

環上の加群の分解

城西大学理学部数学科 石橋 宏行 (Hiroyuki Ishibashi)

Department of Mathematics
Josai University
Sakado, Saitama 350-02, JAPAN
e-mail : hishi@math.josai.ac.jp

概要. S は単位元 1 を含む環、 E は S 上の左加群とする。このとき、 S の特別な 2 元 a, b の存在が E の分解又は直和分解を引き起こすことを示す。

次に、この結果を用いて、環 R 上の加群 M の分解又は直和分解を導くような M のある種の自己準同型のクラスを呈示する。

1. 準備

まず、定理 A,B,C において決定的な役割を果たす次の補題から始める。

補題. S は単位元 1 を持つ環とし、 M は S 上の左加群とする。このとき S の 2 元 a, b が

$$(i) \quad abE = baE = 0,$$

$$(ii) \quad aS + bS = S$$

をみたすならば

$$E = E_a + E_b$$

が成り立つ。ただし、 S の元 c に対し

$$E_c = \{x \in E | cx = 0\}$$

とする。 E_c は E の加法群としての部分群であるが、 c が S の中心元であれば、 S の作用を受け入れ、 E_c は S 上の部分加群となる。特に、 a, b が (i),(ii) の他に

$$(iii) \quad a, b \text{ は } S \text{ の中心元}$$

もみたすならば、

$$E = E_a \oplus E_b, \quad E_a = bE, \quad E_b = aE$$

が成り立つ。

証明. (ii) より S の元 c, d が存在し、 $ac + bd = 1$ 。よって E の任意の元 x に対し

$$(1) \quad acx + bdx = x.$$

ここで、 $b(acx) = 0$, $a(bd)x = 0$ より $acx \in E_b$, $bdx \in E_a$ であるから

$$E = E_a + E_b$$

を得る。

特に、 a, b が S の中心元ならば $x \in E_a \cap E_b$ に対し、(1) より

$$x = acx + bdx = cax + bdx = 0 + 0 = 0.$$

よって

$$(2) \quad E = E_a \oplus E_b.$$

更に $a(bE) = 0$ より $bE \subseteq E_a$ は自明。逆に $x \in E_a$ ならば $ax = 0$ であるから (1) より

$$x = acx + bdx = cax + bdx = bdx \in bE,$$

即ち、 $E_a \subseteq bE$ 、よって $E_a = bE$ 。同様に $E_b = aE$ を得る。(証終)

2. 定理

次の定理は体上のベクトル空間 V の任意の自己準同型 σ が引き起こす V の直和分解で“自己準同型 σ の表現”として知られている。

定理 A. k は体、 $k[t]$ は k 上の多項式環とし V は k 上の有限次元ベクトル空間とする。また、 $\text{End}_k V$ は V の k 上の自己準同型環であり、 $\text{End}_k V$ の元 σ のモニック最小多項式 $g(t)$ の素元分解を

$$g(t) = p_1(t)^{e_1} p_2(t)^{e_2} \cdots p_r(t)^{e_r}$$

$$e_1, e_2, \dots, e_r : \text{自然数},$$

$$p_1, p_2, \dots, p_r : \text{モニック既約多項式}$$

$i \neq j$ ならば p_i, p_j は非同伴

とすれば、

$$V = \ker p_1^{e_1}(\sigma) \oplus \ker p_2^{e_2}(\sigma) \oplus \cdots \oplus \ker p_r^{e_r}(\sigma).$$

が成り立つ。

証明. $k[t]$ の V への作用を、 $f[t] \in k[t]$ と $x \in V$ に対し $f(t)x = f(\sigma)x$ により定義すれば、 V は左 $k[t]$ -加群となる。そこで、

$$u(t) = p_1(t)^{e_1}, \quad v(t) = p_2(t)^{e_2} \cdots p_r(t)^{e_r}$$

とおけば、

$$(i) \quad u(t)v(t) = 0,$$

$$(ii) \quad u(t)k[t] + v(t)k[t] = k[t]$$

$$(iii) \quad u(t), v(t) \text{ は } k[t] \text{ の中心元}$$

をみたす。故に、補題より

$$V = V_u + V_v = \ker p_1(t)^{e_1} \oplus \ker p_2(t)^{e_2} \cdots p_r(t)^{e_r}$$

以下 r に関する帰納法による。(証終)

群又は半群 G の元 σ は $\sigma^2 = 1$ (G の単位元) をみたすとき対合 (involution) と呼ばれる。例えば、有理整数環 $\mathbb{Z}$ における $\{\pm 1\}$ 、 n 次対称群 S_n における互換 (ij) 、可換環 R 上の n 次行列環 $GL_n R$ における対角行列 $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in \{\pm 1\}$ などはいずれも対合である。次に、環 R 上の加群 M の自己準同型環 $\text{End}_R M$ の元 σ に対し、一般化された対合として $\sigma^{2^n} = 1$ を考えることにより、 M の直和分解が引き起こされることを示す。

定理 B. R は単位元 1 と単元 2 を持つ環、 M は R 上の加群とし、 $\text{End}_R M$ は M の R 上の自己準同型環とする。このとき、 $\text{End}_R M$ の元 σ が自然数 n に対し

$$\sigma^{2^n} = 1$$

をみたせば、 M は直和分解

$$M = M_\sigma \oplus M_{-\sigma} \oplus M_{-\sigma^2} \oplus \cdots \oplus M_{-\sigma^{2^n-1}},$$

を持つ。ただし、 $\text{End}_R M$ の元 τ に対して

$$M_\tau = \{x \in M \mid \tau x = x\}$$

とする。

証明. 前定理の証明と同様に $R[t]$ の M への作用を $f(t)x = f(\sigma)x$ により定義し、

$$u(t) = t^{2^n-1} - 1, \quad v(t) = t^{2^n-1} + 1$$

とおけば、

$$(i) \quad u(t)v(t)M = 0,$$

$$(ii) \quad u(t)R[t] + v(t)R[t] = R[t]$$

$$(iii) \quad u(t), v(t) \text{ は } R[t] \text{ の中心元}$$

をみたす。故に、補題より

$$\begin{aligned} M &= M_u \oplus M_v \\ &= M_{\sigma^{2^n-1}} \oplus M_{-\sigma^{2^n-1}}. \end{aligned}$$

以下、 n に関する帰納法による。(証終)

群又は半群 G の元 σ は $\sigma^2 = \sigma$ をみたすとき巾等元と呼ばれる。今、 $\text{End}_R M$ の元 σ に対し、巾等元の一般化として、 $\sigma^2 = \varepsilon \sigma$ (ε は R の中心単元) を考えることにより次の定理を得る。

定理 C. $R, M, \text{End}_R M$ は定理 B と同じとすると、 $\text{End}_R M$ の元 σ が

$$\sigma^2 = \varepsilon \sigma \quad (\varepsilon \text{ は } R \text{ の中心元})$$

をみたすならば、

$$(a) \quad \ker \sigma = \text{Im} (\sigma - \varepsilon 1_M), \quad \text{Im} \sigma = \ker (\sigma - \varepsilon 1_M),$$

$$(b) \quad M = \ker \sigma \oplus \text{Im} \sigma,$$

ここで、 1_M は M の恒等写像。

証明. 前定理と同様、 $R[t]$ の M への作用を M の元 x と $R[t]$ の元 $f(t)$ に対し、 $f(t)x = f(\sigma)x$ により定義し、

$$u(t) = t, \quad v(t) = t - \varepsilon$$

とおけば、

$$(i) \quad u(t)v(t)M = 0,$$

$$(ii) \quad u(t)R[t] + v(t)R[t] = R[t]$$

$$(iii) \quad u(t), v(t) \text{ は } R[t] \text{ の中心元}$$

をみたす。従って、補題より

$$\begin{aligned} M &= M_u \oplus M_v \\ &= \ker \sigma \oplus \ker (\sigma - \varepsilon 1_M). \end{aligned}$$

を得る。更に、包含関係を考えることにより

$$\ker \sigma = \operatorname{Im} (\sigma - \varepsilon 1_M), \quad \operatorname{Im} \sigma = \ker (\sigma - \varepsilon 1_M)$$

も示される。従って、

$$M = \ker \sigma \oplus \operatorname{Im} \sigma,$$

を得る。(証終)