

集合値写像の写像度

東北大 理 上之郷高志

1. 序

n 次元ユークリッド空間 R^n の空でない *compact sets* の全体を $Comp(R^n)$, $A \subset R^n$ の ε -開近傍を $U_\varepsilon(A)$, 区間 $[0, 1]$ を I で表わす。 $f: I \times R^n \rightarrow R^n$ は有界連続とする。常微分方程式

$$(E) \quad dx/dt = f(t, x)$$

を考える。 $a \in R^n$ に対して

$$(1) \quad \phi(a) = \{ x(1) : x(t) \text{ は } (E) \text{ の解で } x(0) = a \}$$

とすれば, $\phi: R^n \rightarrow Comp(R^n)$ が得られる。

我々の目的は、この集合値写像 ϕ と, R^n の有界な開集合

D と、適当な点 $p \in R^n$ に対して、写像度 $d(\phi, D, p)$ を定義することである。

位相空間 X から $Comp(R^n)$ への写像 ϕ が上半連続であるとは、任意の $x \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して、 x の近傍 W が存在して、 $\phi(W) \subset \bigcup_{\varepsilon} (\phi(x))$ が成りたつときに言う。ただし $\phi(W) = \bigcup \{ \phi(y) : y \in W \}$ である。

集合値写像の写像度に関して、Hukuhara [4] や Cellina & Lasota [2] 等により次の結果が得られている。

$\phi: \bar{D} \rightarrow Comp(R^n)$ が上半連続で、任意の $x \in \bar{D}$ に対して $\phi(x)$ が convex ならば、 $p \in R^n \setminus \phi(\partial D)$ に対して、写像度 $d(\phi, D, p)$ が定義できる。ただし $\bar{D}$ と ∂D はそれぞれ、 D の閉包と境界を表わす。

(1) で定義された ϕ は上半連続であることが Kamke の定理 (Theorem 3.2 in [3], p.p. 14-15) から確かめられるが、 $\phi(x)$ は convex とは限らない。そこで微分方程式の特性をいかして (1) の ϕ に写像度を入れることを考えよう。(E) の右辺の f に対し、次の性質を持つ連続関数列 $\{f_k\}$ が存在する。

(i) $f_k: I \times R^n \rightarrow R^n$ は有界連続、

- (ii) $f_k \rightarrow f$ ($k \rightarrow \infty$) 広義一様収束,
 (iii) (E_k) $dx/dt = f_k(t, x)$ の初期値問題は一意的.

$a \in R^n$ に対し, $x(0) = a$ をみたす (E_k) の解は唯一つ存在する。それを $x_k(t)$ と書く。 $\phi_k(a) = x_k(1)$ とすれば, 連続写像 $\phi_k: R^n \rightarrow R^n$ が得られる。この $\{\phi_k\}$ はある意味で ϕ を近似していると思われる。すなわち, Kamke の定理より, $\{\phi_k\}$ は次の性質を持っていることが分かる。

(I) $\{\phi_{k_j}\}$ を $\{\phi_k\}$ の部分列, $\{x_j\} \subset R^n$ を $x \in R^n$ に収束する点列とすると, $\{\phi_{k_j}(x_j)\}$ は $\phi(x)$ の真に収束する部分列を含む。

これは次と同値である。(cf. 補題 3)

(II) $\forall x \in R^n, \forall \varepsilon > 0, \exists W: x$ の近傍, $\exists L > 0$
 $\phi_k(W) \subset \bigcup_\varepsilon (\phi(x))$ for $k \geq L$.

微分方程式論に写像度を応用するためには, (1) で得られた ϕ はもちろん, ϕ と連続写像との合成写像に対しても, 写像度を定義する必要があると思われる。幸いなことに, それ

らに対しても (I) をみたす連続写像の列が存在する (cf. 例 2)。そこで次節以下では, (I) [従って (II)] をみたす連続写像の列 $\{\phi_k\}$ を使って, それらの写像度 $d(\phi_k, D, \rho)$ から ϕ の写像度 $d(\phi, D, \rho)$ を定義することを考えよう。

2. regular mappings.

M を metric space とする。 M から R^n への連続写像の全体を $C(M, R^n)$ とかく。 $\phi: M \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ と $S \subset M$ に対し, $\phi(S)$ を $\phi(S) = \bigcup \{\phi(x) : x \in S\}$ で定義する。

定義. $\phi: M \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ とする。次の性質 (P) をみたす列 $\{\phi_k\} \subset C(M, R^n)$ が存在するとき, ϕ は regular であるという。

(P) $\forall x \in M, \forall \varepsilon > 0, \exists W: x \text{ の近傍}, \exists L > 0$

$$\phi_k(W) \subset \bigcup_{\varepsilon} (\phi(x)) \quad \text{for } k \geq L.$$

$\{\phi_k\}$ を ϕ の近似列と呼び, それらの全体を $A(\phi)$ とかく。

上の定義から直ちに次の 2 つの補題が導かれる。

補題 1. 近似列の部分列は近似列である。

補題 2. $\phi: M \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ が regular で, $\{\phi_k\} \in A(\phi)$ とする。このとき任意の $S \subset M$ に対して, $\phi|_S: S \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ も regular で, $\{\phi_k|_S\} \in A(\phi|_S)$ である。

補題 3. $\phi: M \rightarrow \text{Comp}(R^n)$, $\{\phi_k\} \subset C(M, R^n)$ とする。このとき次の二つは同値である。

(i) $\{\phi_{k_j}\}$ を $\{\phi_k\}$ の部分列, $\{x_j\} \subset M$ を $x \in M$ に収束する点列とすると, $\{\phi_{k_j}(x_j)\}$ は $\phi(x)$ の奥に収束する部分列を含む。

(ii) $\{\phi_k\}$ は (P) をみたす。すなわち, ϕ は regular。

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii). もし (ii) が成り立たないとすると,

$\exists \varepsilon > 0, \exists x \in M, \exists \{x_j\} \subset M,$

$\Rightarrow x_j \rightarrow x \ (j \rightarrow \infty), \phi_{k_j}(x_j) \notin \bigcup_{\varepsilon} (\phi(x)), j=1, 2, \dots.$

これは (i) に矛盾。

(ii) $\Rightarrow$ (i). もし (i) の結論が成り立たないとすると, $\phi(x)$ は compact だから, $\exists \varepsilon > 0, \exists N > 0, \phi_{k_j}(x_j) \notin \bigcup_{\varepsilon} (\phi(x))$ for $k \geq N$. この ε と x に対する (P) の L と W を考える。 j が十分大きければ, $k_j \geq L$ かつ $x_j \in W$ である。これは

(P)に矛盾。

g. e. d.

補題 4. $\phi: M \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ を regular, $K \subset M$ を compact, $\{\phi_k\} \in A(\phi)$, $\varepsilon > 0$ とする。このとき番号 N が存在して、次が成り立つ。 $\forall x \in K, \exists y \in K,$

$$(2) \quad \phi_k(x) \in \bigcup_{\varepsilon}(\phi(y)) \quad \text{for } k \geq N.$$

従って

$$(3) \quad \phi_k(K) \subset \bigcup_{\varepsilon}(\phi(K)) \quad \text{for } k \geq N.$$

証明. (P)より任意の $x \in K$ に対して, x の開近傍 W_x と番号 L_x が存在して, $\phi_k(W_x) \subset \bigcup_{\varepsilon}(\phi(x))$ for $k \geq L_x$ が成り立つ。 $\{W_x: x \in K\}$ は K の open covering で, K は compact だから, 有限個の点 $x_1, \dots, x_m \in K$ が存在して, $\bigcup_{i=1}^m W_{x_i} \supset K$ である。 N として, $N = \max\{L_{x_i}: i=1, \dots, m\}$ とすればよい。

g. e. d.

注意. $g: M \rightarrow R^n$ が与えられたとき, $\hat{g}(x) = \{g(x)\}$ とすると, $\hat{g}: M \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ が得られる。 g が連続ならば, $\hat{g}$ は

regular である。何故なら、 $\hat{g}$ の近似列 $\{\phi_k\}$ として、 $\phi_k = g$ ($k = 1, 2, \dots$) が取れるからである。逆に $\hat{g}$ が regular ならば g が連続であることが次のようにして示される。 $\{\phi_k\}$ を $\hat{g}$ のひとつの近似列とする。先ず (P) から $\{\phi_k\}$ は g に各点収束していることが分かる。すなわち、任意の $y \in M$ に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k(y) = g(y)$ である。 $x \in M$ と $\varepsilon > 0$ を任意に与える。(P) から、 x の近傍 W と番号 L が存在して $\phi_k(W) \subset U_\varepsilon(\hat{g}(x))$ for $k \geq L$ である。言い換えれば、任意の $y \in W$ に対して、 $|\phi_k(y) - g(x)| < \varepsilon$ for $k \geq L$ である。ここで $k \rightarrow \infty$ ならしめると $|g(y) - g(x)| \leq \varepsilon$ を得る。すなわち g は x で連続である。

3. regular mappings の写像度とその性質.

D を R^n の有界な開集合、 $\phi: \bar{D} \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ は regular とする。 $\phi(x)$ の convex hull を $\phi^*(x)$ とかく。 ϕ として、

$$(4) \quad \phi \in R^n \setminus \overline{\phi^*(\partial D)}$$

なるものを取る。 $\phi^*(\partial D)$ は、 $\phi(\partial D)$ の convex hull ではないことに注意しよう。また ϕ が上半連続のときは、 $\phi^*: \bar{D} \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ も上半連続となり、従って $\phi^*(\partial D)$ は compact にな

る。よって (4) は $p \in R^n \setminus \phi^*(\partial D)$ とかける。

(4) をみたす点 p に対して、写像度 $\alpha(\phi, D, p)$ を

$$(5) \quad \alpha(\phi, D, p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(\phi_k, D, p), \quad \{\phi_k\} \in A(\phi)$$

で定義したい。そのために、各 $\{\phi_k\}$ に対し、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(\phi_k, D, p)$ が存在して、その値は $\{\phi_k\}$ の取り方によらないことを示そう。

$\{\phi_k\} \in A(\phi)$ をひとつ固定する。(4) より正の数 ε が存在して $\text{dist}(p, \overline{\phi^*(\partial D)}) \geq 2\varepsilon$ が成り立つ。この ε と $\{\phi_k\}$ に対し、補題 4 で $M = \overline{D}$, $K = \partial D$ において得られる番号 N をとる。(3) より $\phi_k(\partial D) \subset \bigcup_{\varepsilon} (\phi(\partial D))$, 従って, $p \notin \phi_k(\partial D)$ が $k \geq N$ で成り立つ。よって $\alpha(\phi_k, D, p)$ は $k \geq N$ に対して意味を持つ。次に $k \geq N$ なる k を固定して, $H: I \times \overline{D} \rightarrow R^n$ を

$$H(t, x) = (1-t)\phi_k(x) + t\phi_N(x)$$

で定義する。(2) より任意の $x \in \partial D$ に対して, $y \in \partial D$ が存在して

$$\phi_k(x), \phi_N(x) \in \bigcup_{\varepsilon} (\phi^*(y))$$

が成り立つ。 $U_\varepsilon(\phi^*(y))$ は convex だから, $H(I, x) \subset U_\varepsilon(\phi^*(y))$ である。よって $H(I, \partial D) \subset U_\varepsilon(\phi^*(\partial D))$ を得る。 ε の決め方から $p \notin H(I, \partial D)$ が従い、 $\alpha(\phi_k, D, p) = \alpha(\phi_N, D, p)$ が導かれる。すなわち, $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(\phi_k, D, p)$ が存在する。

もし $\{\phi_k\}, \{\psi_k\}$ が共に ϕ の近似列であれば, 次の列

$$\phi_1, \psi_1, \phi_2, \psi_2, \dots, \phi_k, \psi_k, \dots$$

は (P) をみたすことが容易に分かる。すなわち, これも ϕ の近似列である。上の議論から, 十分大きな番号 N_0 に対して, $\alpha(\phi_k, D, p) = \alpha(\psi_k, D, p)$ for $k \geq N_0$ が成り立つ。以上のことから, $\alpha(\phi, D, p)$ は (5) で定義できることが分った。以下, $\alpha(\phi, D, p)$ の性質を調べよう。

定理 1. $\alpha(\phi, D, p) \neq 0$ ならば, $p \in \phi(x)$ をみたす $x \in D$ が存在する。

証明. (5) と補題 1 より, ある $\{\phi_k\} \in A(\phi)$ が存在して $\alpha(\phi_k, D, p) = \alpha(\phi, D, p) \neq 0$, $k=1, 2, \dots$, が成り立つ。よって各 k に対して, $\phi_k(x_k) = p$ をみたす $x_k \in D$ が存在する。部分列を取るにより $\{x_k\}$ は $\overline{D}$ のある点 x に収束するとしてよ

い。補題 3 より, $\{\phi_k(x_k)\}$ は $\phi(x)$ の真に収束する部分列を含んでいる。ところが $\phi_k(x_k) = p$ だったから, $p \in \phi(x)$ である。また (4) より $p \notin \phi(\partial D)$ だから, $x \notin \partial D$, すなわち, $x \in D$ である。 g. e. d.

$d(\phi, D, p)$ の定義と, 補題 2 と 4 から次の 3 つの定理は容易に導かれるであろう。

定理 2. D が 2 つの交わらない開集合 E と F の和で表わされていれば,

$$d(\phi, D, p) = d(\phi|_E, E, p) + d(\phi|_F, F, p).$$

定理 3. $X \subset \overline{D}$ が compact で, $p \notin \overline{\phi^*(X)}$ ならば,

$$d(\phi, D, p) = d(\phi|_{\overline{D \setminus X}}, D \setminus X, p).$$

定理 4. 任意の点 $g \in R^n$ に対して,

$$d(\phi, D, p) = d(\phi - g, D, p - g)$$

である。ただし写像 $\phi - g$ は $(\phi - g)(x) = \phi(x) - g = \{y - g : y \in \phi(x)\}$ で定義される。

注意. 定理4で $\phi - g : \bar{D} \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ は regular である。

次に regular mappings の homotopy を定義しよう。M を metric space とし、 $\Phi : I \times M \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ を regular とする。このとき $\Phi(0, \cdot)$ と $\Phi(1, \cdot)$ は homotopic であると呼ぶ。補題2によれば、各 $t \in I$ に対して、 $\Phi|_{\{t\} \times M}$ は regular, すなわち、 $\Phi(t, \cdot) : M \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ は regular である。また、 $\{\Phi_k\} \in A(\Phi)$ ならば、 $\{\Phi_k(t, \cdot)\} \in A(\Phi(t, \cdot))$ である。

定理5. $\Phi : I \times \bar{D} \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ は regular で、 $p \in R^n \setminus \overline{\Phi^*(I, \partial D)}$ とする。このとき $d(\Phi(t, \cdot), D, p)$ は $t \in I$ に無関係に一定である。ただし、 $\Phi^*(t, x)$ は $\Phi(t, x)$ の convex hull である。

証明. $\text{dist}(p, \overline{\Phi^*(I, \partial D)}) \geq 2\varepsilon > 0$ をみたす ε を取り、 $\{\Phi_k\} \in A(\Phi)$ とする。N を、補題4で、 $M = I \times \bar{D}$, $K = I \times \partial D$ としたときに得られる番号とする。(3)より $p \notin \Phi_k(I, \partial D)$ for $k \geq N$ を得る。 $k \geq N$ なる k をひとつ固定する。(2)よ

り、任意の $(t, x) \in I \times \partial D$ に対して、 $(s, y) \in I \times \partial D$ が存在して

$$\Phi_k(t, x), \Phi_N(t, x) \in U_\varepsilon(\Phi^*(s, y))$$

である。従って、各 $t \in I$ に対して、 $\Phi_k(t, x)$ と $\Phi_N(t, x)$ を結ぶ線分は、convex set $U_\varepsilon(\Phi^*(s, y))$ に含まれる。このことから $d(\Phi_k(t, \cdot), D, p) = d(\Phi_N(t, \cdot), D, p)$ for $k \geq N$ が従う。すなわち

$$d(\Phi(t, \cdot), D, p) = d(\Phi_N(t, \cdot), D, p)$$

である。一方 $p \notin \Phi_N(I, \partial D)$ だから、上式の右辺は $t \in I$ に無関係に一定である。

g. e. d.

例 1. $(\tau, \xi) \in I \times R^n$ に対して

$$\Phi(\tau, \xi) = \{x(1) : x(t) \text{ は } (E) \text{ の解で, } x(\tau) = \xi\}$$

とすると、 $\Phi : I \times R^n \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ は regular であることが、補題 3 と Kamke の定理から分かる。特に $\Phi(1, \cdot)$ は恒等写像である。

例2. M_1, M_2 を metric spaces, $g: M_1 \rightarrow M_2$ は連続,
 $\phi: M_2 \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ は regular, $h: R^n \rightarrow R^m$ は連続とする。
 このとき, $h \circ \phi \circ g: M_1 \rightarrow \text{Comp}(R^m)$ は regular であって,
 $\{\phi_k\} \in A(\phi)$ に対し, $\{h \circ \phi_k \circ g\} \in A(h \circ \phi \circ g)$ である。

4. 補足

先に, $\phi: \bar{D} \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ が上半連続で, すべての $x \in \bar{D}$
 に対して $\phi(x)$ が convex ならば, ϕ に写像度が入ることを述べた(第一節)。このことと我々の結果との関連を少し述べよう。
 Cellina [1] は次のことを示した。

定理 (Cellina). (M, ρ) を compact metric space, $\phi: M \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ は上半連続で, すべての $x \in M$ に対し, $\phi(x)$ は convex とする。このとき $\forall \varepsilon > 0, \exists \phi_\varepsilon \in C(M, R^n), \forall x \in M, \exists y \in M, \rho(x, y) < \varepsilon, \phi_\varepsilon(x) \in U_\varepsilon(\phi(y))$ 。

$\varepsilon = 1/k$ としたときの ϕ_ε を ϕ_k と書けば, この定理は我々の補題4に相当する。Cellina & Lasota [2] はこの $\{\phi_k\}$ を使って, 我々と同じ方法で ϕ に写像度を入れた。実はこの $\{\phi_k\}$ は, 我々の意味で, ϕ の近似列になっている。すなわち $\{\phi_k\}$ は (P) を満たしている。以下そのことを示そう。

$\varepsilon > 0$ と $x \in M$ を任意に与える。 ϕ の上半連続性から、正の数 δ が存在して

$$(6) \quad \rho(x, z) < \delta \Rightarrow \phi(z) \subset \bigcup_{\varepsilon/2}(\phi(x))$$

が成り立つ。 x の近傍 W として、 $W = \{y \in M; \rho(x, y) < \delta/2\}$, L として、 $L > \max\{2/\varepsilon, 2/\delta\}$ をみたすものをとる。このとき、 $\phi_k(W) \subset \bigcup_{\varepsilon}(\phi(x))$ for $k \geq L$ が成り立つ。何故なら任意の $y \in W$ と $k \geq L$ に対して、定理から $z \in M$ が存在して、 $\rho(y, z) < 1/k$, $\phi_k(y) \in \bigcup_{1/k}(\phi(z))$ である。 L のとり方から $1/k < \varepsilon/2$ である。従って

$$(7) \quad \phi_k(y) \in \bigcup_{\varepsilon/2}(\phi(z))$$

である。一方 $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < \delta/2 + 1/k < \delta$ だから (6) より $\phi(z) \subset \bigcup_{\varepsilon/2}(\phi(x))$ である。これと (7) から $\phi_k(y) \in \bigcup_{\varepsilon}(\phi(x))$ を得る。すなわち $\phi_k(W) \subset \bigcup_{\varepsilon}(\phi(x))$ for $k \geq L$ が示せた。

Refernces

- [1] A. Cellina, Approximation of set valued functions and fixed point theorems, *Ann. Mat. Pura Appl.*, (4)82(1969), 17-24.
- [2] A. Cellina and A. Lasota, A new approach to the definition of topological degree for multivalued mappings, *Atti Accad. Naz. Lincei Lend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 47(1969), 434-440.
- [3] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, Inc., 1964.
- [4] M. Hukuhara, Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe, *Funkcial. Ekvac.*, 10(1967), 43-66.