

Rate of convergence in first passage percolation with low moment conditions

日本大学理工学部 久保田 直樹 *

Naoki Kubota

College of Science and Technology,
Nihon University

Abstract

本稿では, 2013 年 12 月 17 日から 20 日に行われた研究集会「確率論シンポジウム」における講演内容をもとに, ファーストパッセージパーコレーションにおける asymptotic shape の漸近挙動について, その概要を述べる. また, 本研究を応用し, ファーストパッセージパーコレーションの分散の下からの評価に対する考察を行う.

1 Model and main results

本稿では, 2013 年 12 月 17 日から 20 日に行われた研究集会「確率論シンポジウム」における講演内容をもとに, 著者が行った「弱いモーメント条件の下でのファーストパッセージパーコレーションの研究」についての概要を述べる. 定理などの証明は概略程度に留めるため, 詳細については [6], または関連する研究である [2], [5] や [7] を参照されたい.

樹木が正方格子状に並んだ果樹園において, ある木で病気が発症したとする. 病気の伝染は隣接する 4 本の木にのみ起こり, その確率は独立に p ずつであるとする. このとき, 「ある木で発症した病気が, 果樹園の樹木にどのように伝染していくか」を問題として扱うのが, パーコレーションである. これに関連して, Hammersley と Welsh [4] によって導入された “ファーストパッセージパーコレーション” がある. ファーストパッセージパーコレーションでは, ある木 a からそれに隣接する木 b には, ランダムな時間 $\omega(\{a, b\})$ で病気が伝染するとし, 「ある範囲まで病気が広がる時間と, その感染経路」を問題として

* E-mail address: kubota@grad.math.cst.nihon-u.ac.jp

扱う。今回、このファーストパッセージパーコレーションに対し、病気の伝染が起こる範囲の形状の振る舞いについて研究を行った。

まず最初に、今回扱うファーストパッセージパーコレーションについて、より詳しく説明を行う。 $\mathcal{E}$ を正方格子 $\mathbb{Z}^d$ の辺集合とし、 $(\omega(e))_{e \in \mathcal{E}}$ を独立同分布な非負値確率変数列であるとする。(各 $\omega(e)$ を、木から木へ病気が伝染するときのランダムな時間とみなす。) このとき、 $\mathbb{Z}^d$ の辺を「 $e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow \cdots \rightarrow e_l$ 」と辿る経路 π において、その *passage time* を

$$T(\pi) := \sum_{i=1}^l \omega(e_i)$$

で定義する。さらに、 $\mathbb{Z}^d$ の頂点 x から y への *first passage time* を以下で定義する:

$$T(x, y) := \inf\{T(\pi); \pi \text{ は } \mathbb{Z}^d \text{ の頂点 } x \text{ から } y \text{ への経路}\}$$

ここで問題とするのは、原点 0 からの *first passage time* が t 以下となるような点の集合

$$B(t) := \left\{ y + h; y \in \mathbb{Z}^d, T(0, y) \leq t, h \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d \right\}, \quad t > 0$$

の漸近挙動である。

ここで、次の仮定 (A1) と (A2) を導入する: $F(x)$ を $(\omega(e))_{e \in \mathcal{E}}$ の共通の分布関数とする。このとき、 $\mathbb{Z}^d$ 上のボンドパーコレーションの臨界確率 p_c と、ある $\alpha > 1$ に対して

$$(A1) \quad F(0) < p_c,$$

$$(A2) \quad \int_0^\infty x^\alpha dF(x) < \infty.$$

仮定 (A2) の下では、次が成り立つことが知られている: ある関数 $\mu: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ が存在して、 P -a.s. と L^1 の意味で

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} T(0, nx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E[T(0, nx)] = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} E[T(0, nx)], \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$

この関数 μ を *time constant* と呼ぶ。さらに、仮定 (A1) と (A2) の下で、すべての $\epsilon > 0$ に対して確率 1 で次が成立する: 十分大きな $t > 0$ に対して、

$$(1 - \epsilon)B_0 \subset \frac{B(t)}{t} \subset (1 + \epsilon)B_0.$$

ここで、 $B_0 := \{x \in \mathbb{R}^d; \mu(x) \leq 1\}$ で、これを *limit shape* と呼ぶ。この結果に対し、Kesten [5] と Alexander [1] は、 $B(t)/t$ が B_0 へ漸近していく *rate* をより精密に調べ、最大でも $\epsilon = O(t^{-1/2} \log t)$ 程度となることを示した。そこでは、上の仮定 (A2) よりかなり強い、以下の条件が仮定されている:

ある $\gamma > 0$ に対して, $\int_0^\infty e^{\gamma x} dF(x) < \infty$ が成立する.

今回, この条件を弱めた場合の漸近挙動について考察し, 以下の結果を得た.

Theorem 1.1. 仮定 (A1) と (A2) を仮定する. このとき, ある定数 C が存在して, すべての ℓ_2 -unit vector $\xi \in \mathbb{R}^d$ と十分大きな n に対して,

$$E[T(0, [n\xi])] \leq n\mu(\xi) + Cn^{1-1/(6d+12)}(\log n)^{1/3}.$$

が成立する. ここで, $[n\xi]$ は点 $n\xi$ に最も近い格子点である.

Theorem 1.2. 仮定 (A1) が成立するとする. さらに, ある $\alpha \geq d$ に対して, 仮定 (A2) が成立するとする. このとき, $\delta > 0$ が十分小さければ, ある定数 $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ が存在し, 十分大きな t に対して次が成立する:

$$\begin{aligned} P\left(B(t) \not\subset t\left(1 + C_1 t^{-1/2+3\delta}\right) B_0\right) &\leq C_2 t^d \exp\{-C_3 t^\delta\}, \\ P\left(t\left\{1 - C_4 t^{-1/(6d+12)}(\log t)^{1/3}\right\} B_0 \not\subset B(t)\right) &\leq t^{\alpha(\beta-1)+d}. \end{aligned}$$

ここで,

$$\beta := \left(3 - d\delta - \frac{1}{6d+12}\right)^{-1}.$$

特に, ある $\alpha \geq (d+1)(9d+17)/(6d+11)$ に対して仮定 (A2) が満たされるならば, 確率 1 で次が成立する: 十分大きな t に対して,

$$\left\{1 - C_4 t^{-1/(6d+12)}(\log t)^{1/3}\right\} B_0 \subset \frac{B(t)}{t} \subset \left\{1 + C_1 t^{-1/2+(d+1)\delta}\right\} B_0.$$

2 Application of Theorem 1.1

この章では, Theorem 1.1 を応用し, first passage time の分散の lower bound の考察を行う. 次元は $d = 2$ とし, 確率測度 ν' の台を $\text{supp}(\nu')$ で表わすことにする. さらに, $\bar{p}_c$ を $\mathbb{Z}^2$ 上の oriented percolation についての critical parameter とする (詳しくは, [3] を参照). このとき, $q \geq \bar{p}_c$ に対して, $\mathcal{M}_q$ を次の条件 (B1) と (B2) を満たす確率測度 ν' の集まりとする:

(B1) $\text{supp}(\nu') \subset [1, \infty)$,

(B2) $\nu'(\{1\}) = q$.

また、原点 0 とベクトル $N_q := (1/2 + \alpha_q/\sqrt{2}, 1/2 - \alpha_q/\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ を結ぶ直線と x -軸のなす角を θ_q とする。ここで、 α_q は oriented percolation に対する asymptotic speed である (詳しくは、[3] を参照)。このとき、Auffinger と Damron [2] は次が成立することを証明した。

Theorem 2.1 (Auffinger and Damron, Theorem 2.5 of [2]). 与えられた $q \in [\bar{p}_c, 1)$ に対して、 $\nu \in \mathcal{M}_q$, $\theta \in [0, \theta_q)$ とする。(A2) が $\alpha = 2$ として成立し、さらにある $\beta < 1$ が存在して、十分大きな n に対して

$$E[T(0, [n\xi_\theta])] < n\mu(\xi_\theta) + n^\beta, \quad (2.1)$$

が成り立つと仮定する。ここで、 $\xi_\theta := (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$ である。このとき、ある正の定数 $C = C(\theta)$ が存在して、すべての n に対して

$$\text{Var}(T(0, [n\xi_\theta])) \geq C \log n \quad (2.2)$$

が成立する。

この定理の仮定に Theorem 1.1 を適用する。まず、 $\nu \in \mathcal{M}_q$ (特に、(B1) が成り立つ) ならば、 $\nu(\{0\}) = 0 < p_c$ であることに注意する。つまり、仮定 (A1) が満たされている。そこで、もし $\alpha = 2$ として (A2) が成立するならば、Theorem 1.1 より $\beta = 47/48$ として (2.1) が成り立つことが分かる。Auffinger と Damron は、first passage time の分散の lower bound を得るために (2.1) を仮定したが、実際は仮定 (A2) のみで同様の評価が得られることが分かった。すなわち、次の系が得られる。

Corollary 2.2. 与えられた $q \in [\bar{p}_c, 1)$ に対して、 $\nu \in \mathcal{M}_q$, $\theta \in [0, \theta_q)$ とする。もし $\alpha = 2$ として (A2) が成立するならば、すべての n に対して (2.2) が成立する。

References

- [1] K. S. Alexander. Approximation of subadditive functions and convergence rates in limiting-shape results. *The Annals of Probability*, 25(1):30–55, 1997.
- [2] A. Auffinger and M. Damron. Differentiability at the edge of the percolation cone and related results in first-passage percolation. *Probability Theory and Related Fields*, pp. 1–35, 2011.
- [3] R. Durrett. Oriented percolation in two dimensions. *Ann. Probab.*, 12(4):999–1040, 1984.

- [4] J. Hammersley and D. Welsh. First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. In *Bernoulli 1713 Bayes 1763 Laplace 1813*, pp. 61–110. Springer, 1965.
- [5] H. Kesten. On the speed of convergence in first-passage percolation. *The Annals of Applied Probability*, pp. 296–338, 1993.
- [6] N. Kubota. Rate of convergence in first passage percolation with low moment conditions. *Preprint*, 2013. <http://arxiv.org/abs/1306.5917>.
- [7] Y. Zhang. On the concentration and the convergence rate with a moment condition in first passage percolation. *Stochastic Processes and their Applications*, 120(7):1317–1341, 2010.