトルの極大値の位置 k_s の両側に同時に局在する平衡状態が実現する事を表わしている。このような性質は非粘性二次元乱流において流れのエネルギーとエントロピーが保存量となっている事の反映であるが, 非線型な力学に特徴的な性質である。そしてここで重要な事は, もし定常解(2.5)が(2.1)から実証されたとすると, これらに独立な他の保存量の存在の可能性はあまり期待出来なくなる事である。この事は直接的ではないが, (2.1)にエネルギーとエントロピー以外の独立な保存量が有るかないかという最近の Hald¹¹⁾ と Lee¹²⁾ の論争に一つの解答を与えたいと言える。

§ 3. 計算結果と検討

計算の方法はほぼ Fox and Orszag⁹⁾と同様であるが、いくつかの相違点について述べる。

前述の様に波数空間 k は有限な領域 $|k| \in [k_{\min}, k_{\max}]$ を考えるものとする。これに対し通常行なわれる波数空間の打ち切りの方法は、計算の便宜性から k の 2 成分 k_x, k_y の各々について $k_x \leq k_{\max}, k_y \leq k_{\max}$ の範囲とする方法である。しかし、後者の方法では $|k| > k_{\max}$ の成分が力学系の中に含まれて来て、 $k = k_{\max}$ での打ち切りの意味が正確ではなくなる。これが Fox and Orszag の計算誤差の一因とな、くいと考えられるので、ここでは前者の方法、すなわち $k^2 \leq k_{\max}^2$ で打ち切る方法を用いる。こうすると $k \leq k_{\max}$ のフーリエ成分だけで力学系は閉じる事になる。

次に、出来るだけ平衡状態に近い計算結果を得るためには計算時間 t を大きくする必要がある。そのためには時間方向の積分法に精度の良い計算方法を使用する事が必要となるが、ここでは Runge-Kutta-Gill 法 (Δt^4 の精度) を使用する事にし、 $t = 20.0$ までの計算を行なった。なお、ここで述べている時間 t は初期の速度の 2 乗平均 $\sqrt{2E_0} (=1)$ と波数成分間の間隔 $\Delta k = 2\pi/L$ (L は物理空間で流れの周期性を仮定した長さ) で無次元化されたものである。同様に k も

Δk で無次元化されている。

計算のパラメータはまず $k_{\min}=1$, $k_{\max}=\sqrt{925}(\doteq 30.41)$ と置く。ここで, $k_{\max}$ の値は計算の便宜上のためで, 力学的に特別な意味はない。¹³⁾ この結果 (2.8) , (2.9) から $k_a=11.64$, $k_b=21.52$ となる。

われわれは $t=0$ で任意に与えられた初期条件から出発しても (2.5) が一義的に実現する事を期待している。したがって, 初期条件として特別な場合を考える必要はない。ここでは最も簡単に, 波数空間上のある一つの部分帯域 (band) の成分だけを random に励起し, その他の帯域の成分は零と置いた初期条件を選ぶ事にする。すなわち, この帯域の中点を k_0 とすると, 初期条件は $|k| \in [k_0 - 1/2, k_0 + 1/2)$ の速度成分のみを

$$V(k) = \sqrt{\frac{E_0}{\pi k}} R_n \quad (3.1)$$

と置く。ここで $E_0 = 1/2$ (単位質量当りのエネルギー) で, R_n は標準正規乱数 $N(0,1)$ である。そして k_0 としては (2.5) の3つの形状 (2.11) , (2.12) , (2.13) に対応して, $k_0 = 5$, 15 , 25 の3種類を選ぶ。(3.1) に基いて作られた実際の初期速度場のエネルギー E と k_1 および α , β の値は表1に示された通りである。 k_1 が k_0 と異なるのは各帯域

	k_0	k_1	E	α	β
Case I	5	5.12	0.5859	-49.16^*	49.16^*
Case II	15	14.96	0.3979	153.4	7.464
Case III	25	25.04	0.4516	4134.0	-4.029

* Case I の場合 $\alpha + \beta = 5.349 \times 10^{-12}$ である。

表 1. 初期のパラメーター

の中に於ける $V(k)$ の位置の分布の片寄りのためである。 E と k_1 が与えられると (2.5) の α と β は求まり, その結果は図 1 に示された通りである。

図 2 に Case I の計算結果と理論の比較を示す。図中の黒丸は初期値, 白丸は $t = 20.0$ で計算されたエネルギースペクトル, 実線は $k_1 = 5.12$ に対応する理論である。エネルギースペクトルの計算は波数空間の各帯域 $|k| \in [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ 内の平均 (band average) から計算された。図から計算結果と理論が非常に良く一致している事がわかる。たゞ, 低波数成分が高波数成分に比べて理論と多少ずれる傾向を示すのは, 低波数成分の緩和時間が大きいと平均に関与する成分の数が少いせいで, 以下の計算についても同様である。念のためさらに t を大きくして $t = 30.0$ の場合の計算を行ってみると, 低波数成分がやや理論に近づく傾向を示すが, その大勢は変わらない。

図3に Case II の計算結果と理論の比較を示す。前と同様に図中の黒丸は初期値, 白丸は $t = 20.0$ で計算されたエネルギースペクトルで, 実線は $k_1 = 14.96$ に対応する理論である。図2と同様に低波数成分で多少ずれるが, 理論と計算結果の一致は非常に良い。

図4に Case III の計算結果と理論の比較を示す。前と同様に黒丸は初期値, 白丸は $t = 20.0$ で計算されたエネルギースペクトルで, 実線は $k = 25.04$ に対応する理論である。この場合はエネルギーの大部分が高波数成分に集中するので理論と計算結果の一致は最も良い。

これまで, (2.1) から計算されたエネルギースペクトルの計算結果と Kraichnan の理論を比較した結果を示してきたが, 両者は非常に良く一致し, 力学的にも理論の成立が確認された。また, その一意性についても, これを疑うべき何の徴候も得られなかった。

§4. おわりに

非粘性二次元乱流の平衡状態を記述する Kraichnan の理論を検証するため, 非粘性二次元 Navier-Stokes 方程式の初期値問題の数値解に波数空間上の帯域平均をとる事によってエネルギースペクトルを計算し, 理論(2.5)と比較した。

その結果、計算値と理論は非常に良く一致し、Kraichnanの理論が実証された。この結果は Navier-Stokes 方程式と乱流の関係の一面を表わしていると考えられる点で非常に興味深い。また、最近の Hald⁽¹¹⁾ と Lee⁽¹²⁾ の論争にも見られる様に、非粘性二次元 Navier-Stokes 方程式にエネルギーとエントロピー以外のこれらと独立な保存量が存在するかしないかという事はいまだ決着がついた問題とは言えないが、ここで得られた結果は、直接的にはないがこの問題について、これら以外に独立なものは存在しない事を示している様に思われる。

これまで見て来た様に、非粘性二次元乱流は力学変数 k_i をパラメーターとして、エネルギーとエントロピーの等分配領域が波数空間上で局在化する性質を示すが、このような性質は非線型な力学現象に特有な性質で、その特徴も顕著であるので、これを乱流の新しい理論の検証に（すなわち乱流モデルとして）使用する事が考えられる。その時、解が解析的に求まっているかつその一義性も確かである事は誠に都合が良く、この意味で非粘性二次元乱流は乱流の理論的モデルとして非常に有力なものであると考えられる。

文 献

- 1) C.E.Leith ; J.Atmos. Science 28 ,145(1971).
- 2) P.Morel ; Lecture Note in Phys. 18 ,12(1972).
- 3) J.B.Taylor and B.McNamara ; Phys.Fluids 14 ,1492(1971).
- 4) G.Joyce and D.Montgomery ; J.Plasma Phys. 10 ,109(1973).
- 5) D.K.Lilly ; Phys.Fluids Suppl. II-240(1969).
- 6) J.R.Herring,S.A.Orszag,R.H.Kraichnan and D.G.Fox ; J.Fluid Mech. 66 ,
417(1974).
- 7) R.H.Kraichnan ; Phys.Fluids 10 ,1417(1967).
- 8) R.H.Kraichnan ; J.Fluid Mech. 67 ,155(1975).
- 9) D.G.Fox and S.A.Orszag ; Phys.Fluids 16 ,169(1973).
- 10) C.E.Seyler Jr.,Y.Salu,D.Montgomery and G.Knorr ; Phys.Fluids 18 ,
803(1975).
- 11) O.Hald ;Phys.Fluids 19 ,914(1976).
- 12) J.Lee ; Phys.Fluids 20 ,1250(1977).
- 13) G.S.Patterson Jr. and S.A.Orszag ; Phys.Fluids 14 ,2538(1971).

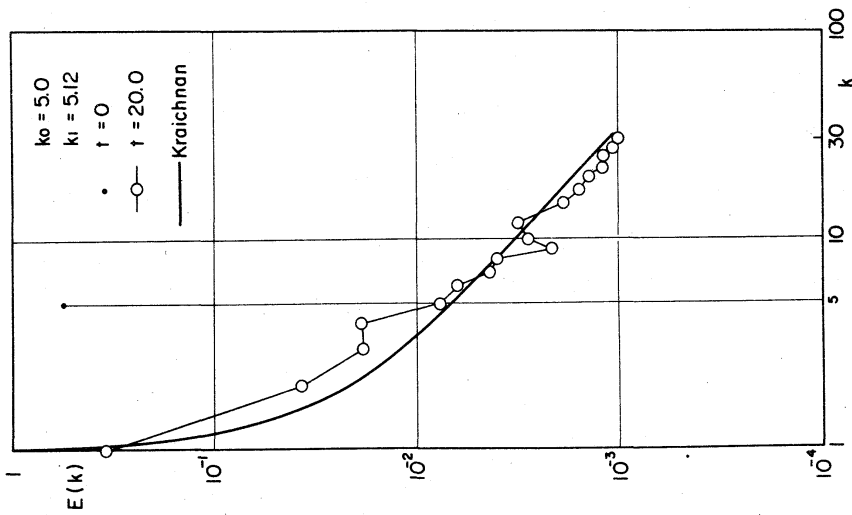


図2. 計算結果と理論の比較
Case I

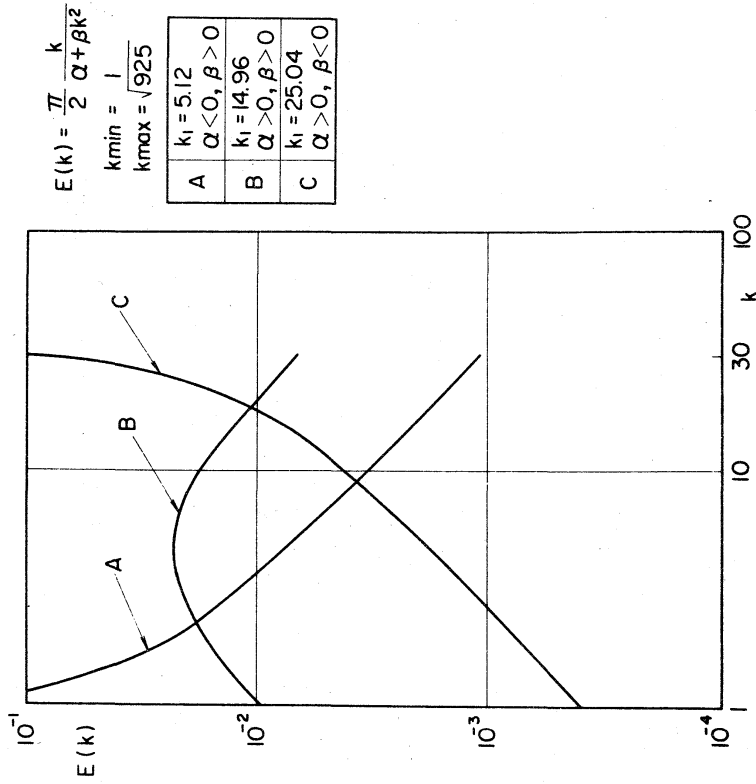


図1. 定常エネルギースペクトル

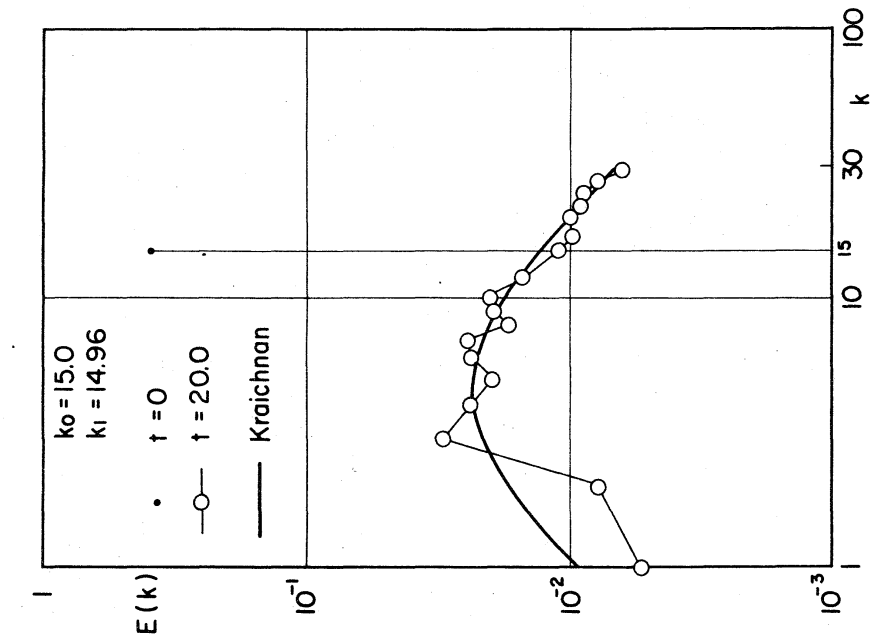


図3. 計算結果と理論の比較
Case II

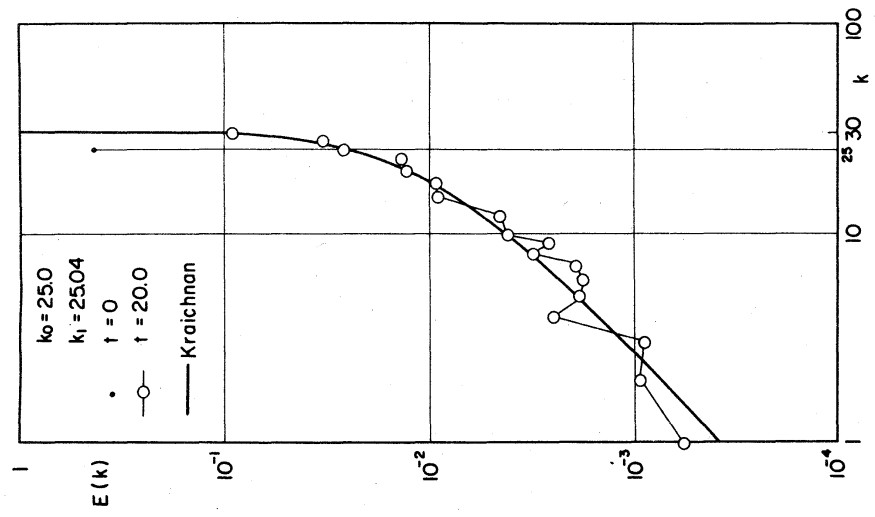


図4. 計算結果と理論の比較
Case III