

振動中心軸の移動量に着目した 非線形一自由度系の動的安定性

綾城 威歩生¹・植村 佳大²・高橋 良和³

¹ 学生会員 京都大学大学院 工学研究科 (〒615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂)
E-mail: ayashiro.ibuki.76w@st.kyoto-u.ac.jp (Corresponding Author)

² 正会員 京都大学助教 工学研究科 (〒615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂)
E-mail: uemura.keita.3n@kyoto-u.ac.jp

³ 正会員 京都大学教授 工学研究科 (〒615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂)
E-mail: takahashi.yoshikazu.4v@kyoto-u.ac.jp

本研究では、復元力低下領域における構造物の動的応答特性の基本的な理解に向けて、振動中心軸の移動(ドリフト)を伴う非線形一自由度系の動的安定性に関する理論的および解析的検討を行った。具体的には、外力振動数に対するドリフト量の応答倍率を導出し、数値解析によりその妥当性を検証した。この結果、応答倍率から算出される理論値を、解析により再現することができた。また、応答倍率から導かれるドリフト量-外力振動数関係上の特異点において、応答が急激に片側に発散する傾向が確認された。それにより、応答倍率における特異点のドリフト量が、構造物の動的安定性を考える上で重要な指標となり得る可能性が示された。

Key Words: *dynamic stability, drift response, steady-state response, response magnification factor*

1. 背景

東北地方太平洋沖地震の発生を機に、「設計基準外の地震動が発生したとしても構造物が単体またはシステムとして脆弱の破壊とならないよう配慮すべき」という危機耐性の概念が導入され¹⁾、今まで耐震設計で制御してきた範囲を超えた、不測の事態に対処するための配慮が必要となっている。そのため、今まで耐震設計で照査の対象とされていなかった、復元力低下領域での構造物の動的応答特性についての更なる理解が必要であるといえる。

現在、構造物の動的応答特性を検討する際は数値解析を用いるのが一般的であり、荷重低下領域における構造物の動的挙動を対象とした地震動解析は、これまでに数多く実施されている。例えば中尾ら²⁾は、限界状態3に至ったRC橋脚の耐荷能力を評価するために、地震応答解析により抵抗力の残存性を評価している。また中村ら³⁾は、部材の靱性率を向上させる内巻きスパイラル筋RC柱⁴⁾を有する高架橋を対象とした地震応答解析を実施している。さらに鈴木ら⁵⁾は、鋼製箱型断面橋脚を対象に、 $P-\Delta$ 効果による荷重低下を考慮した復元力モデルを構築

し、地震応答解析により鋼製橋脚の激震時挙動を検討している。またNogamiら⁶⁾は、繰返し载荷による荷重低下を考慮したRC部材の提案モデルに対して地震応答解析を実施し、RC構造物の動的変形特性が地震動の継続時間に依存することを明らかにしている。またEmadoddin and Shahrokh⁷⁾は、部材の耐力低下を考慮したFEMモデルを用いた動的解析により、デッキ型RCアーチ橋の地震時挙動の検討を行っている。しかし、地震波を用いた数値解析では結果が入力地震波の特性に依存するため、一般性のある議論を行いにくいという側面がある。

一方で、一自由度系という敢えて単純なモデルを用いた理論的検討を行うことによって、構造物の動的応答を定量的に評価することができ、復元力低下領域での構造物の動的安定性への基本的な理解に繋がると考えられる。そのような背景の中、Caughey⁸⁾は一自由度系の非線形定常応答に対して、応答倍率を用いた理論的検討を行っている。振幅が正負対称な強制調和外力に対する運動方程式を考えることで、非線形一自由度系の変位の応答倍率を導出している。

ここで、運動方程式は動的な力のつり合いを表すため、振幅が正負対称な強制調和外力が作用するとき、非線形

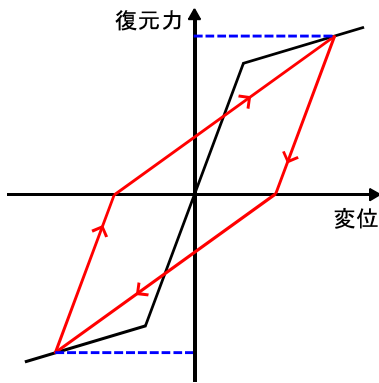
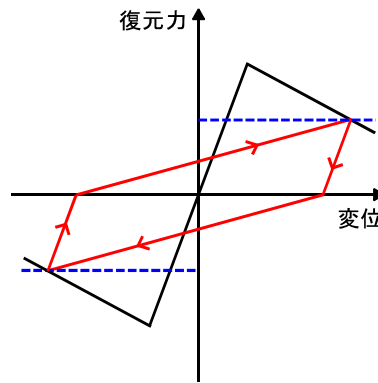
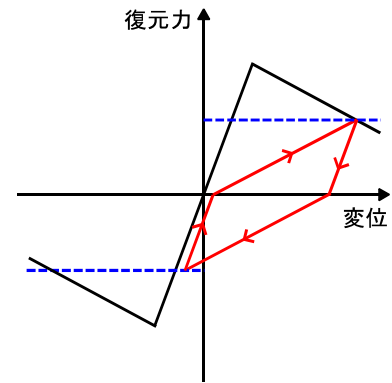


図-1 二次剛性が正の場合の応答



(a) 応答変位が正負対称の履歴



(b) 応答変位が正負非対称の履歴

図-2 二次剛性が負の場合の応答

一自由度系の復元力は正負対称となる。そのため、最大点指向型バイリニアの履歴曲線を有する非線形一自由度系において、降伏後の骨格曲線の勾配(二次剛性)が正である場合(図-1)と負である場合(図-2)の二つのケースを考えた場合、前者では変位に対して正負対称な定常応答を示す履歴曲線が一意に決まるのに対して、後者では応答変位が正負対称である履歴の他に、応答変位の振動中心軸の片寄り(以降、「ドリフト」とする)を伴う履歴が発現すると考えられる。図-1に示す二次剛性が正の履歴に関しては Caughey⁸⁾が、図-2(a)に示す二次剛性が負であり応答変位が正負対称の履歴に関しては、過去に Capecchi and Vestroni^{9), 10)}や著者ら¹¹⁾がそれぞれ理論的検討を行っているが、これらの検討では非線形一自由度系のドリフトは考慮されていない。

構造物のドリフトを取り上げた研究はこれまでにいくつか実施されている。例えば後藤・家村¹²⁾は、強震時における構造物の応答変位の振動中心軸の移動量を定量的に評価することによって構造物が破壊に至るまでの課程を明らかにしている。また曾田・谷¹³⁾は、弾塑性構造物の動的応答特性の統計的評価に用いられてきた従来の等価線形化法に対して、応答変位の履歴中心軸の移動を考慮した改良を行った上で、定常および非定常入力に対する構造物の動的解析を実施している。また Huang and Kuo¹⁴⁾は、静的持続荷重下において周期励振を受ける完全弾塑性履歴モデルの応答特性を検証しており、外力振動数に応じて異なるタイプの履歴中心軸の移動を伴う定常応答の予測を行っている。しかしながら、最大点指向型バイリニアの履歴曲線を有する非線形一自由度系に対して、図-2(b)に示すような二次剛性が負であることに起因するドリフトを取り扱った研究はこれまでにない。

以上の背景から、本研究では、構造物の動的安定性の判断指標としてドリフトの度合いに着目し、Caughey⁸⁾や Capecchi and Vestroni^{9), 10)}による検討に応用することで導出した変位の応答倍率を用いて、非線形一自由度系がドリフト

を伴って定常応答する際の動的安定性に関して考察を行う。

2. 非線形一自由度系のドリフト量の応答倍率

(1) 応答変位が正負対称な非線形一自由度に対する変位の応答倍率

振幅が正負対称な強制調和外力に対する非線形一自由度系の運動方程式は、式(1)のように記述される。

$$m\ddot{z} + F(z) = A \cos \omega t \quad (1)$$

ここに、 t は時間、 m は質点の質量、 z は質点の変位、 $F(z)$ は一自由度系の復元力、 A は外力の振幅、 ω は外力振動数である。そして Caughey⁸⁾は、式(1)を正規化した運動方程式(式(2))に対して、図-1に示すような応答変位が正負対称である定常応答解を式(3)のように仮定することで、非線形一自由度系に対する変位の応答倍率である式(12)を導出している。

$$\ddot{x} + \omega_0^2 f(x) = \frac{\omega_0^2}{\gamma} \cos \omega t \quad (2)$$

$$x = X \cos(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

$$C(X) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(X \cos \theta) \cos \theta d\theta \quad (4)$$

$$S(X) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(X \cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (5)$$

$$x = \frac{z}{z_y} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{F(xz_y)}{F_y} \quad (7)$$

$$\omega_0^2 = \frac{F_y}{mz_y} \quad (8)$$

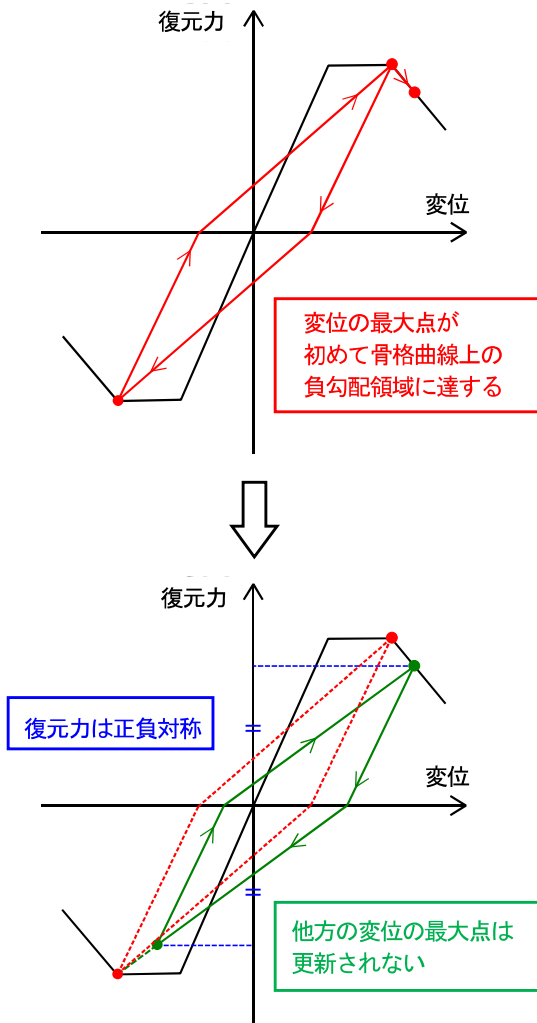


図-3 振幅が正負対称な強制調和外力下でのドリフトの発現 (降伏後に復元力が一定となったのち骨格曲線が負勾配となる場合)

$$\gamma = \frac{F_y}{A} \quad (9)$$

$$\theta = \omega t + \varphi \quad (10)$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \Omega \quad (11)$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{X} \left\{ C(X) \pm \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - S(X)^2} \right\} \quad (12)$$

ここに、 z_y は弾塑性ばねの降伏点変位、 F_y は降伏点荷重、 ω_0 は固有振動数、 $f(x)$ は一自由度系の復元力、 φ は外力と変位の位相差、 X は応答の振幅、 $q(x)$ は履歴曲線を表す関数である。なお、式(12)に示す応答倍率には、外力比 (降伏点荷重/外力の振幅) γ 、骨格曲線の形状に関する関数である $C(X)$ および $S(X)$ が含まれている。

また Capecchi and Vestroni^{9,10)}は、図-2(a)に示すような骨格曲線に負勾配を有する非線形一自由度系の定常応答に

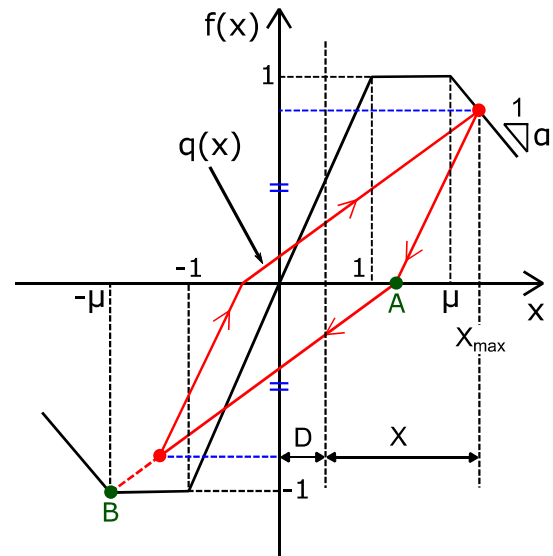
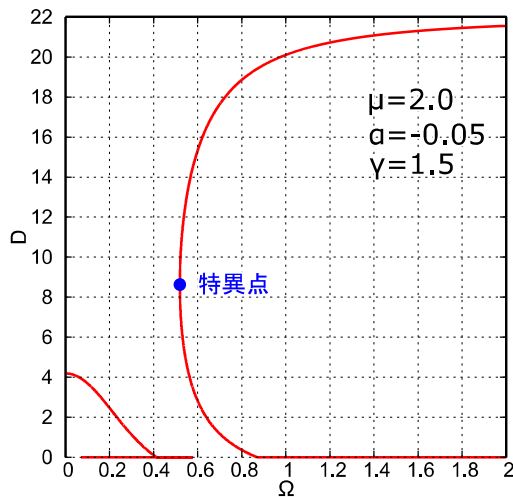


図-4 ドリフトを伴う定常応答解の仮定

対して理論的検討を行い、式(12)に示す応答倍率を拡張するとともに、骨格曲線に負勾配を有する場合にのみ発生する定常応答の不安定条件を導出している。著者ら¹¹⁾は、Capecchi and Vestroni^{9,10)}が導出した定常応答の不安定条件を、RC部材のように降伏後に復元力が一定となったのち骨格曲線が負勾配となる非線形一自由度系に対して拡張し、その動的安定性についての理論的検討を行っている。しかし、Capecchi and Vestroni^{9,10)}や著者ら¹¹⁾の既往研究では、系が初めに仮定した定常応答を示さなくなることを不安定と定義して不安定条件を導出しており、系の動的安定性を考える上では安全側に寄った議論となっているといえる。

(2) ドリフトを伴う非線形一自由度系の変位の応答倍率とドリフト量の応答倍率

式(2)に示す運動方程式は、動的な力のつり合いを表すため、振幅が正負対称な強制調和外力が作用するとき、非線形一自由度系の復元力は正負対称となる。ここで、RC部材のように、最大点指向型バイリニアの履歴曲線を有し、降伏後に復元力が一定となったのち骨格曲線が負勾配となる構造システムを考える (図-3)。この構造システムが、正負対称の復元力を示しながら応答する場合、片方の変位の最大点が初めて骨格曲線上の負勾配領域に達したとき、他方の最大点は更新されないことがわかる。すなわち、正負の変位の最大点が共に復元力低下領域に位置することはないため、応答変位に非対称性が生じ、ドリフトを伴う変位応答が発現すると考えられる (図-3)。そこで本研究では、最大点指向型バイリニアの履歴曲線を有し、降伏後に復元力が一定となったのち骨格曲線が負勾配となる非線形一自由度系に対し、復元力低下領域において図-4に示すような定常応答を考え、運動方程式


 図-5 ドリフト量 D の応答倍率

(式(2))に対する応答解を式(13)のように仮定する.

$$x = X \cos(\omega t + \varphi) + D \quad (13)$$

ここで φ は外力と変位の位相差, X は応答の振幅, D はドリフト量である. なお本検討では, 非線形一自由度系の復元力は正負対称となり, かつ復元力低下が生じない変形領域ではドリフトは発生しないと考えた. そのため, 非線形一自由度系の変位の最大値 $X_{\max}$ が, 復元力低下領域に存在する場合, 変位の最小値 $X_{\min}$ は, 図中の点 A (履歴曲線上で復元力=0となる点) と点 B (復元力低下の開始点) とを結ぶ直線上に位置すると考え, 最大値 $X_{\max}$ に対する X および D を式(15), 式(16)のように一意に定めた.

$$X_{\max} = X + D \quad (14)$$

$$X = \frac{1}{2} [\alpha(1 - \alpha)X_{\max}^2 + (1 + 2\alpha^2\mu - \alpha)X_{\max} - \alpha\{\mu^2(1 + \alpha) - \mu\} + \mu] \quad (15)$$

$$D = \frac{1}{2} [\alpha(\alpha - 1)X_{\max}^2 + (1 - 2\alpha^2\mu + \alpha)X_{\max} + \alpha\{\mu^2(1 + \alpha) - \mu\} - \mu] \quad (16)$$

なお, 復元力低下が開始する点での変位を靱性点として, 靱性率 μ を用いて靱性点=降伏点変位 $\times \mu$ と定義する. また, 復元力低下領域での骨格曲線の勾配を終局後勾配 α とする.

これらの式を用いて, 本検討では Caughey の検討を参考にドリフトを伴う非線形一自由度系の変位の応答倍率(式(21))を導出した.

$$C(X_{\max}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(X \cos \theta + D) \cos \theta d\theta \quad (17)$$

$$S(X_{\max}) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(X \cos \theta + D) \sin \theta d\theta \quad (18)$$

$$\theta = \omega t + \varphi \quad (19)$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \Omega \quad (20)$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{X} \left\{ C(X_{\max}) \pm \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - S(X_{\max})^2} \right\} \quad (21)$$

ここに, $q(x)$ は履歴曲線を表す関数, $C(X_{\max})$ および $S(X_{\max})$ は骨格曲線の形状に関する関数である.

ここで, 式(21)は外力振動数 ω と変位の最大値 $X_{\max}$ の関係式であるが, $X_{\max}$ が与えられると式(15), 式(16)を用いて振幅 X およびドリフト量 D は一意に求まるため, 任意の $X_{\max}$ に対応する X を式(21)に代入して Ω を順次計算することにより, $X_{\max}$ を媒介変数としてドリフト量と外力振動数の関係(ドリフト量の応答倍率)を描くことができる. 例として $\alpha = -0.05$, $\mu = 2.0$, $\gamma = 1.5$ の場合のドリフト量の応答倍率を図-5に示す. ここで図-5より, ドリフト量がゼロとなっている部分は, 非線形一自由度系が復元力低下が発生しない変形領域で定常応答しているため, ドリフトが発生しないことを意味する. また, Ω が0~0.4の範囲でドリフト量 D が0~4程度生じている部分に関しては, Caughey⁸⁾の検討により導出された不安定領域内に位置するため, 現実には現れない解であると考えられる. ここで, ドリフト量の応答倍率では, 外力振動数の微小な変化に対するドリフト量の変化量が無限大となる点($dD/d\Omega = 0$ となる点. 以降, 特異点と呼ぶ)が存在することがわかる. そこで本検討では, この特異点が系の動的安定性の検討の上で重要な意味を持ち得ると考え, 数値解析により特異点近傍での非線形一自由度系の定常応答の振動特性および動的安定性に関して検討した. なお, 以降の検討では, 特異点のドリフト量を D_s と定義した.

3. ドリフトを伴う非線形一自由度系の定常応答に関する解析的検討

(1) 本検討の概要

本章では, 2.(2)で導出した非線形一自由度系のドリフト量の応答倍率の妥当性を数値解析により検証する. また, ドリフト量の応答倍率を用いて, 非線形一自由度系の動的安定性に対する検討を行う. 解析モデルは図-6に示した減衰のない一自由度モデルであり, 質点に定常な外力 $P = A \cos \omega t$ を作用させ, 系の定常応答を算定する. ここで, m は質点の質量, A は外力の振幅, ω は外力振動数, t は時間である. また, 下部の支点と上部の質点を結ぶ弾塑性ばねには, RC 部材のように降伏後に復元

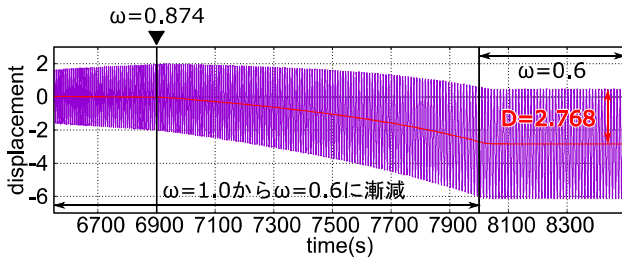
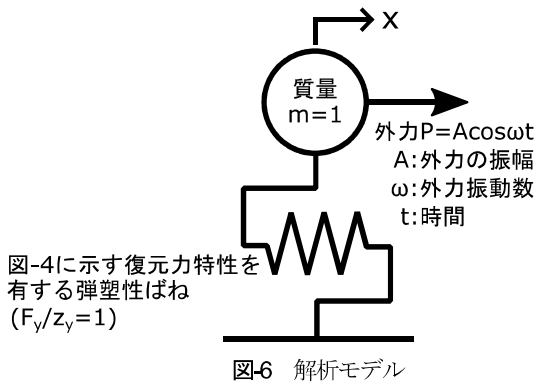


図-7 $\omega = 1.0$ から $\omega = 0.6$ へ変化させた場合の時刻歴応答

力が一定になったのち負勾配となる骨格曲線を有する復元力モデルを採用し、履歴モデルには最大点指向型バイリニアを用いた。なお本検討では、質量 $m = 1$ 、初期剛性 $F_y/z_y = 1$ と設定することにより、固有振動数を $\omega_0 = 1$ としているため、 $\Omega = \omega$ となる。また動的応答解析では、平均加速度法により数値積分を行った。

(2) 数値解析解と理論解の比較

はじめに、終局後勾配 $\alpha = -0.05$ 、靱性率 $\mu = 2.0$ 、外力比 $\gamma = 1.5$ の場合を例に、外力振動数を $\omega = 1.0$ から $\omega = 0.6$ まで緩やかに変化させた後、外力振動数を $\omega = 0.6$ で一定として、一自由度系を定常応答させる数値解析を行った。この時の変位の時刻歴応答を図-7に示す。また、図中の赤線はドリフト量 D の時刻歴応答を表している。図-7より、はじめはドリフトを伴わず変位に対して正負対称な応答を示しているが、 $\omega = 0.874$ 以下となる領域に入ると外力振動数の低下に伴ってドリフト量が増加し、外力振動数が $\omega = 0.6$ で一定となった後は $D = 2.768$ のドリフト量を有する定常応答を示すことがわかる。

ここで、外力振動数を高周波側から低周波側に向けて変化させた時に、一自由度系に初めてドリフトが発生する時の外力振動数の理論解は $\omega = 0.871$ であり、 $\omega = 0.6$ の時のドリフト量の理論解は $D = 2.815$ であった。よって、ドリフト量の数値解析解と理論解は概ね一致していると判断できる。そのため、ドリフト量の応答倍率を用いることで、外力振動数の変化に伴う非線形一自由度系のドリフト量の増大を理論的に表現できるといえる。

次に、終局後勾配 $\alpha = -0.05$ 、靱性率 $\mu = 2.0$ 、外力

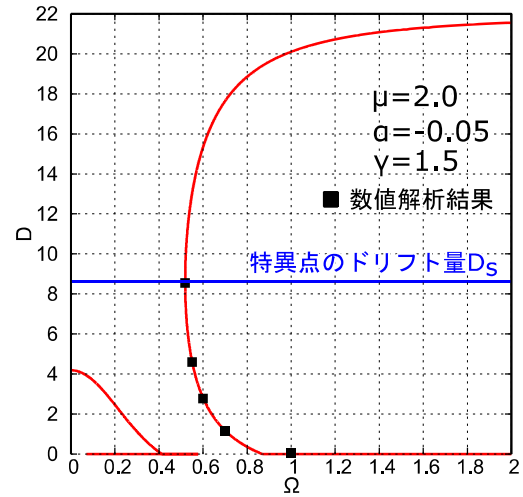


図-8 解析値と理論値の比較

比 $\gamma = 1.5$ という条件のもと、外力振動数 ω をパラメータとして一自由度系を定常応答させる数値解析を行い、その際に得られた定常応答のドリフト量を、図-5で示した理論解と比較した。その結果を図-8に示す。図-8より、各ケースにおいてドリフト量の数値解析解と理論解は概ね一致していることがわかる。一方で、 Ω が $0 \sim 0.4$ の範囲でドリフト量 D が $0 \sim 4$ 程度生じている部分は、2.(2)で述べたように現実には現れない解であると考えられ、実際に数値解析においても応答解を得ることは出来なかった。一方で、CaugheyやCapecchi and Vestroniの研究における動的安定性に関する検討は、応答変位が正負対称の定常応答を対象としているのに対し、本研究はドリフトを伴う定常応答に関する検討を行っているため、安定性に関しては必ずしも同様の議論が成り立つとは限らず、検討の余地が残されていると考える。

また、図-8より特異点近傍まで解析解と理論解は概ね一致したが、 ω をさらに漸減させると応答が急激に片側に発散したため、ドリフト量が D_s よりも大きくなる領域で定常応答は得られなかった。ここでその一例として、外力振動数 $\omega = 0.5187$ の定常入力下で応答している非線形一自由度系 ($\alpha = -0.05$, $\mu = 2.0$, $\gamma = 1.5$) において、応答が片側に発散する場合の時刻歴応答および復元力変位関係を図-9に示す。図中の赤線はドリフト量 D の時刻歴応答を表している。図-9(a)を見ると、定常な外力を入力しているにも関わらず、ドリフト量が徐々に増大し、ドリフト量が D_s となる近傍を境に応答が急激に片側に発散する様子が見て取れる。また、図-9(b)より、ドリフト量の増大とともに復元力が低下し、やがて復元力が 0 となる様子が確認できる。

そこで、非線形一自由度系の特異点近傍における応答に関しての、より詳細な検討を次節にて行った。

表-1 数値解析結果

(a) ケース 1

	α	μ	γ	ω	D_a	D_s	D_a/D_s
Analysis 1	-0.05	2.0	1.5	0.51873	8.468	8.629	0.9813
Analysis 2				0.51872	8.506		0.9857
Analysis 3				0.51871	×		×

(b) ケース 2

	α	μ	γ	ω	D_a	D_s	D_a/D_s
Analysis 1	-0.05	2.0	1.0	0.60614	8.131	8.243	0.9864
Analysis 2				0.60613	8.165		0.9905
Analysis 3				0.60612	×		×

(c) ケース 3

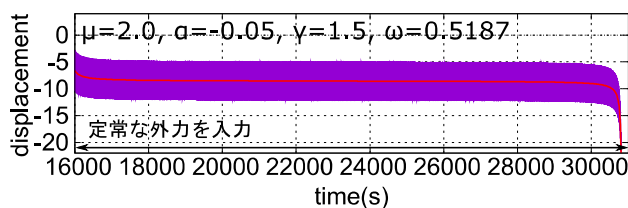
	α	μ	γ	ω	D_a	D_s	D_a/D_s
Analysis 1	-0.05	2.0	2.0	0.46319	8.439	8.730	0.9667
Analysis 2				0.46318	8.477		0.9710
Analysis 3				0.46317	×		×

(d) ケース 4

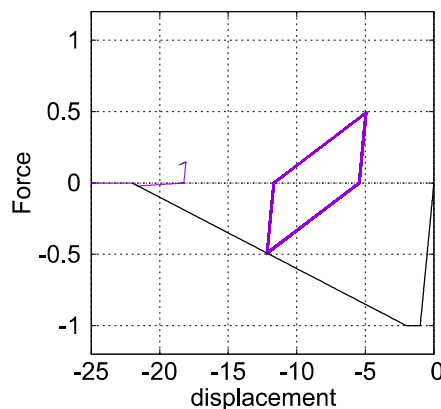
	α	μ	γ	ω	D_a	D_s	D_a/D_s
Analysis 1	-0.05	4.0	1.5	0.45083	7.460	7.746	0.9630
Analysis 2				0.45082	7.508		0.9693
Analysis 3				0.45081	×		×

(e) ケース 5

	α	μ	γ	ω	D_a	D_s	D_a/D_s
Analysis 1	-0.10	2.0	1.5	0.65343	4.220	4.258	0.9911
Analysis 2				0.65342	4.261		1.0007
Analysis 3				0.65341	×		×



(a) 時刻歴応答



(b) 復元力変位関係

図-9 特異点近傍でのドリフトによる発散挙動

(3) 特異点近傍での応答に関する検証

本節では、非線形一自由度系の特異点近傍における応答に関してより詳細な検討を行うため、 $\alpha = -0.05$ 、 $\mu = 2.0$ 、 $\gamma = 1.5$ のケースを基準とした、外力のパラメータおよび復元力特性の組み合わせの異なる複数のケースについて、ドリフト量の応答倍率における特異点近傍での数値解析を実施する。各ケースにおいて、外力振動数 ω を 1×10^{-5} ずつ変化させながら、各外力振動数 ω における応答が定常応答もしくは片側に発散するまで十分な時間の解析を行っている。表-1 (a) から表-1 (e) に、各ケースにおける復元力特性および外力のパラメータの組み合わせ、外力振動数 ω 、定常応答時のドリフト量解析値 D_a 、特異点のドリフト量 D_s 、ドリフト量の解析値と特異点のドリフト量の比 D_a/D_s を示す。表には応答が発散した ω における結果と、その ω に近いものから 2 点の結果を示しており、応答が発散したケースに関しては、 D_a および D_a/D_s の欄に×印を記している。また、表-1 (a) から表-1 (e) に対応するドリフト量の時刻歴応答を図-10 (a) から図-10 (e) に示す。図中には外力振動数の漸減

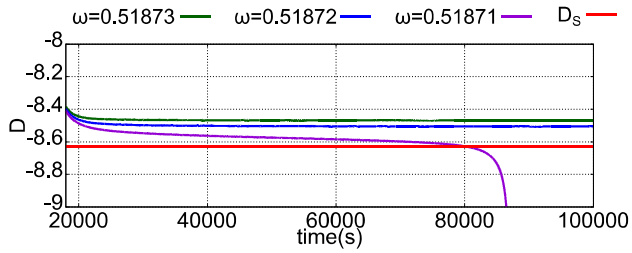
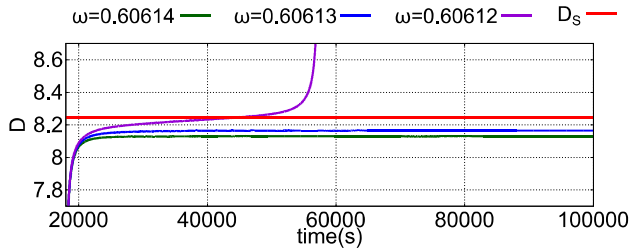
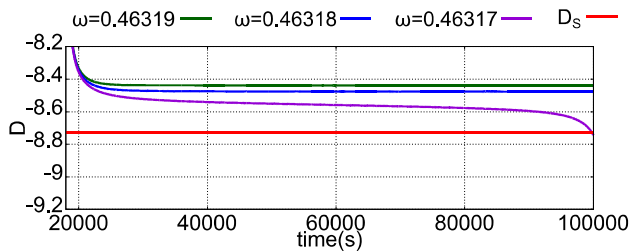
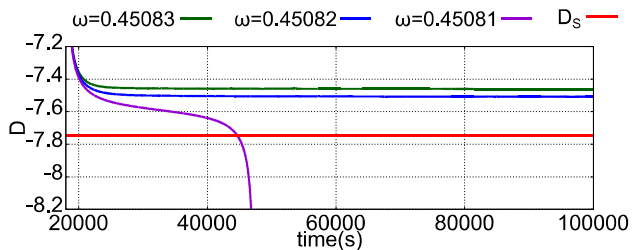
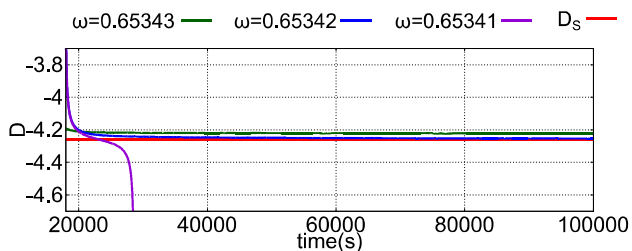

(a) ケース 1 ($\alpha = -0.05$, $\mu = 2.0$, $\gamma = 1.5$)

(b) ケース 2 ($\alpha = -0.05$, $\mu = 2.0$, $\gamma = 1.0$)

(c) ケース 3 ($\alpha = -0.05$, $\mu = 2.0$, $\gamma = 2.0$)

(d) ケース 4 ($\alpha = -0.05$, $\mu = 4.0$, $\gamma = 1.5$)

(e) ケース 5 ($\alpha = -0.10$, $\mu = 2.0$, $\gamma = 1.5$)

図-10 ドリフト量の時刻歴応答

が止まり、定常な外力を入力し始めた時刻から 100000s までの範囲におけるドリフト量の変化を表しており、各ケースに対する D_s を併せて示している。これらの表および図に示すように、定常な外力を入力しているにもかかわらず、やがて D_s 近傍を境に応答が片側に発散する様子が確認できる。以上のように、全てのケースにおいて特異点のドリフト量 D_s を境に応答が急激に片側に発散していく傾向が見られたことから、ドリフト量の応答倍率における特異点のドリフト量 D_s が、非線形一自由度系の定常応答が発散するか否かを判別する指標となり得る可能性が示されたといえる。

2.(1)でも述べたように、Capecchi and Vestroni^{9),10)}や著者ら¹¹⁾の既往研究では、系が初めに仮定した定常応答を示さなくなることを不安定と定義して不安定条件を導出しており、系の動的安定性を考える上では安全側に寄った議論となっている。しかし本研究では、特異点のドリフト量 D_s を用いることで、非線形一自由度系の定常応答が発散するか否かを判別できる可能性を示していることから、構造システムの危機耐性を評価する上で有益な情報となり得る可能性があるといえる。

(4) 復元力特性および外力と特異点のドリフト量の関係

本項では、復元力特性および外力が特異点のドリフト量 D_s に及ぼす影響に関して検討を行う。終局後勾配 $\alpha = -0.05$ 、靱性率 $\mu = 2.0$ 、外力比 $\gamma = 1.5$ のケースを基準として、 α 、 μ 、 γ のうち、いずれか一つのパラメータのみをそれぞれ変化させた際の特異点のドリフト量の変化を検証する。

a) 終局後勾配 α に関する D_s の変化

図-11 (a) に、 $\alpha = -0.05$ 、 $\mu = 2.0$ 、 $\gamma = 1.5$ のケースを基準として、終局後勾配を $\alpha = -0.02$ 、 -0.05 、 -0.2 、 -0.5 の 4 通りで変化させた場合のドリフト量 D の応答倍率を示す。なお、図中の丸印はその応答倍率における特異点を表している。図-11 (a) を見ると、 α が低下する程ドリフト発生時の応答倍率の勾配が急となり、より小さいドリフト量で特異点が発生していることが確認できる。また、図-11 (b) に終局後勾配を $\alpha = -1.0 \sim 0$ の範囲でパラメトリックに変化させた場合の特異点のドリフト量 D_s の変化を示す。図-11 (b) から、 α の低下に伴い D_s が減少することにより、復元力低下領域において非線形一自由度系が定常応答を示す安定領域がより狭くなることがわかる。

b) 靱性率 μ に関する D_s の変化

図-12 (a) に、 $\alpha = -0.05$ 、 $\mu = 2.0$ 、 $\gamma = 1.5$ のケースを基準として、靱性率を $\mu = 1.0$ 、 2.0 、 6.0 、 11.0 の 4 通りで変化させた場合のドリフト量 D の応答倍率を示す。図-12 (a) を見ると、 μ の増加に伴い、 D_s は減少すること

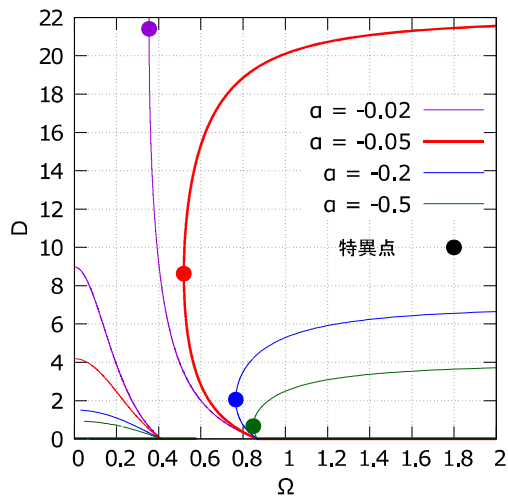
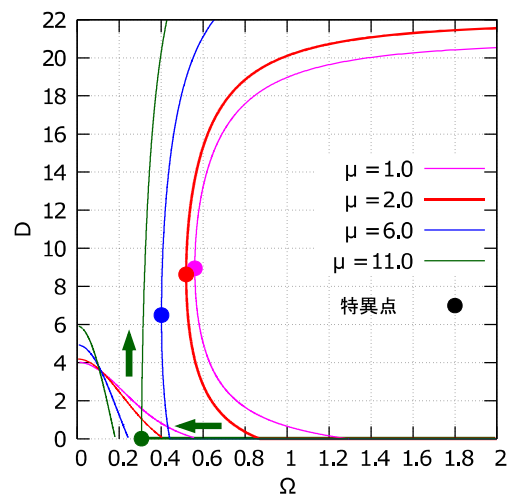
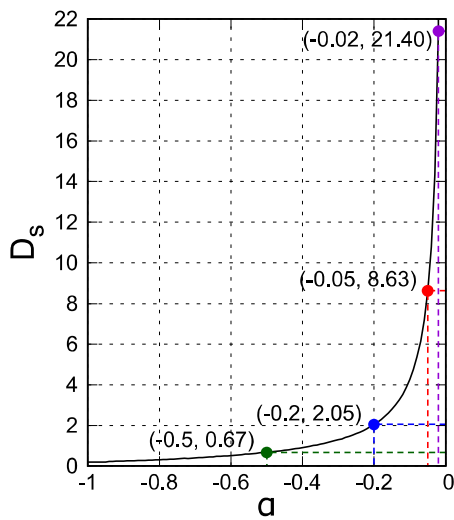

 (a) ドリフト量 D の応答倍率

 (a) ドリフト量 D の応答倍率

 (b) 特異点のドリフト量 D_s の変化

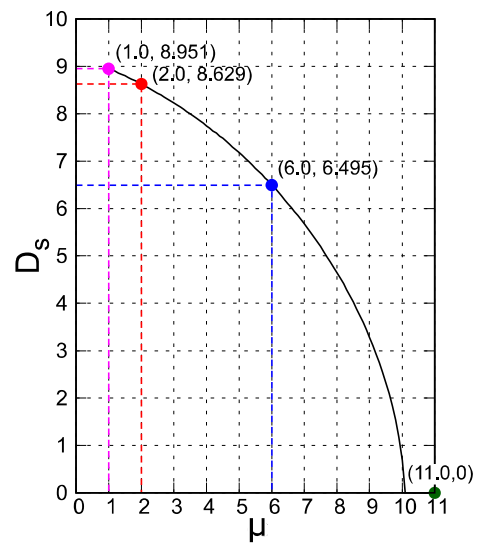
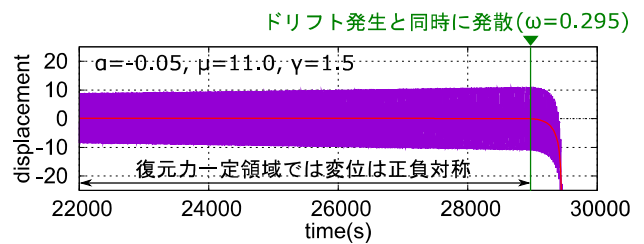
 図-11 終局後勾配 α と特異点のドリフト量 D_s の関係
($\mu = 2.0$, $\gamma = 1.5$)

 (b) 特異点のドリフト量 D_s の変化

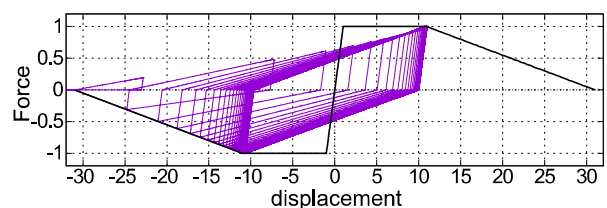
 図-12 靱性率 μ と特異点のドリフト量 D_s の関係
($\alpha = -0.05$, $\gamma = 1.5$)

が確認できる．ここで， $\mu = 11.0$ のケースにおいて， D_s がゼロとなる点を特異点とみなしているのは，その点での応答倍率が不定となり，2.(2)で述べた特異点と同様の扱いができると考えたためである．また，図-12 (b)に靱性率 $\mu = 1.0 \sim 11.0$ の範囲でパラメトリックに変化させた場合の特異点のドリフト量 D_s の変化を示す．図-12 (b) から， μ の増大に伴い D_s は単調に減少し， $\mu = 10.1$ 以上で $D_s = 0$ となることがわかる．

ここで，靱性率が過大な場合に $D_s = 0$ となる現象を数値解析で再現するため， $\mu = 11.0$ の場合に図-12 (a)に矢印で示す経路で外力振動数 ω を変化させた場合の時刻歴応答および履歴曲線を図-13 に示す．また，図中の赤線はドリフト量 D の時刻歴応答を表している．図-13 (a)を見ると，復元力低下が生じない領域では正負対称の変位を保っていた応答が，復元力低下領域に入りドリフトが発生した瞬間に急激に片側に発散する様子が確認できる．

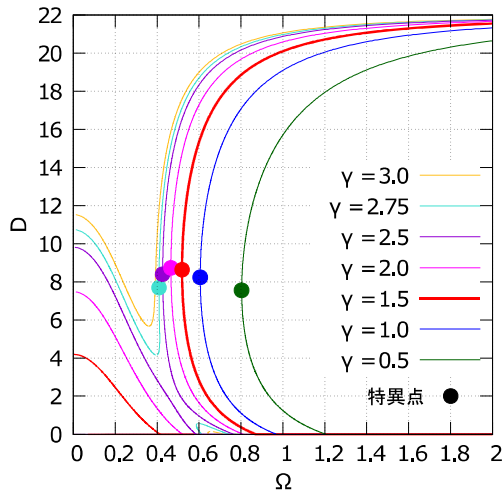


(a) 時刻歴応答

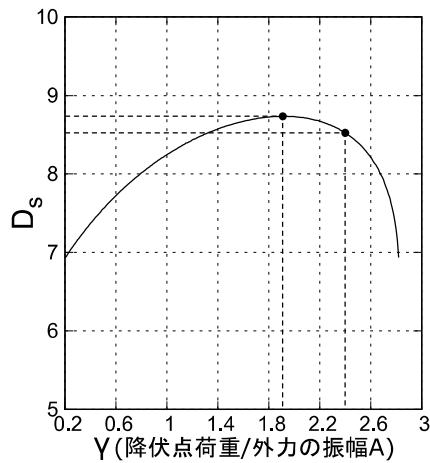


(b) 復元力変位関係

 図-13 $\mu = 11.0$ の場合の発散の様子



(a) ドリフト量 D の応答倍率



(b) 特異点のドリフト量 D_s の変化

図-14 外力比 γ と特異点のドリフト量 D_s の関係
($\alpha = -0.05$, $\mu = 2.0$)

図-13 (b) を見ても、復元力低下領域に入った瞬間に復元力が急激に低下している様子がわかる。これらの結果より、 μ が大きいほど非線形一自由度系の復元力低下領域において許容されるドリフト量が減少するため、復元力低下領域における定常応答の安定性が低下すると考えられる。これは、著者らが既往の研究¹⁰⁾で理論的に明らかにしたように、靱性率 μ の値が大きいほど、復元力低下領域における定常応答の安定性が低下することと同様の現象である。これは、靱性率 μ の値が大きいほど、応答が反転した後、他方の変位の最大点に向かう際の剛性が小さくなること等が要因として考えられるが、その明確なメカニズムを解明するには至らなかった。そのため、今後更なる検討が必要であるといえる。

c) 外力比 γ (降伏点荷重/外力の振幅) に関する D_s の変化

図-14 (a) に、 $\alpha = -0.05$, $\mu = 2.0$, $\gamma = 1.5$ のケース

を基準として、外力比を $\gamma = 3.0, 2.75, 2.5, 2.0, 1.5, 1.0, 0.5$ の 7 通りで変化させた場合のドリフト量 D の応答倍率を示す。また、図-14 (b) に外力比を $\gamma = 0.2 \sim 3.0$ の範囲でパラメトリックに変化させた場合の特異点のドリフト量 D_s の変化を示す。図-14 (a) を見ると、 $\gamma = 3.0, 2.75$ のケースのように外力が小さい場合は、応答倍率が上下で分離することがわかる。しかし、理論的には各 Ω において応答解は2つ算出されるが、解析においては特異点のドリフト量を境に応答は発散するため、2つの理論解のうちドリフト量 D が大きい方の解は現れないと考えられる。さらに、 $\gamma = 3.0$ に至っては $dD/d\Omega = 0$ となる点が存在せず、応答倍率が外力振動数に対して常に有限の値の勾配を持つため、特異点は存在しない。また、外力比をパラメトリックに変化させた数値解析により、外力比が $\gamma = 2.83$ よりも大きい範囲では特異点は確認されなかった(図-14 (b))。外力が小さいケースでは応答倍率上の特異点が存在しなくなるにより、非線形一自由度系の応答が片側に発散しなくなるため、安定性は向上すると考えられる。

一方で、 $\gamma = 1.91$ 以上の場合、 γ の増大(外力の振幅 A の減少)に伴って D_s が減少することがわかる。一般的に、外力の振幅 A が増大すると、構造物の応答は大きくなるため、構造物の安定性は低下すると考えられる。しかしながら、 $\gamma = 1.91$ 以上の場合における、 γ の増大に伴う D_s の減少は、その構造システムの安定のために許容されるドリフト量 D の上限が低下することを表すため、外力の振幅 A の減少に伴ってドリフトした構造物の安定性が低下していることを意味する。

そこで、ドリフト量の応答倍率が示した上記の現象の再現を行うため、 D_s が最大となる $\gamma = 1.91$ と、 A の減少(γ の増大)に伴い D_s が減少する領域内に存在する $\gamma = 2.4$ のケースに対して特異点近傍における数値解析を実施し、得られた解析結果を比較した。3.(2)と同様に、外力振動数 ω を 1×10^{-5} ずつ変化させながら、各外力振動数 ω における応答が定常応答もしくは片側に発散するまで十分な時間の解析を行った。表-2 (a) および表-2 (b) に、各ケースでの外力振動数 ω 、定常応答時のドリフト量解析値 D_a 、特異点のドリフト量 D_s 、ドリフト量の解析値と特異点のドリフト量の比 D_a/D_s を示す。表には応答が発散した ω における結果と、その ω に近いものから2点の結果を示している。また、表-2 (a) および表-2 (b) に対応するドリフト量の時刻歴応答を図-15 (a), 図-15 (b) に示す。これらの表および図に示すように、 $\gamma = 2.4$ では $D_a = 8.181$ を最後に応答が発散しているのに対し、 $\gamma = 1.91$ では $D_a = 8.495$ まで安定した応答を示している。すなわち、 $\gamma = 2.4$ で応答が発散しているドリフト量と同様の D_a においても、 $\gamma = 1.91$ では発散することなく定常応答を示していることから、復元力低下領域にお

表-2 数値解析結果

(a) $\gamma = 1.91$ の場合

	α	μ	γ	ω	D_a	D_s	D_a/D_s
Analysis 1	-0.05	2.0	1.91	0.47129	8.460	8.735	0.9685
Analysis 2				0.47128	8.495		0.9725
Analysis 3				0.47127	×		×

(b) $\gamma = 2.4$ の場合

	α	μ	γ	ω	D_a	D_s	D_a/D_s
Analysis 1	-0.05	2.0	2.4	0.43077	8.129	8.524	0.9537
Analysis 2				0.43076	8.181		0.9598
Analysis 3				0.43075	×		×

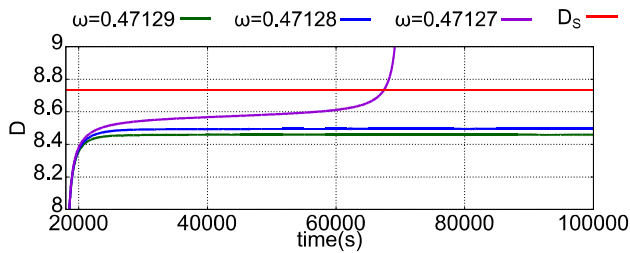
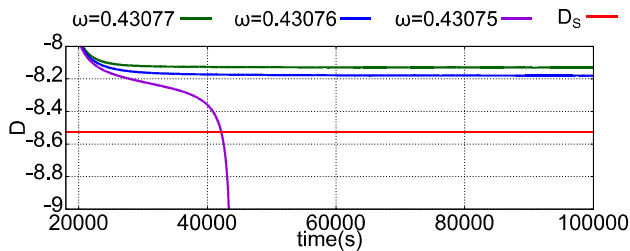

(a) $\gamma = 1.91$ の場合

(b) $\gamma = 2.4$ の場合

図-15 ドリフト量の時刻歴応答

る定常応答の安定性がより優れているといえる。

よって、理論的な検討と解析的な検討の両面から、 $\gamma = 1.91$ 以上の場合において、外力の振幅 A の減少に伴って D_s が減少することが示された。しかしながら、本研究では、 A の減少に伴ってドリフトした構造物の安定性が低下するメカニズムを解明するには至らなかった。そのため、今後更なる検討を行っていく必要があるといえる。

4. まとめ

本研究では、単純なモデルを用いた検討を行うことで、復元力低下領域における構造物の動的安定性の基本的な理解に繋がるという考えのもと、振動中心軸の移動量(ドリフト)に着目した、非線形一自由度系の動的安定性

に関する検討を行った。以下に本研究で得られた知見を示す。

- 骨格曲線に負勾配を有する非線形一自由度系に対して、ドリフトを伴う定常応答解を仮定することにより、振幅が正負対称な強制調和外力が作用する際の外力振動数に対するドリフト量の応答倍率を導出した。
- 導出したドリフト量の応答倍率に現れる定常応答に関して、数値解析を用いた検討を行った結果、外力振動数の微小な変化に対するドリフト量の変化量が無限大となる特異点において、応答が急激に片側に発散する傾向が確認された。それにより、ドリフト量の応答倍率における特異点のドリフト量が、非線形一自由度系の定常応答がドリフトにより発散するか否かを判別する指標となり得ることがわかった。
- 復元力特性の変化に対する特異点のドリフト量の変化を検証した結果、靱性率の増加および終局後勾配の低下に伴い特異点のドリフト量が減少することがわかった。特に靱性率が過大の場合、特異点のドリフト量がゼロになることが理論的に示された。また、数値解析において変位が復元力低下領域に達した瞬間に応答が急激に片側に発散する様子が確認された。
- ドリフト量の応答倍率に対し、外力の変化に対する特異点のドリフト量の変化を検証した結果、外力の減少に伴って特異点のドリフト量が減少する領域が存在することを理論的に示した。また、外力の増大に伴って特異点のドリフト量が大きくなる現象を数値解析で再現することができた。

以上の検討より、非線形一自由度系に対して導出したドリフト量の応答倍率上の特異点が、構造物の動的安定性を考える上で重要な指標となり得る可能性が示された。

謝辞：本研究の一部は科学研究費補助金基盤研究(B)18H01522 の助成を受けて実施した。謝意を表します。

参考文献

- 1) 鉄道総合技術研究所：鉄道構造物等設計基準・同解説 耐震設計, 2012.
- 2) 中尾尚史, 宮田秀太, 大住道生：超過作用により限界状態 3 に至った RC 橋脚の耐荷能力に関する評価, 土木学会論文集 A1, Vol. 75, No. 4, pp. 294-305, 2019.
- 3) 中村渚, 水谷司, 長山智則：内巻きスパイラル筋 RC 柱高架橋が終局に至る地震動の大きさの動的非線形解析による推定, 土木学会論文集 A1, Vol. 72, No. 4, pp. 213-223, 2016.
- 4) 石橋忠良, 菅野貴浩, 木野淳一, 小林薫, 小原和宏：軸方向鉄筋の内側に円形帯鉄筋を配置した鉄筋コンクリート柱の正負交番載荷実験, 土木学会論文集, No. 795/V-68, pp. 95-110, 2005.
- 5) 鈴木森晶, 宇佐美勉, 寺田晶弘, 伊藤努, 才塚邦弘：鋼製箱形断面橋脚の復元力モデルと弾塑性地震応答解析, 土木学会論文集, No. 549/I-37, pp. 191-204, 1996.
- 6) Nogami, Y., Murano, Y. and Sato, T.: Nonlinear hysteresis model considering strength degrading by cyclic loading for RC members, *Quarterly Report of RTRI*, No. 49(4), pp. 227-231, 2008.
- 7) Emadoddin, M. F. and Shahrokh, M.: An investigation of the seismic behavior of a deck-type reinforced concrete arch bridge, *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, Vol. 16, No. 3, pp. 609-625, 2017.
- 8) Caughey, T. K.: Sinusoidal excitation of a system with bilinear hysteresis, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 27(4), pp. 640-643, 1960.
- 9) Capecchi, D. and Vestroni, F.: Steady-state dynamic analysis of hysteretic systems, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 111(12), pp. 1515-1531, 1985.
- 10) Capecchi, D. and Vestroni, F.: Periodic response of a class of hysteretic oscillators, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 25(2/3), pp. 309-317, 1990.
- 11) 渡邊康介, 植村佳大, 高橋良和：骨格曲線に負勾配を有する構造物の動的応答安定性に関する理論的検討, 第 39 回地震工学研究発表会講演集, No. 1433, 2019.
- 12) 後藤尚男, 家村浩和：強震時における 1 自由度系塑性変形に関する考察, 土木学会論文報告集, No. 184, pp. 57-67, 1970.
- 13) 曾田五月也, 谷資信：統計的等価線形化法による弾塑性構造物の振動解析, 日本建築学会論文報告集, No. 283, pp. 68-75, 1979.
- 14) Huang, C. H. and Kuo, S. Y.: Drift response of a bilinear hysteretic system to periodic excitation under sustained load effects, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 41, pp. 530-542, 2006.

(Received November 9, 2020)

(Accepted February 13, 2021)

DYNAMIC STABILITY OF NONLINEAR SDOF SYSTEMS FOCUSING ON THE MOVEMENT OF OSCILLATION CENTER AXIS

Ibuki AYASHIRO, Keita UEMURA and Yoshikazu TAKAHASHI

In this study, the dynamic stability of nonlinear single-degree-of-freedom systems with the movement of oscillation center axis (drift) is theoretically and analytically investigated to understand basic dynamic response characteristics of structures in the region of reduced restoring force. Specifically, The response magnification factor of the drift to forced frequency is derived and validated by numerical analysis. As a result, the theoretical value calculated from the response magnification factor was reproduced by the analysis. In addition, it was confirmed that the response diverges to one side rapidly at the singularity on the drift-frequency relation derived from the response magnification factor. Thereby it was suggested that the amount of drift on the singularity may be an important indicator for the dynamic stability of structure systems.