

やや複雑なネットワーク上の探索問題の解析について

兵庫県立大学経営学部 菊田 健作

Kensaku KIKUTA

Department of Business Administration

University of Hyogo

1 はじめに

hider と呼ばれる player が 1 個の静止目標物を有限連結ネットワーク上のノードのどれかに隠す。もう 1 人の探索者と呼ばれる player はネットワークの辺上を移動しながらノードにある静止目標物を探索。探索者がノードを調べるときに調査費用が、また辺上を移動するときに移動費用が発生する。探索者は hider を見つけるまでの総費用が小さくなるようにノードを探索する順序を決めねばならない。一方、hider は総費用が大きくなるように目標物を隠すノードを選びたい。このような状況が両 player の利得の和をゼロとして行列ゲームモデルとして表現される。

このゲームを解くことの難易度は (i) 探索諸費用, (ii) ネットワークの構造, さらに (iii) 探索者の探索出発ノード, の 3 点に依存する。ネットワークがサイクルを含む場合, 探索諸費用が特殊な条件を満たす場合に分析がなされている ([8])。文献 [7] と [9] は木ネットワークの場合を解析している。本稿の目的は, 探索者の探索出発ノードが指定されている場合にサイクルを含むネットワークの構造に焦点を当ててゲームの解析をすることである。さらに, 今後の課題を述べることである。Alpern/Gal [2] と Ruckle [10] は探索ゲームについて解説したテキストである。Gluss [6] はゲームではなく費用最小化問題を扱っているが, 移動費用を導入したという点でこの分野の草分けの論文である。Dagan/Gal[5] は探索領域がネットワーク上の任意の点であり, 探索出発ノードが指定されていない, かつ移動費用のみの場合を扱っている。Baston/Kikuta[3] は無向ネットワークで探索出発ノードが指定されていない場合を扱っている。移動費用と調査費用を想定している。また, [4] は有向ネットワーク上のゲームを扱っている。Alpern[1] では探索者が進む向きによって移動費用が異なる場合を調べている。

2 ネットワーク上のゲーム

本節では、移動費用と調査費用を考慮した有限連結ネットワーク上の探索ゲームについてさらに詳しく述べる。 $G = (N, E)$ を連結な有限ネットワークとする。ここに $N = \{0, 1, \dots, n\}, n \geq 2$, はノードの集合, $E \subseteq N \times N$ は辺の集合である。 $i, j \in N$ に対し, $(i, j) \in E$ はノード i と j を結ぶ辺があることを表す。辺に沿った有限個のノードの列をパスという。

2人の player, つまり hider と探索者がおり, hider は $N \setminus \{0\}$ に含まれるノードのどれか1つを選びそこに静止目標物を隠す。ノード0は探索出発ノードである。探索者は hider がどのノードを選んだかを知らずにノード0から出発し辺上を移動しながら各ノードを調べて行く。ノードを調べずに通過することもでき, そうする場合はそのノードの調査費用は0である。静止目標物が見つかった時点で探索は終了する。探索者が静止目標物が存在するノードを調べたときその静止目標物を見逃す確率はどのノードについても0である。したがって探索者が同一のノードを2度以上調べることはない。ノード $i \in N$ を調べる費用は $c_i > 0$ である。 $(i, j) \in E$ のとき, ノード i から j への移動費用は $d(i, j)$ である。 $(i, j) \notin E$ のときネットワークは連結であるから i から j へのパスが存在する。 i から j へのすべてのパスに対してパス上の辺の移動費用の和を考え, その最小値を $d(i, j)$ とする。また, すべてのノード i に対し $d(i, i) = 0$ とする。

hider の (純粋) 戦略はノード $i \in N \setminus \{0\}$ を選ぶことである。探索者の (純粋) 戦略は, 探索を開始する前に, 探索するノードの順序を決定することである。探索者の戦略を $\sigma \equiv [\sigma(1), \dots, \sigma(n)]$ と表す。 σ は $N \setminus \{0\}$ 上の置換である。また, $\sigma(0) = 0$ としておく。 σ の逆順序を σ^r と表す。ここに, $\sigma^r(j) = \sigma(n+1-j), 1 \leq j \leq n$ である。さらに, σ^{-1} を

$$\sigma^{-1}(i) = j \iff \sigma(j) = i \quad (1)$$

によって定義する。例えば, $n = 5, \sigma = [3, 2, 4, 1, 5]$ のとき $\sigma^r = [5, 1, 4, 2, 3], \sigma^{-1} = [4, 2, 1, 3, 5]$ となる。

hider, 探索者がそれぞれ i, σ を選んだとき, 探索者が静止目標物を見つけた時点で探索は終了する。このときの探索費用は

$$f(i, \sigma) \equiv \sum_{x=1}^{\sigma^{-1}(i)} [d(\sigma(x-1), \sigma(x)) + c_{\sigma(x)}] \quad (2)$$

となる。 σ を hider の利得と考え, 探索者はこれをできるだけ小さく, hider はできるだけ大きくするようにそれぞれ i, σ を選ぶ, として2人有限ゼロ和ゲームモデル $\Gamma(G, c, d)$ が得られ, $n \times n!$ 型の行列ゲームとして表現される。hider, 探索者の混合戦略をそれぞれ p, q で表して探索者が目標物を発見するまでの期待探索費用を $f(p, q)$ と表す。ここに, $p = (p_1, \dots, p_n)$ および $q = \{q(\sigma)\}_\sigma$ である。一方のみが, 純戦略をとったときの期待費用を $f(p, \sigma), f(i, q)$ と表す。

本稿では

$$c_i = c > 0, \forall i \in N \setminus \{0\}, \text{ and } d(i, j) = 1, \forall (i, j) \in E \quad (3)$$

を仮定する.

3 ゲームの値の上限, 下限

仮定 (3) のもとでは, ハミルトンネットワークの場合, ゲームを解くことができる. 本節では, まずこの事実を述べた後, ゲームの値の上限, 下限について述べる.

命題 1. ハミルトンネットワーク $\mathcal{G} = (N, E)$ において探索者の最適戦略はハミルトン閉路を与える探索順序とその逆順をランダムに選ぶことである. 一方, *hider* は 0 以外のノードに等確率で隠すことである. ゲームの値は $\frac{(n+1)(1+c)}{2}$ である.

Proof: ハミルトン閉路を与える探索順序を σ とする. 式 (2) と仮定 (3) により

$$f(i, \sigma) + f(i, \sigma^r) = (n+1)(1+c), \forall i \in N \setminus \{0\} \quad (4)$$

を得る. よって, *hider* の全ての混合戦略に対して, 探索者は σ と σ^r を等確率で用いることにより期待探索費用を $\frac{(n+1)(1+c)}{2}$ と出来る. 次に, *hider* が 0 以外のノードに等確率で隠す戦略を p^* とする. 探索者の任意の探索順序 τ に対して

$$f(p^*, \tau) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{\tau^{-1}(i)} [d(\tau(x-1), \tau(x)) + c] \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{\tau^{-1}(i)} (1+c) = \frac{(n+1)(1+c)}{2}. \quad (5)$$

を得る. つまり, *hider* は p^* により期待探索費用を $\frac{(n+1)(1+c)}{2}$ 以上と出来る. しかも, ハミルトン閉路を与える探索順序 σ に対し, $d(\sigma(x-1), \sigma(x)) = 1, 1 \leq x \leq n$ であるので, $f(p^*, \sigma) = \frac{(n+1)(1+c)}{2}$ である.

□

注意. 円ネットワークの場合は既に [8] において命題 1 の内容が示されている. そこでは, 仮定 (3) をはずすと構造が単純な円ネットワークであっても解析が難しいことが述べられている.

探索者は探索順序とその逆順を等確率で選ぶような混合戦略によって期待探索費用を小さくすることを考えることができる. 一方, *hider* は各ノードを等確率で選ぶような混合戦略によって期待探索費用をある値以上にできる. すなわち, 次のことが成りたつ.

命題 2. ネットワーク $\mathcal{G} = (N, E)$ においてゲームの値を v とすると

$$\frac{(n+1)(1+c)}{2} \leq v \leq \min_{\sigma} \left\{ \frac{D(\sigma) + (n+1)c}{2} \right\} \leq n + \frac{1+c}{2}, \quad (6)$$

ここに, $D(\sigma) \equiv \sum_{x=1}^n d(\sigma(x-1), \sigma(x)) + d(\sigma(n), 0)$ である.

Proof: 探索者の任意の探索順序 τ に対して命題 1 の (5) により

$$f(p^*, \tau) \geq \frac{(n+1)(1+c)}{2}. \quad (7)$$

これより, (6) の左側の不等式が得られる. また, 探索者の探索順序 τ に対して,

$$f(i, \tau) + f(i, \tau^r) = D(\tau) + (n+1)c, \forall i \in N \setminus \{0\}. \quad (8)$$

探索者は $\min\{D(\sigma) : \sigma\}$ の最小値を与える τ を選んで, τ とその逆順序とを等確率で選ぶことにより (6) の 2 番目の不等式が得られる. また, ネットワーク $G = (N, E)$ の生成木を一つ選びノード 0 から出発し生成木に沿って全てのノードを通過して生成木に沿って 0 に戻ってくるときの通過距離は $2n$ である. $\min\{D(\sigma) : \sigma\} \leq 2n$ であるから一番右の不等式が成立する. $\square$

例 1. ネットワーク $G = (N, E)$ が次のようなものとする ($k \times \ell$ 格子ネットワーク).

$$N = \{i_j : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq \ell\}, \quad \text{ただし, } 1_1 = 0 \text{ とする}$$

$$E = \bigcup_{i=1}^k \{(i_j, i_{j+1}) : 1 \leq j \leq \ell-1\} \cup \bigcup_{j=1}^{\ell} \{(i_j, (i+1)_j) : 1 \leq i \leq k-1\} \quad (9)$$

もし, 積 $k\ell$ が偶数であれば G はハミルトンネットワークであり命題 1 を適用できる. $k\ell$ が奇数であるとして, $k=3, \ell=5$ とする. ここで, ノード 1_1 が探索者の出発位置である.

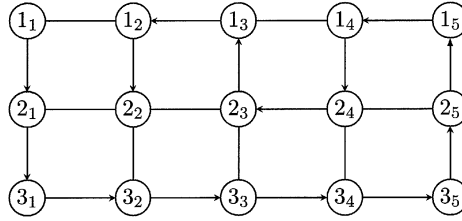


図 1

図 1 においてハミルトンパスの一つが矢印で示されている. これによって決まる探索順序とその逆の探索順序を探索者が等確率で選ぶことにより期待費用を高々 $8 + \frac{15}{2}c$ とできる. 一般に, 積 $k\ell$ が奇数の場合も図 1 のようにハミルトンパスを見つけることができる. ゲームの値は高々 $\frac{k\ell+1}{2} + \frac{k\ell}{2}c$ である.

命題 3. ネットワーク $G = (N, E)$ においてゲームの値が

$$v = \frac{(n+1)(1+c)}{2}, \quad (10)$$

であるとする. $q = \{q(\sigma)\}_\sigma$ を探索者の最適戦略とする. $q(\sigma) > 0$ であれば, 辺に沿ったノードの列 $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ はハミルトン路である. つまり

$$d(\sigma(x-1), \sigma(x)) = 1, \quad \forall 1 \leq x \leq n \quad (11)$$

である。

Proof: (5) によって p^* は hider の最適戦略である。 $q(\sigma) > 0$ であるから相補スラック性の定理により

$$f(p^*, \sigma) = \frac{(n+1)(1+c)}{2} = v. \quad (12)$$

ここで

$$d(\sigma(x-1), \sigma(x)) + c \geq 1 + c, \quad \forall 1 \leq x \leq n \quad (13)$$

に注意して

$$\begin{aligned} f(p^*, \sigma) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{\sigma^{-1}(i)} [d(\sigma(x-1), \sigma(x)) + c] \\ &\geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (1+c) \sigma^{-1}(i) = \frac{(n+1)(1+c)}{2}. \end{aligned} \quad (14)$$

よって, (12), (13) および (14) から

$$\sum_{x=1}^{\sigma^{-1}(i)} [d(\sigma(x-1), \sigma(x)) + c] = \sigma^{-1}(i)(1+c), \quad \forall 1 \leq i \leq n. \quad (15)$$

ゆえに, (11) が成りたつ。□

4 簡単な例

本節では調べるべきノード数が5または6でありサイクルを含むネットワークにおいて主として hider の最適戦略を推測する。ハミルトンネットワークの場合はゲームが解ける。

4.1 ノード数=5 の場合

ノード 0, 1, 2, 3, 4 が円ネットワークを構成しそれにノード 5 が他のノードと図のように結ばれている場合の解を検討する。 5×120 型の行列ゲームを解くことが問題である。

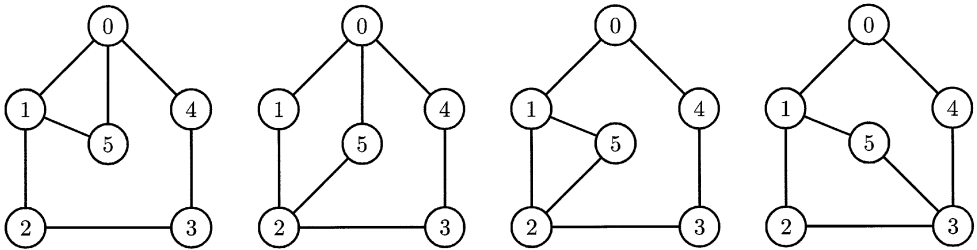


図 2: ハミルトン

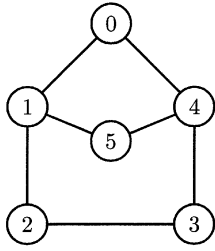


図 6

図 3

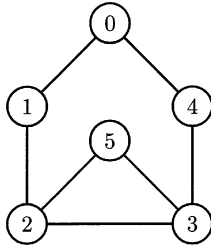


図 7: ハミルトン

図 4: ハミルトン

図 5

図 2, 図 4 と図 7 はハミルトン閉路があるので命題 1 を適用してゲームは解ける. ゲームの値は $3 + 3c$ である.

図 3 の場合, 探索者は探索順序 $[1, 2, 3, 4, 5]$ と $[5, 4, 3, 2, 1]$ を確率 $1/2$ ずつ用いる戦略 q によって期待探索費用を $v = \frac{7}{2} + 3c$ とできる. つまり, $f(i, q) = v, 1 \leq i \leq 5$. 一方, hider は戦略

$$p = \frac{1}{W} (2 + c, c, \frac{3}{2} + c, \frac{3}{2} + c, 2 + c), \text{ where } W = 7 + 5c. \quad (16)$$

を用いると, $f(p, [1, 2, 3, 4, 5]) = f(p, [5, 4, 3, 2, 1]) = v$ である.

図 5 の場合, 探索者は探索順序 $[5, 1, 2, 3, 4]$ と $[4, 3, 2, 1, 5]$ を確率 $1/2$ ずつ用いて期待探索費用を $v = \frac{7}{2} + 3c$ とできる. 一方, hider は戦略

$$p = \frac{1}{W} \left(\frac{c(5+4c)}{4(1+c)}, \frac{(2+c)(5+4c)}{4(1+c)}, \frac{c(5+4c)}{4(1+c)}, 1+c, \frac{(2+c)(5+4c)}{4(1+c)} \right) \text{ where } W = 6 + 5c \quad (17)$$

を用いると, $f(p, [5, 1, 2, 3, 4]) = f(p, [4, 3, 2, 1, 5]) = v$ である.

次に図 6 の場合, 探索者は探索順序 $[1, 5, 4, 3, 2]$ と $[2, 3, 4, 5, 1]$ を確率 $1/2$ ずつ用いて期待探索費用を $v = \frac{7}{2} + 3c$ とできる. 一方, hider は戦略

$$p = \frac{1}{5 + 5c} \left(c, \frac{3}{2} + c, \frac{3}{2} + c, c, 2 + c \right) \quad (18)$$

を用いると, $f(p, [1, 5, 4, 3, 2]) = f(p, [2, 3, 4, 5, 1]) = v$ である.

4.2 ノード数=6 の場合

6×720 型の行列ゲームを解くことが問題である.

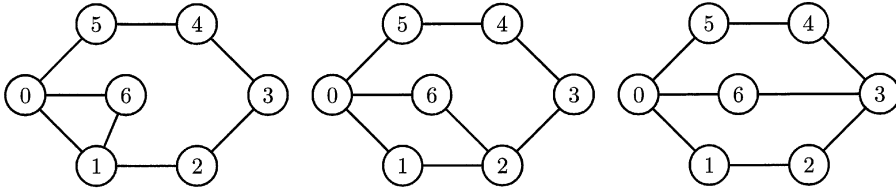


図 8：ハミルトン

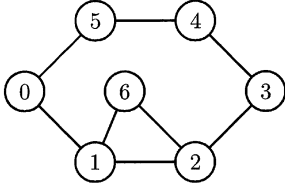


図 9

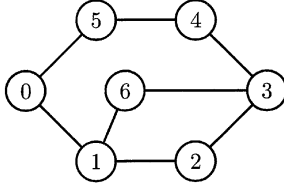


図 10

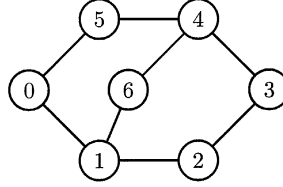


図 11：ハミルトン

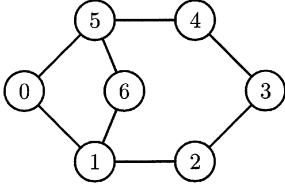


図 12

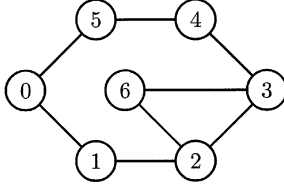


図 13

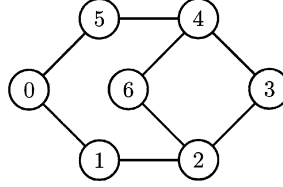


図 14

図 15：ハミルトン

図 16

図 8, 図 11 と図 15 はハミルトン閉路があるので命題 1 を適用してゲームは解ける. ゲームの値は $\frac{7}{2}(1+c)$ である.

図 9 の場合, 探索者は探索順序 $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$ と $[6, 5, 4, 3, 2, 1]$ を確率 $1/2$ ずつで用いて期待探索費用を $v = 4 + \frac{7}{2}c$ とできる. 一方, hider は戦略

$$p = \frac{1}{W}(2+c, c, \frac{4}{3}+c, \frac{4}{3}+c, \frac{4}{3}+c, 2+c), \text{ where } W = 8+6c. \quad (19)$$

を用いると, $f(p, [1, 2, 3, 4, 5, 6]) = f(p, [6, 5, 4, 3, 2, 1]) = v$ である.

図 10 の場合, 探索者は探索順序 $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$ と $[6, 5, 4, 3, 2, 1]$ を確率 $1/2$ ずつで用いて期待探索費用を $v = 4 + \frac{7}{2}c$ とできる. 一方, hider は戦略

$$p = \frac{1}{W}(\frac{3}{2}+c, \frac{3}{2}+c, c, \frac{3}{2}+c, \frac{3}{2}+c, 2+c), \text{ where } W = 8+6c. \quad (20)$$

を用いると, $f(p, [1, 2, 3, 4, 5, 6]) = f(p, [6, 5, 4, 3, 2, 1]) = v$ である.

図 12 の場合, 探索者は探索順序 $[5, 4, 3, 2, 1, 6]$ と $[6, 1, 2, 3, 4, 5]$ を確率 $1/2$ ずつで用いて期待探索費用を $v = 4 + \frac{7}{2}c$ とできる. 一方, hider は戦略

$$p = \frac{1}{W}(\frac{c(5+4c)}{4(1+c)}, \frac{(2+c)(5+4c)}{4(1+c)}, \frac{c(5+4c)}{4(1+c)}, 1+c, 1+c, \frac{(2+c)(5+4c)}{4(1+c)}), \text{ where } W = 7+6c. \quad (21)$$

を用いると, $f(p, [5, 4, 3, 2, 1, 6]) = f(p, [6, 1, 2, 3, 4, 5]) = v$ である.

図 13 の場合, 探索者は探索順序 $[5, 4, 3, 2, 1, 6]$ と $[6, 1, 2, 3, 4, 5]$ を確率 $1/2$ ずつで用いて期待探索費用を

$v = 4 + \frac{7}{2}c$ とできる. 一方, hider は戦略

$$p = \frac{1}{W} \left(\frac{c(6+5c)}{5(1+c)}, \frac{(\frac{3}{2}+c)(6+5c)}{5(1+c)}, \frac{(\frac{3}{2}+c)(6+5c)}{5(1+c)}, \frac{c(6+5c)}{5(1+c)}, 1+c, \frac{(2+c)(6+5c)}{5(1+c)} \right), \quad (22)$$

where $W = 7 + 6c$.

を用いると, $f(p, [5, 4, 3, 2, 1, 6]) = f(p, [6, 1, 2, 3, 4, 5]) = v$ である.

図 14 の場合, 探索者は探索順序 $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$ と $[6, 5, 4, 3, 2, 1]$ を確率 $1/2$ ずつで用いて期待探索費用を $v = 4 + \frac{7}{2}c$ とできる. 一方, hider は戦略

$$p = \frac{1}{6+6c} \left(c, \frac{4}{3}+c, \frac{4}{3}+c, \frac{4}{3}+c, c, 2+c \right), \quad (23)$$

を用いると, $f(p, [1, 2, 3, 4, 5, 6]) = f(p, [6, 5, 4, 3, 2, 1]) = v$ である.

図 16 の場合, 探索者は探索順序 $[5, 6, 4, 3, 2, 1]$ と $[1, 2, 3, 4, 6, 5]$ を確率 $1/2$ ずつで用いて期待探索費用を $v = 4 + \frac{7}{2}c$ とできる. 一方, hider は戦略

$$p = \frac{1}{8+6c} \left(c, \frac{c(2+c)}{1+c}, \frac{(2+c)^2}{1+c}, \frac{c(2+c)}{1+c}, c, \frac{(2+c)^2}{1+c} \right), \quad (24)$$

を用いると, $f(p, [5, 6, 4, 3, 2, 1]) = f(p, [1, 2, 3, 4, 6, 5]) = v$ である.

4.3 木とサイクルの混合の場合の初期の検討

次の図のようなネットワーク上のゲームでの hider の最適戦略に関して以下のような予想をしている.

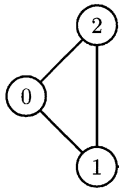


図 17

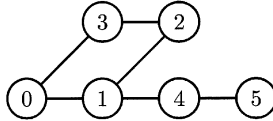


図 18

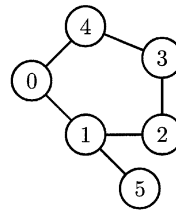


図 19

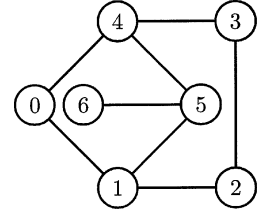


図 20

図 17 の場合, 探索者は探索順序 $[1, 3, 2]$ と $[2, 3, 1]$ を確率 $1/2$ ずつで用いて期待探索費用を $v = \frac{5}{2} + 2c$ とできる. 一方, hider は戦略

$$p = \frac{1}{4+3c} \left(\frac{3+2c}{2+2c}c, 1+c, \frac{3+2c}{2+2c}(2+c) \right), \quad (25)$$

を用いると, $f(p, [1, 3, 2]) = f(p, [2, 3, 1]) = v$ である.

図 18 の場合, 探索者は探索順序 $[1, 4, 5, 2, 3]$ と $[3, 2, 5, 4, 1]$ を確率 $1/2$ ずつで用いて期待探索費用を $v = 4 + 3c$ とできる. 一方, hider は戦略

$$p = \frac{1}{W} \left(\frac{5+3c}{4+3c}c, 1+c, 1+c, \frac{5+3c}{4+3c} \frac{c(2+c)}{1+c}, \frac{5+3c}{4+3c} \frac{(2+c)^2}{1+c} \right), \text{ where } W = 7 + 5c, \quad (26)$$

を用いると, $f(p, [1, 4, 5, 2, 3]) = f(p, [3, 2, 5, 4, 1]) = v$ である.

図 19 の場合, 探索者は探索順序 $[1, 5, 2, 3, 4]$ と $[4, 3, 2, 5, 1]$ を確率 $1/2$ ずつで用いて期待探索費用を $v = \frac{7}{2} + 3c$ とできる. 一方, hider は戦略

$$p = \frac{1}{W} \left(\frac{3+2c}{2+2c}c, 1+c, 1+c, 1+c, \frac{3+2c}{2+2c}(2+c) \right), \text{ where } W = 6 + 5c, \quad (27)$$

を用いると, $f(p, [1, 5, 2, 3, 4]) = f(p, [4, 3, 2, 5, 1]) = v$ である.

図 20 の場合, 探索者は探索順序 $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$ と $[6, 5, 4, 3, 2, 1]$ を確率 $1/2$ ずつで用いて期待探索費用を $v = \frac{9}{2} + \frac{7}{2}c$ とできる. 一方, hider は戦略

$$p = \frac{1}{W} \left(c, \frac{3}{2} + c, \frac{3}{2} + c, c, \frac{2+c}{1+c}c, \frac{2+c}{1+c}(2+c) \right), \quad (28)$$

を用いると, $f(p, [1, 2, 3, 4, 5, 6]) = f(p, [6, 5, 4, 3, 2, 1]) = v$ である.

5 おわりに

本稿では, サイクルを含むようなネットワーク上の探索ゲームのゲームの値の上限・下限について述べた後, ノード数が小さい場合のゲームの解を考えた.

今後の課題として次のような点がある.

- ネットワークの形状による hider の最適戦略の違いの見極めをノード数 n が 10 以上のときに行うこと.
- ネットワークがサイクルを含みかつノードの調査費用が high と low のいずれかであるゲームの解析.
- 第 4 節の 19 個の例のうち, ハミルトン閉路を含まない 13 個について, 与えた hider の戦略が最適であることを示すことは現在検討中である. 例えば, 数式処理ソフトを用いて, $f(p, \sigma) \geq v, \forall \sigma$ を示すことが考えられる. $n = 6$ の場合, 720 個の不等式の確認となる.

参考文献

- [1] S. Alpern, Search games on trees with asymmetric travel times, *SIAM Journal of Control and Optimization* 48(2010), 5547-5563.

- [2] S. Alpern and S. Gal, *The theory of search games and rendezvous*, Kluwer International Series in Operations Research and Management Sciences, Kluwer, Boston, (2003).
- [3] V. Baston and K. Kikuta, Search games on networks with travelling and search costs and with arbitrary searcher starting points, *Networks* 62 (2013), 72-79.
- [4] V. Baston and K. Kikuta, Search games on a network with travelling and search costs, *International Journal of Game Theory* 44 (2015), 347-365.
- [5] A Dagan and S Gal, Searching a network from an arbitrary starting point, *Networks* 52 (2006), 156-161.
- [6] B. Gluss, Approximately optimal one-dimensional search policies in which search costs vary through time, *Naval Research Logistics Quarterly* 8, (1961) 277-283.
- [7] K. Kikuta, A search game with travelling cost on a tree, *J. Oper. Res. Soc. Japan* 38 (1995), 70-88.
- [8] K. Kikuta, A search game on a cyclic graph. *Naval Research Logistics* 51 (2004) 977-993.
- [9] K. Kikuta and W. Ruckle, Initial point search on weighted trees, *Naval Research Logistics* 41 (1994), 821-831
- [10] W. Ruckle, *Geometric games and their applications*, Pitman Research Notes in Mathematics 82, Boston, (1983).