

Klein-Gordon 方程式の非線型摂動について

砂川 秀明 (筑波大学 数理物質科学研究科)

次の非線型 Klein-Gordon 方程式を考える:

$$\square u + u = F(u, \partial_t u, \partial_x u, \partial_t \partial_x u, \partial_x^2 u), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}. \quad (1)$$

但し u は実数値の未知函数, $\square = \partial_t^2 - \partial_x^2$ とし, 非線型項 F は $X = (u, \partial_t u, \partial_x u, \partial_t \partial_x u, \partial_x^2 u)$ に滑らかに依存し, 次の意味で 3 次であるとする:

$$\exists C > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |F(X)| \leq C|X|^3 \text{ if } |X| \leq \delta.$$

(さらに準線型, つまり $\partial_t \partial_x u$ と $\partial_x^2 u$ に関しては高々 1 次, であるとする.) 本稿では, 方程式 (1) に対する小さくて滑らかなデータに対する初期値問題において, 非線型項 F が解 u の長時間挙動 ($t \gg 1$) に及ぼす影響を考察する.

本題に入る前に問題の背景を簡単に整理しておく. (上では空間 1 次元で非線型項が 3 次としているが, 以下しばらく空間 d 次元で p 次の非線型項をもつ Klein-Gordon 方程式について述べる. 当然 d は 1 以上の整数. また F に滑らかさを課しているため p は 2 以上の整数となる.) 小さなデータに対する初期値問題は適当な尺度変換によって小さな非線型項をもつ方程式に対する初期値問題とみなせるから, 考える問題は一種の非線型摂動である. そこでまず, 非摂動系に相当する $F \equiv 0$ の場合を見てみよう. よく知られているように, 自由な Klein-Gordon 方程式

$$\square U_0 + U_0 = 0$$

の解 (以後, 自由解とよぶ) のエネルギーは保存される. 式で書けば

$$\|U_0(t, \cdot)\|_{H^1}^2 + \|\partial_t U_0(t, \cdot)\|_{L^2}^2 = \text{const.} = O(\varepsilon^2). \quad (2)$$

(ここで ε は初期値の大きさに相当するパラメーター.) また, $t \rightarrow \infty$ のとき x に関して一様に

$$U_0(t, x) = \frac{1}{t^{d/2}} \text{Re} \left[a_0(x/t) e^{i(t^2 - |x|^2)_+^{1/2}} \right] + o(\varepsilon t^{-d/2}) \quad (3)$$

という漸近形を持つことも知られている (ここで $a_0(y)$ は $y = x/t$ についての滑らかな複素数値函数で $|y| \geq 1$ のとき 0 になるもの, $i = \sqrt{-1}$, $(\cdot)_+ = \max\{\cdot, 0\}$). (3) より特に, $t \rightarrow \infty$ のとき解は各点で $O(\varepsilon t^{-d/2})$ というオーダーで減衰することが分かる:

$$\|U_0(t, \cdot)\|_{L^\infty} \lesssim \varepsilon(1+t)^{-d/2}. \quad (4)$$

ここで大事なことは空間次元が高いほど解は早く減衰するということである。(以上のことは Hörmander の講義録 [H] の 7.2 節に詳しく書いてある.)

次に d と p が比較的大きい状況 (具体的には $p > 1 + \frac{2}{d}$ の場合) を考えてみよう. この場合には非線型問題の解は時刻無限大において自由解に漸近することが期待され, 実際には概ね正しいことが 1980 年代に Klainerman, Shatah 等によって示されている ([KP], [Sh1], [Sh2], [Kl], etc). $p > 1 + \frac{2}{d}$ という条件が出てくる理由は以下のように考えると納得しやすいであろう: 「非線型問題の解が自由解に近いとすれば, (2), (4) より, $(u, \partial_t u)$ の $H^1 \times L^2$ ノルムは有界に留まって $O(\varepsilon)$ となり, L^∞ ノルムは $O(\varepsilon t^{-d/2})$ というオーダーで減衰することを期待できる. このとき, 粗く考えて

$$\int_0^\infty \|F\|_{L^2} dt \lesssim \varepsilon^p \int_0^\infty (1+t)^{-d(p-1)/2} dt$$

という評価ができるから, $d(p-1)/2 > 1$ つまり $p > 1 + \frac{2}{d}$ ならば右辺の積分は収束して $o(\varepsilon)$ となり, 必要なアプリアリ評価が得られるはずである。」(以上のことは [H] の 7.3 節と 7.4 節に詳しく書いてある.)

上の考察から特に, 空間次元が 3 以上ならば解は常に自由に漸近し, 2 次元の場合にも非線型項の次数が 3 以上, 1 次元のときは 4 次以上なら漸近自由であることが分かる. ところが, 空間低次元で非線型項の次数が大きい場合 ($p \leq 1 + \frac{2}{d}$ の場合) には期待できる減衰が不十分なために状況が複雑になる. 実際, 非線型項に何らかの制約を設けない限り, もはや自由解の摂動として解を捉えることはできない. ところが Ozawa-Tsutaya-Tsutsumi により, 空間 2 次元, 非線型項 2 次で単独の場合には, F に制約をつけなくても非線型問題の解は自由解に漸近することが証明されている ([OTT]). この結果についてはこれ以上触れないが, 彼らの手法は (質量項の異なる) 連立系の場合には破綻する場合があることを注意しておく (反例は [Su2], [Su3] にある. [T] の Remark 1.4 (ii) も参照のこと).

「 $(d, p) = (2, 2)$ のときは $p = 1 + \frac{2}{d}$ なのに上手くいった. それなら $(d, p) = (1, 3)$ でも, 単独なら上手くいくのではないだろうか?」と考えたくなるかもしれないが, それは正しくない¹. 例えば

$$F = u_t^2 u_x \quad (5)$$

の場合, (1) の解はどんなに初期値が小さくて滑らかであっても有限時間で爆発することがわかっているし (Yordanov),

$$F = \pm u^3 \quad (6)$$

¹実はその反対で, $(d, p) = (1, 3)$ の場合は「単独だからうまくいかない」と言った方が適當である. 詳細については [Su1] を参照のこと.

の場合, (1) の解は時間大域的に存在するが, その漸近形は自由解に位相の修正が入ったものになることが知られている ([G], [St], [Ma], [GY], [D2], etc). また,

$$F = -u_t^3 \quad (7)$$

の場合, (1) の解は自由解よりも真に早く減衰することも知られている ([N], [MM], etc)². それなら, 空間 1 次元で非線型項が 3 次の場合には常に自由解に漸近しないのかというと, それも正しくない. 例えば F が

$$(-u^2 + 3u_t^2 - 3u_x^2)u, \quad (-3u^2 + u_t^2 - u_x^2)u_t, \quad (-3u^2 + u_t^2 - u_x^2)u_x \quad (8)$$

の線型結合で書けているならば (1) の解は自由解に漸近する ([Mo], [Ka], [D2], etc).

このように, 空間 1 次元で非線型項が 3 次の場合には F の形状に応じて解の漸近挙動は異なったものになる. それでは, 非線型項のどこに注目すれば解の挙動との関係を見通しよく理解できるのだろうか? この問いに答えるのが本稿の目的である.

以下, 簡単のために初期値は

$$u(0, x) = \varepsilon u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = \varepsilon u_1(x) \quad (9)$$

($0 < \varepsilon \ll 1$, $u_0, u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$) の形で与えられているとしよう. 非線型項 F に対してその 3 次斉次部分を $F_{(3)}$ と書き,

$$K_F(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} F_{(3)}(\cos \theta, -\cosh z \sin \theta, \sinh z \sin \theta, \cosh z \sinh z \cos \theta, -\sinh^2 z \cos \theta) e^{-i\theta} d\theta$$

($z \in \mathbb{R}$) とおく. このとき次が成り立つ:

定理 1 ([Su4]). 非線型項 F は

$$\inf_{z \in \mathbb{R}} \operatorname{Re} K_F(z) \geq 0 \quad (10)$$

を満たすとする. このとき初期値問題 (1)–(9) は唯一つの時間大域的な古典解を持ち, $t \rightarrow \infty$ のとき $x \in \mathbb{R}$ に関して一様に

$$u(t, x) = \frac{\operatorname{Re} \left[a(x/t) e^{\left\{ i(t^2 - |x|^2)_+^{1/2} + i\Psi_F(x/t) |a(x/t)|^2 \mathcal{L}(t, |a(x/t)|^2 \Phi_F(x/t)) \right\}} \right]}{\sqrt{t} \sqrt{1 + 2\Phi_F(x/t) |a(x/t)|^2 \log t}} + O(t^{-1/2} (\log t)^{-3/2}) \quad (11)$$

²細かいことを言うと [N], [MM] で論じられているのは解のエネルギーが減衰することであり, 各点的な減衰が自由解よりも真に早いかどうかは述べられていない.

が成り立つ. ここで $a(y)$ は $y = x/t$ についての滑らかな複素数値関数であって, 十分大きな N に対して

$$|\partial_y^j a(y)| \leq C_j (1 - |y|^2)_+^{N-j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N$$

を満たすもの (a は初期値から決まる). また,

$$\Phi_F(y) = (1 - y^2)_+^{1/2} \operatorname{Re}[K_F(\tanh^{-1} y)], \quad \Psi_F(y) = (1 - y^2)_+^{1/2} \operatorname{Im}[K_F(\tanh^{-1} y)].$$

さらに, $\mathcal{L}(\tau, \xi)$ は次式で与えられる:

$$\mathcal{L}(\tau, \xi) = \begin{cases} -\log \tau & \text{if } \xi = 0, \\ -\frac{1}{2\xi} \log(1 + 2\xi \log \tau) & \text{if } \xi \neq 0, 1 + 2\xi \log \tau > 0. \end{cases}$$

注意. 特に F が 3 次斉次で半線型の場合, 適当な実定数 $\gamma_1, \dots, \gamma_{10}$ を用いて

$$\begin{aligned} F(u, u_t, u_x) = & (\gamma_1 u^2 + \gamma_2 u_t^2 + \gamma_3 u_x^2 + \gamma_4 u_t u_x) u \\ & + (\gamma_5 u^2 + \gamma_6 u_t^2 + \gamma_7 u_x^2) u_t + (\gamma_8 u^2 + \gamma_9 u_t^2 + \gamma_{10} u_x^2) u_x \end{aligned}$$

と表せる. この場合に $K_F(z)$ を計算してみると

$$\begin{aligned} K_F(z) = & \frac{i}{8} (3\gamma_1 + \gamma_2 \cosh^2 z + \gamma_3 \sinh^2 z - \gamma_4 \cosh z \sinh z) \\ & - \frac{\cosh z}{8} (\gamma_5 + 3\gamma_6 \cosh^2 z + 3\gamma_7 \sinh^2 z) + \frac{\sinh z}{8} (\gamma_8 + 3\gamma_9 \cosh^2 z + 3\gamma_{10} \sinh^2 z). \end{aligned}$$

これより特に, (6) に対して

$$K_F(z) = \pm \frac{3}{8} i$$

(7) に対して

$$K_F(z) = \frac{3}{8} \cosh^3 z,$$

(8) に対して

$$K_F(z) \equiv 0$$

となり, いずれも条件 (10) を満たしていることが分かる. 一方, (5) に対しては

$$K_F(z) = \frac{3}{8} \cosh^2 z \sinh z$$

となり, $z < 0$ のとき $\operatorname{Re} K_F(z) < 0$ であるから条件 (10) は満たされない.

さて、次に (10) が満たされない場合についてもう少し詳しく考えてみよう。古典解の最大存在時間を T_ε とすると、

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon^2 \log T_\varepsilon > 0$$

が成り立つ (言い換えれば、ある $C > 0$ が存在して、十分小さな ε に対しては $T_\varepsilon \geq e^{C\varepsilon^{-2}}$ が成り立つ) ことは一般論から比較的容易に分かるが、実は、非線型項 F と初期値のみから決まる適当な量を用いてもっと精密に最大存在時間の下限を評価することができるのである。そのことを主張する次の定理は Delort [D1] による (但し、書き方は若干異なる):

定理 2 ([D1]). 初期値問題 (1)–(9) の古典解の最大存在時間 T_ε について

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon^2 \log T_\varepsilon \geq \frac{1}{\sup_{|y| < 1} \{-2|a_0(y)|^2 \Phi_F(y)\}}$$

が成り立つ ($1/0 = +\infty$ と解釈). 但し

$$\Phi_F(y) = (1 - y^2)_+^{1/2} \operatorname{Re}[K_F(\tanh^{-1} y)],$$

$$a_0(y) = \begin{cases} \frac{e^{i\pi/4}}{(1 - y^2)^{3/4}} \left[\hat{u}_0\left(\frac{-y}{\sqrt{1 - y^2}}\right) - i(1 - y^2)^{1/2} \hat{u}_1\left(\frac{-y}{\sqrt{1 - y^2}}\right) \right] & (|y| < 1), \\ 0 & (|y| \geq 1), \end{cases}$$

また、 $\hat{u}_j$ は u_j の Fourier 変換を表す:

$$\hat{u}_j(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u_j(x) dx.$$

注意. $|y| < 1$ のとき

$$a_0(y) = e^{i\pi/4} \langle \xi \rangle^{3/2} \left[\hat{u}_0(\xi) - \frac{i}{\langle \xi \rangle} \hat{u}_1(\xi) \right] \Big|_{\xi = -y/\sqrt{1-y^2}}$$

であることと $\hat{u}_0, \hat{u}_1$ が Schwartz class に属することより、 $a_0 \in C_0^\infty$ が分かる。

本稿の以下の部分では、定理 2 の証明の概略について述べる。定理 1 の証明についてはここでは省略する ([Su4] を参照のこと)。以後、 $Z = (\partial_t, \partial_x, t\partial_x + x\partial_t)$ と書くことにし、任意の多重指数 $I = (I_1, I_2, I_3) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^3$ に対して $Z^I = \partial_t^{I_1} \partial_x^{I_2} (t\partial_x + x\partial_t)^{I_3}$, $|I| = I_1 + I_2 + I_3$ という記法を用いることにする。また、 $A \in (0, +\infty]$ を

$$\frac{1}{A} = \sup_{|y| < 1} [-2|a_0(y)|^2 \Phi_F(y)]$$

によって定める. 定理 2 の証明の鍵は次の性質を持つ近似解 $u_{\text{appr}}(t, x)$ を構成することにある:

- 任意の多重指数 I と $B \in (0, A)$ に対してある正定数 $C_{B,I} > 0$ が存在して

$$\sup_{0 \leq t \leq e^{B/\varepsilon^2}} \|Z^I u_{\text{appr}}(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C_{B,I} \varepsilon$$

かつ

$$\sup_{0 \leq t \leq e^{B/\varepsilon^2}} (1+t)^{1/2} \|Z^I u_{\text{appr}}(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C_{B,I} \varepsilon,$$

- $u_{\text{appr}}(0, x) = \varepsilon u_0(x)$, $\partial_t u_{\text{appr}}(0, x) = \varepsilon u_1(x)$,
- $R = (\square + 1)u_{\text{appr}} - F(u_{\text{appr}}, \partial_t u_{\text{appr}}, \partial_x u_{\text{appr}}, \partial_t \partial_x u_{\text{appr}}, \partial_x^2 u_{\text{appr}})$ とおくと, 任意の多重指数 I と $B \in (0, A)$ に対して

$$\int_0^{e^{B/\varepsilon^2}} \|Z^I R(t, \cdot)\|_{L^2} dt \leq C_{B,I} \varepsilon^{1+\kappa}.$$

ここで $\kappa > 0$ は B, I, ε によらない定数.

さて, ひとたびこのような近似解 u_{appr} が構成できたとしよう. このとき (1)–(9) の真の解 u と上述の近似解 u_{appr} との差について, 次のアプリアリ評価を得ることができる. この評価と局所解の存在定理から定理 2 は直ちに従う.

補題. 十分大きな $m \in \mathbb{N}$ と任意の $B \in (0, A)$ に対してある $C_{B,m} > 0$ と $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ に対して

$$\sup_{0 \leq t \leq e^{B/\varepsilon^2}} \sum_{|I| \leq m} \|Z^I (u - u_{\text{appr}})(t, \cdot)\|_{L^2} \leq C_{B,m} \varepsilon^{1+\kappa}$$

が成り立つ. ここで $\kappa > 0$ は B, m, ε によらない定数.

(補題の証明については [D1] を参照のこと.)

残る問題はどのようにして u_{appr} を構成するかであるが, それは次のようにすればよい:

$$\chi(\tau) = \begin{cases} 1 & (\tau \leq 1), \\ 0 & (\tau \geq 2) \end{cases}$$

を満たす単調非増加関数 $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ をひとつとって固定し,

$$u_{\text{appr}}(t, x) = \chi(\varepsilon t) U_0(t, x) + (1 - \chi(\varepsilon t))(U_1(t, x) + U_2(t, x))$$

とおく. ここで U_0 は初期条件 (9) に対する自由解. また,

$$U_1(t, x) = \frac{\varepsilon}{t^{1/2}} \operatorname{Re} \left[a_1(\varepsilon^2 \log t, x/t) e^{i\varphi(t, x)} \right], \quad (12)$$

$$U_2(t, x) = \frac{\varepsilon^3}{t^{3/2}} \operatorname{Re} \left[a_2(\varepsilon^2 \log t, x/t) e^{i3\varphi(t, x)} \right]. \quad (13)$$

但し $a_1(s, y)$ は (s に関する) 常微分方程式³

$$\begin{cases} \partial_s a_1 = -(1 - y^2)_+^{1/2} K_F(\tanh^{-1} y) |a_1|^2 a_1, & s > 0, \\ a_1(0, y) = a_0(y) \end{cases} \quad (14)$$

の解であり, $a_2(s, y)$ は

$$a_2 = H_F(\tanh^{-1} y) a_1^3, \quad (15)$$

$$H_F(z) = \frac{-1}{8\pi} \int_0^{2\pi} F_{(3)}(\cos \theta, -\cosh z \sin \theta, \sinh z \sin \theta, \cosh z \sinh z \cos \theta, -\sinh^2 z \cos \theta) e^{-i3\theta} d\theta$$

によって与えられるもの, また, $\varphi(t, x) = (t^2 - x^2)_+^{1/2}$ である.

こうして作った u_{appr} が所望の性質を持つことを確かめるのは少し大変なので詳細は [D1] に譲ることにして, ここでは F が 3 次斉次で半線型の場合について, 以下の雑な計算から雰囲気をつかむことにしよう. 以後, $a \sim b$ が「適当な意味で」0 に近いとき $a \sim b$ という記号を用いることにする (準備が必要になるので, 正確な定義はここでは述べない).

まず, (12), (13) によって定めた U_1 と U_2 に対して $(\square + 1)U_1$ と $(\square + 1)U_2$ をそれぞれ計算すると

$$\begin{aligned} (\square + 1)U_1 &= \operatorname{Re} \left[(\square + 1) \left(\frac{e^{i\varphi}}{t^{1/2}} \varepsilon a_1(\varepsilon^2 \log t, x/t) \right) \right] \\ &= \frac{\varepsilon^3}{t^{3/2}} \operatorname{Re} \left[\frac{2ie^{i\varphi}}{\sqrt{1 - (x/t)^2}} \partial_s a_1 \right] + \frac{\varepsilon}{t^{5/2}} \operatorname{Re} \left[e^{i\varphi} P_1 a_1 \right] \\ &\sim \frac{\varepsilon^3}{t^{3/2}} \operatorname{Re} \left[\frac{2ie^{i\varphi}}{\sqrt{1 - (x/t)^2}} \partial_s a_1(\varepsilon^2 \log t, x/t) \right], \\ (\square + 1)U_2 &= \operatorname{Re} \left[(\square + 1) \left(\frac{e^{i3\varphi}}{t^{3/2}} \varepsilon^3 a_2(\varepsilon^2 \log t, x/t) \right) \right] \\ &= \frac{\varepsilon^3}{t^{3/2}} \operatorname{Re} \left[-8e^{i3\varphi} a_2 \right] + \frac{\varepsilon^3}{t^{5/2}} \operatorname{Re} \left[\frac{6ie^{i3\varphi}}{\sqrt{1 - (x/t)^2}} (\varepsilon^2 \partial_s - 1) a_2 \right] + \frac{\varepsilon^3}{t^{7/2}} \operatorname{Re} \left[e^{i3\varphi} P_2 a_2 \right] \\ &\sim \frac{\varepsilon^3}{t^{3/2}} \operatorname{Re} \left[-8e^{i3\varphi} a_2(\varepsilon^2 \log t, x/t) \right]. \end{aligned}$$

³ここでは y をパラメーターと見なしている

但し

$$P_1 = (\varepsilon^2 \partial_s - y \partial_y - 3/2)(\varepsilon^2 \partial_s - y \partial_y - 1/2) - \partial_y^2,$$

$$P_2 = (\varepsilon^2 \partial_s - y \partial_y - 5/2)(\varepsilon^2 \partial_s - y \partial_y - 3/2) - \partial_y^2.$$

([Su2] の Lemma 2.3 を参照.) また, $\omega_0(y) = 1/\sqrt{1-y^2}$, $\omega_1(y) = -y/\sqrt{1-y^2}$ とおくと⁴

$$\begin{aligned} \partial_t U_1(t, x) &= \frac{\varepsilon}{t^{1/2}} \operatorname{Re} [i\omega_0(x/t) a_1 e^{i\varphi}] + \frac{\varepsilon}{t^{3/2}} \operatorname{Re} [e^{i\varphi} (\varepsilon^2 \partial_s - y \partial_y - \frac{1}{2}) a_1] \\ &\sim -\frac{\varepsilon}{t^{1/2}} \omega_0(x/t) \operatorname{Im} [a_1 e^{i\varphi}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_x U_1(t, x) &= \frac{\varepsilon}{t^{1/2}} \operatorname{Re} [i\omega_1(x/t) a_1 e^{i\varphi}] + \frac{\varepsilon}{t^{3/2}} \operatorname{Re} [e^{i\varphi} \partial_y a_1] \\ &\sim -\frac{\varepsilon}{t^{1/2}} \omega_1(x/t) \operatorname{Im} [a_1 e^{i\varphi}], \end{aligned}$$

かつ $U_2, \partial_t U_2, \partial_x U_2 = O(\varepsilon^3 t^{-3/2})$ であるから,

$$\begin{aligned} &F(U_1 + U_2, \partial_t(U_1 + U_2), \partial_x(U_1 + U_2)) \\ &\sim F(U_1, \partial_t U_1, \partial_x U_1) \\ &\sim \frac{\varepsilon^3}{t^{3/2}} F(\operatorname{Re} [a_1 e^{i\varphi}], -\omega_0(x/t) \operatorname{Im} [a_1 e^{i\varphi}], -\omega_1(x/t) \operatorname{Im} [a_1 e^{i\varphi}]) \\ &= \frac{\varepsilon^3}{t^{3/2}} G(x/t, \Theta(t, x)) |a_1|^3. \end{aligned} \tag{16}$$

但し

$$G(y, \theta) = F(\cos \theta, -\omega_0(y) \sin \theta, -\omega_1(y) \sin \theta),$$

$$\Theta(t, x) = \varphi(t, x) + \arg a_1(\varepsilon^2 \log t, x/t).$$

ところで, G は θ について 2π -周期関数 であるから

$$G(y, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{G}_n(y) e^{in\theta},$$

$$\hat{G}_n(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(y, \theta) e^{-in\theta} d\theta$$

と表される. 更に $n \notin \{3, 1, -1, -3\}$ のとき $\hat{G}_n(y) = 0$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} G(x/t, \Theta(t, x)) |a_1|^3 &= \hat{G}_3(x/t) a_1^3 e^{i3\varphi} + \hat{G}_1(x/t) |a_1|^2 a_1 e^{i\varphi} \\ &\quad + \hat{G}_{-1}(x/t) a_1 \bar{a}_1^2 e^{-i\varphi} + \hat{G}_3(x/t) \bar{a}_1^3 e^{-i3\varphi} \\ &= 2 \operatorname{Re} [\hat{G}_1(x/t) |a_1|^2 a_1 e^{i\varphi} + \hat{G}_3(x/t) a_1^3 e^{i3\varphi}]. \end{aligned}$$

⁴ $\partial_t \varphi(t, x) = \omega_0(x/t)$, $\partial_x \varphi(t, x) = \omega_1(x/t)$ である.

ここでさらに $\hat{G}_1(y) = -iK_F(\tanh^{-1} y)$, $\hat{G}_3(y) = -4H_F(\tanh^{-1} y)$ であることに注意し, 上式を (16) に代入して整理すると

$$F(U_1 + U_2, \partial_t(U_1 + U_2), \partial_x(U_1 + U_2)) \\ \sim -\frac{\varepsilon^3}{t^{3/2}} \operatorname{Re} \left[2ie^{i\varphi} K_F(\tanh^{-1}(x/t)) |a_1|^2 a_1 \right] - \frac{\varepsilon^3}{t^{3/2}} \operatorname{Re} \left[8e^{i3\varphi} H_F(\tanh^{-1}(x/t)) a_1^3 \right].$$

以上をまとめると, $t > 2/\varepsilon$ のとき

$$R = (\square + 1)u_{\text{appr}} - F(u_{\text{appr}}, \partial_t u_{\text{appr}}, \partial_x u_{\text{appr}}) \\ = (\square + 1)(U_1 + U_2) - F(U_1 + U_2, \partial_t(U_1 + U_2), \partial_x(U_1 + U_2)) \\ \sim \frac{\varepsilon^3}{t^{3/2}} \operatorname{Re} \left[\frac{2ie^{i\varphi}}{\sqrt{1 - (x/t)^2}} \left\{ \partial_s a_1 + (1 - y^2)^{1/2} K_F(\tanh^{-1} y) |a_1|^2 a_1 \right\} \right]_{(s,y)=(\varepsilon^2 \log t, x/t)} \\ - \frac{\varepsilon^3}{t^{3/2}} \operatorname{Re} \left[8e^{i3\varphi} \left\{ a_2 - H_F(\tanh^{-1} y) a_1^3 \right\} \right]_{(s,y)=(\varepsilon^2 \log t, x/t)}.$$

したがって, a_1, a_2 を (14), (15) を満たすように選べば, R は「十分小さい誤差項」となる. 以上が近似解の構成法のあらましである. (なお, $a_1(0, y) = a_0(y)$ とする理由は $1/\varepsilon < t < 2/\varepsilon$ での剰余項の評価に関係するのだが, その説明は省略する.)

最後に, 定数 A がどのようにして出てくるのかを見ておこう. 常微分方程式 (14) は求積法で解くことができ, 解は

$$a_1(s, y) = \frac{a_0(y) \exp \left\{ -i |a_0(y)|^2 \Psi_F(y) \int_0^s \frac{d\sigma}{1 + 2 |a_0(y)|^2 \Phi_F(y) \sigma} \right\}}{\sqrt{1 + 2 |a_0(y)|^2 \Phi_F(y) s}} \quad (17)$$

と明示的に表されるから, この式より特に, $A < \infty$ ならば

$$\sup_{|y| < 1} |a_1(s, y)| \rightarrow +\infty \quad (s \rightarrow A).$$

すなわち $s = A$ は $a_1(s, y)$ の爆発時刻である. ちなみに, 条件 (10) の下では $1/A = 0$ つまり $A = +\infty$ となって (14) は s に関して大域的に解けるから, (17) を (12) に代入して整理すれば, $t > 1$ のとき

$$U_1(t, x) = \frac{\operatorname{Re} \left[\varepsilon a_0(x/t) e^{\left\{ i(t^2 - |x|^2)_+^{1/2} + i \Psi_F(x/t) |a_0(x/t)|^2 \varepsilon^2 \mathcal{L}(t, |a_0(x/t)|^2 \varepsilon^2 \Phi_F(x/t)) \right\}} \right]}{\sqrt{t} \sqrt{1 + 2 \Phi_F(x/t) |a_0(x/t)|^2 \varepsilon^2 \log t}}$$

となることが分かる. ここでさらに $a(y) = \varepsilon a_0(y)$ とおけば, 定理 1 が主張する解の漸近形の主要項と全く同じ形になることを注意して本稿を終える.

参考文献

- [D1] J.-M. Delort, *Minoration du temps d'existence pour l'équation de Klein-Gordon non-linéaire en dimension 1 d'espace*, Ann. Inst. Henri Poincaré (Analyse Non Linéaire) **16** (1999), 563–591.
- [D2] J.-M. Delort, *Existence globale et comportement asymptotique pour l'équation de Klein-Gordon quasi linéaire à données petites en dimension 1*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (4) **34** (2001), 1–61.
- [G] R. Glassey, *On the asymptotic behavior of nonlinear wave equations*. Trans. Amer. Math. Soc. **182** (1973), 187–200.
- [GY] V. Georgiev and B. Yordanov, *Asymptotic behaviour of the one-dimensional Klein-Gordon equation with a cubic nonlinearity*, preprint, 1996.
- [H] L. Hörmander, *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations*, Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [Ka] S. Katayama, *A note on global existence of solutions to nonlinear Klein-Gordon equations in one space dimension*, J. Math. Kyoto Univ. **39** (1999), 203–213.
- [Kl] S. Klainerman, *Global existence of small amplitude solutions to nonlinear Klein-Gordon equations in four space-time dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 631–641.
- [KP] S. Klainerman and G. Ponce, *Global, small amplitude solutions to nonlinear evolution equations*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 133–141.
- [Ma] A. Matsumura, *On the asymptotic behavior of semilinear wave equations*, Publ. RIMS **12** (1976), 169–189.
- [MM] K. Mochizuki and T. Motai, *On energy decay-nondecay problems for wave equations with nonlinear dissipative term in $\mathbb{R}^N$* , J. Math. Soc. Japan **47** (1995), 405–421.
- [Mo] K. Moriyama, *Normal forms and global existence of solutions to a class of cubic nonlinear Klein-Gordon equations in one space dimension*, Differential Integral Equations **10** (1997), 499–520.
- [N] M. Nakao, *Energy decay of the wave equation with a nonlinear dissipative term*, Funkcial. Ekvac. **26** (1983), 237–250.

- [OTT] T. Ozawa, K. Tsutaya, Y. Tsutsumi, *Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Klein-Gordon equations with quadratic nonlinearity in two space dimensions*, Math. Z. **222** (1996), 341–362.
- [Sh1] J. Shatah, *Global existence of small solutions to nonlinear evolution equations*, J. Differential Equations **38** (1982), 409–425.
- [Sh2] J. Shatah, *Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 685–696.
- [St] W. Strauss, *“Nonlinear wave equations,”* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, no.73, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1989.
- [Su1] H. Sunagawa, *On global small amplitude solutions to systems of cubic nonlinear Klein-Gordon equations with different mass terms in one space dimension*, J. Differential Equations **192** (2003), 308–325.
- [Su2] H. Sunagawa, *A note on the large time asymptotics for a system of Klein-Gordon equations*, Hokkaido Math. J. **33** (2004), 457–472.
- [Su3] H. Sunagawa, *Large time asymptotics of solutions to nonlinear Klein-Gordon systems*, Osaka J. Math. **42** (2005), 65–83.
- [Su4] H. Sunagawa, *Large time behavior of solutions to the Klein-Gordon equation with nonlinear dissipative terms*, J. Math. Soc. Japan, to appear.
- [T] Y. Tsutsumi, *Stability of constant equilibrium for the Maxwell-Higgs equations*, Funkcial. Ekvac. **46** (2003), 41–62.