

マグネシウム合金板の変形挙動予測のための 結晶塑性モデリング

浜 孝之*

1. はじめに

マグネシウム（以下、Mg）合金は低密度材料であり、また比強度、比剛性が高いことから軽量化材料として期待されて久しい。一方で Mg 合金板は、常温では張出し加工性や絞り加工性が著しく低いことが知られている。また引張—圧縮非対称性や面内異方性など強い塑性変形異方性を示すが、その詳細はいまだに不明な点が多い。

Mg 合金板の特徴的な塑性変形特性は、六方晶における強い結晶異方性に起因する。常温では、主すべり系である底面すべり系に比べて非底面すべり系の臨界分解せん断応力が著しく大きく、活動が難しい。そのため塑性変形には、すべりに加えて臨界分解せん断応力の小さい $\{10\bar{1}2\}$ 双晶も大きな役割を担うこととなる。しかしながら双晶にも強い変形異方性があり、変形モードによってその活動度は大きく異なる。さらに通常プレス加工で用いられる圧延板では、六方晶の c 軸が板厚方向に配向する底面集合組織が形成され、変形異方性を増大させる要因となっている。

このような Mg 合金板における特徴的な塑性変形特性を体系的に明らかにするため、近年結晶塑性解析技術の適用が盛んである^{1)~4)}。吉田⁵⁾が詳述しているように、結晶塑性解析は結晶粒レベルの微視的な変形に基づいて巨視的な変形挙動を予測する技術であり、これまで種々の金属材料における塑性変形特性の理解に大きく貢献している。本稿では、筆者らのこれまでの取り組みを中心に、Mg 合金の結晶塑性解析手法の概要といくつかの解析事例を紹介する。なお本稿では、常温の変形のみを対象とする。

2. 結晶塑性解析モデル

2.1 単結晶構成式

単結晶構成式については別の解説記事^{5),6)}で詳述されているので、ここでは主要な式のみを示す。結晶塑性解析で基礎となる塑性速度勾配テンソル L^p は、次式で与えられる。

$$L^p = \sum_{\alpha=1}^N \dot{\gamma}^{\alpha} S^{\alpha}, \quad S^{\alpha} = s^{\alpha} \otimes m^{\alpha} \quad (1)$$

ここで $\dot{\gamma}^{\alpha}$ はすべり系 α におけるすべり速度、 s^{α} および m^{α} はそれぞれすべり方向およびすべり面法線を表す単位ベクトルである。最近の結晶塑性解析では、 $\dot{\gamma}^{\alpha}$ には次式のようなひずみ速度依存型のモデルが用いられる場合が多い。

$$\frac{\dot{\gamma}^{\alpha}}{\dot{\gamma}_0} = \left| \frac{\tau^{\alpha}}{\tau_Y^{\alpha}} \right|^{\frac{1}{m}} \text{sign}(\tau^{\alpha}), \quad \tau^{\alpha} = s^{\alpha} \cdot \sigma \cdot m^{\alpha} \quad (2)$$

$\dot{\gamma}_0$ は基準すべり速度、 τ_Y^{α} は現在のすべり抵抗、 τ^{α} は分解せん断応力である。 m はひずみ速度感受性指数に相当する。

塑性変形の進行に伴う加工硬化は、次式のように τ_Y^{α} を発展させることで考慮できる。

$$\dot{\tau}_Y^{\alpha} = \sum_{\beta} q_{\alpha\beta} h |\dot{\gamma}^{\beta}| \quad (3)$$

ここで h は加工硬化率、 $q_{\alpha\beta}$ はすべり系間の相互作用行列である。 h には種々の式が用いられるが、筆者らは Graff ら⁷⁾の研究に倣って次式を用いている。

$$h = h_0 \quad (4)$$

$$h = h_0 \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{\infty}} \right) \exp \left(- \frac{h_0 \bar{\gamma}}{\tau_{\infty}} \right), \quad \bar{\gamma} = \sum_{\alpha} \int |\dot{\gamma}^{\alpha}| dt \quad (5)$$

ここで τ_0 は初期臨界分解せん断応力、 h_0 、 τ_{∞} は加工硬化パラメータである。微視的には、加工硬化は $\sqrt{\rho}$ (ρ : 転位密度) と強い相関があることから、 h を転位密度の関数として表現するモデルも提案されている³⁾。

2.2 解析で考慮するすべり系および双晶系

前述のように、主すべり系である底面すべり系だけでは塑性変形を担うことはできないと考えられている。したがって解析においても、非底面すべりも考慮するのが一般的である。一方で、実際に活動する非底面すべりの種類についてはいまだ確定的な知見が得られていない。Graff ら⁷⁾および Agnew ら⁸⁾は種々の考察から、底面 $\langle a \rangle$ すべりに加えて非底面 $\langle c+a \rangle$ すべりの考慮が必要であると結論づけている。筆者らは Graff らに倣って底面 $\langle a \rangle$ すべり、柱面 $\langle a \rangle$ すべり、錐面 $\langle c+a \rangle$ すべりを考慮している（図 1）。

一方、双晶面を境にして結晶構造が鏡像関係の配置へ変形するのが双晶変形（twinning）であり、これに伴って大きなせん断ひずみと結晶方位の回転が生じる。なお、変形後に鏡像関係の配置をとるという制約から、双晶によって生じるせん断ひずみおよび方位回転の向きにも制約がある

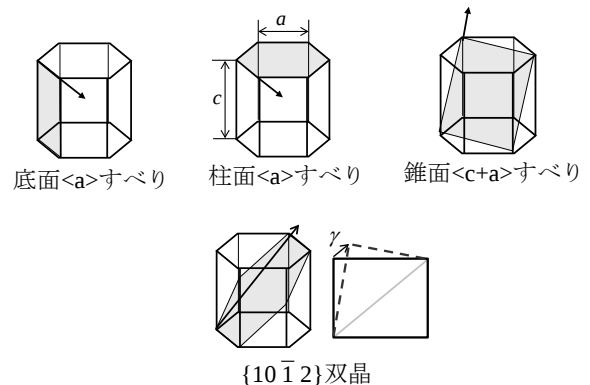


図 1 計算で考慮したすべり系および双晶系⁸⁾

(極性を有する)．Mg で最も良く観察される $\{10\bar{1}2\}<10\bar{1}\bar{1}>$ 双晶を模式的に図 1 に示す．純 Mg では軸比 c/a (図 1) が約 1.624 であり，この場合 $\{10\bar{1}2\}$ 双晶は c 軸を伸ばす方向，言い換えれば c 軸方向に引張応力 ($\tau^\alpha > 0$) が働いた場合のみ活動できる．そのため $\{10\bar{1}2\}$ 引張双晶などと呼ばれることもある．幾何学的な関係から， $\{10\bar{1}2\}$ 双晶が形成すると約 0.13 のせん断ひずみと約 86.3° の結晶方位回転が生じる．なお Mg では，変形後期に $\{10\bar{1}1\}<10\bar{1}\bar{2}>$ 圧縮双晶が形成することが報告されている⁹⁾が，本稿では一様伸びの範囲内での変形を対象とするため，以下では $\{10\bar{1}1\}$ 双晶は無視する．

ところで一度形成した双晶は，その後 c 軸方向に圧縮応力 ($\tau^\alpha < 0$) が作用すると元の配置へ戻ることが報告されている．このある種の可逆的な現象は英語では **detwinning** と表現されるが，日本語ではまだ定まった表現はなく，筆者らは双晶回復と称している．このように Mg の塑性変形では，すべりを中心とした不可逆な変形と双晶回復による可逆的な変形が混在した極めて複雑な変形特性を示す．次節では，双晶のモデル化について概説する．

2.3 双晶のモデル化

2.3.1 双晶形成過程のモデル化

図 2 に示すように，双晶は結晶粒全体で瞬間的に形成されるのではなく，結晶粒内で形成された細長いレンズ状の双晶領域が徐々に拡大していく．また，双晶領域は一つの結晶粒内で複数形成される場合も多い．このとき，母材と双晶領域では大きな方位差があるため，双晶形成により結晶粒の微細化が進むと解釈することも可能である．双晶形成を結晶塑性論の枠組みで取り扱うには，このような結晶粒内での双晶領域の生成と拡大，それに伴うせん断ひずみの発展，方位回転，結晶粒微細化の効果，また反転負荷によって生じる双晶回復などを合理的にモデル化する必要がある．これまでいくつかの双晶モデルが提案されているが，以下には代表的な二つの方法を紹介する．

(1)Van Houtte の方法¹⁰⁾ この方法では，双晶形成によるせん断ひずみ発生と結晶方位回転を別々にモデル化する．まず双晶面上で引張の分解せん断応力 τ^α が作用すると，双晶形成によるせん断すべり速度 $\dot{\gamma}_{tw}^\alpha$ が発生すると考える． $\dot{\gamma}_{tw}^\alpha$ はすべり変形と同様に式(2)に従うと仮定し，また筆者らは加工硬化率 h として線形硬化則(式(4))を用いている．なおこの加工硬化率は，塑性変形の進展に伴って双晶領域が徐々に拡大する様子を表現していると解釈できる．

ここで，一結晶粒内において双晶領域が占める体積割合 (双晶体積率) f^α を次式のように定義する．

$$f^\alpha = \frac{\bar{\gamma}_{tw}^\alpha}{\gamma_{ref}}, \quad \bar{\gamma}_{tw}^\alpha = \int \dot{\gamma}_{tw}^\alpha dt \quad (6)$$

ただし $\bar{\gamma}_{tw}^\alpha$ は双晶によって生じた累積せん断ひずみを表す．また γ_{ref} は，双晶形成に伴って生じるせん断ひずみに対応すると考える場合が多い． f^α は毎ステップでしきい値 f_{th}^α と比較され， $f^\alpha = f_{th}^\alpha$ が満足されたときに次式の回転テンソル $\mathbf{R}^{tw}$ を用いて当該結晶粒を方位回転させる．

$$\mathbf{R}^{tw} = 2\mathbf{m}^\alpha \otimes \mathbf{m}^\alpha - \mathbf{I} \quad (7)$$

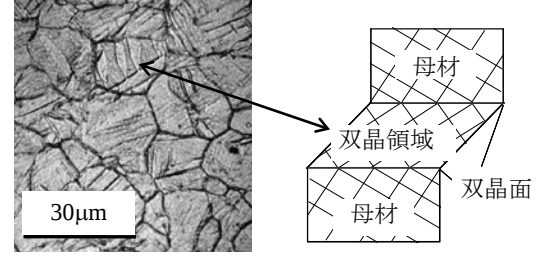


図 2 Mg 合金の組織写真と双晶領域の模式図

$\mathbf{m}^\alpha$ は双晶系 α の面法線ベクトル， $\mathbf{I}$ は単位テンソルである．しきい値 f_{th}^α は，乱数により結晶粒ごとで無作為に決める方法¹⁰⁾や双晶体積率の関数とすることで変形が大きいところから優先的に回転しやすくする方法¹¹⁾などにより決定される．

このように Van Houtte の方法では，母材か双晶領域内かのいずれかの結晶方位しかとりえず，結晶粒微細化の効果は考慮できない．また結晶方位の急激な大回転に伴って計算が不安定になる場合があり，解析上の工夫も必要である．(2)Kalidindi の方法¹²⁾ この方法では，双晶が形成すると双晶領域内ですべり変形が生じると考える．すなわち，塑性速度勾配テンソル $\mathbf{L}^p$ を次式のように与える．

$$\mathbf{L}^p = \left(1 - \sum_{\beta}^{N^{tw}} f^{\beta}\right) \sum_{\alpha}^{N^S} \dot{\gamma}^{\alpha} \mathbf{S}_{O-sl}^{\alpha} + \sum_{\alpha}^{N^{tw}} \dot{\gamma}^{\alpha} \gamma_{ref} \mathbf{S}_{O-tw}^{\alpha} + \sum_{\beta}^{N^{tw}} f^{\beta} \left(\sum_{\alpha}^{N^{S-tw}} \dot{\gamma}^{\alpha} \mathbf{S}_{tw-sl}^{\alpha} \right) \quad (8)$$

ここで N^S ， N^{tw} ， N^{S-tw} はそれぞれ母材で活動可能なすべり系および双晶系の数および双晶領域で活動可能なすべり系の数を表す． $\mathbf{S}_{O-sl}^{\alpha}$ ， $\mathbf{S}_{O-tw}^{\alpha}$ ， $\mathbf{S}_{tw-sl}^{\alpha}$ はそれぞれ母材で活動可能なすべり系および双晶系の $\mathbf{S}^{\alpha}$ (式(1)) および双晶領域で活動可能なすべり系の $\mathbf{S}^{\alpha}$ を表す．右辺第一，二項はそれぞれ母材でのすべりおよび双晶による変形を，また第三項は双晶領域内でのすべりによる変形を表す．

Kalidindi の方法では，双晶形成に伴って結晶粒内で異なる結晶方位の存在を許容できる点が Van Houtte の方法との大きな違いである．また Van Houtte の方法のように双晶形成に伴う方位回転は生じないので，計算上安定的である．一方で形成する双晶系が増えると一結晶粒内で考慮すべきすべり系の数が増え，計算負荷が高まるという欠点がある．そこで実際には，双晶体積率が一定以上の大きさに達するまでは式(8)第三項は無視する等の近似を要する．

この他 Proust ら¹³⁾は，母材と双晶領域での力学的な適合条件を考慮したモデルを提案している．またこの手法では Hall-Petch 則を模擬した項を導入することで，双晶変形に伴う結晶粒微細化の影響も考慮している．

2.3.2 双晶回復過程のモデル化

双晶回復過程については近年種々のモデルが提案されている^{2), 13)~15)}．以下では，筆者らが提案した Van Houtte による双晶形成モデルを回復過程まで拡張したモデル^{14), 15)}を紹介する．このモデルでは， $\tau^\alpha > 0$ 下で双晶形成した履歴のある双晶系 α では，その後圧縮の分解せん断応力 τ^α が作用すると，式(2)，式(4)に基づいて双晶形成時と逆向きにせん断すべり速度 $\dot{\gamma}_{dw}^\alpha$ が発生すると考える． $\tau^\alpha > 0$ (双晶

形成時)に発生した累積せん断ひずみを $\bar{\gamma}_{tw}^{\alpha max}$ とすると、双晶回復は次式が満たされるまで活動できると仮定する。

$$\bar{\gamma}_{tw}^{\alpha} = \int \dot{\gamma}_{tw}^{\alpha} dt = \bar{\gamma}_{tw}^{\alpha max} \quad (9)$$

また $\tau^{\alpha} > 0$ 下で方位回転した履歴がある場合は、式(9)が満たされた時点で回転テンソル $\mathbf{R}^{twT}$ を用いて形成時とは逆方向へ方位回転させる。

2.4 パラメータの同定

従来の現象論に基づく構成式の場合と同様に、結晶塑性解析においても材料パラメータの決定は解析精度を左右する重要な要素である。通常材料パラメータは、一軸引張あるいは圧縮試験で得られた応力-ひずみ曲線が実験結果と一致するように決められる場合が多い。一方六方晶金属では、すべり系や双晶系によってその活動が大きく異なるため、変形機構に応じて異なる材料パラメータを設定する必要がある。例えば2.2節で述べたように3種類のすべり系と1種類の双晶系を考慮する場合、計10個以上の材料パラメータを決定する必要がある。そのため一軸引張/圧縮変形下での応力-ひずみ曲線だけではこのパラメータ群を一意に決定することは困難である。この問題に対して筆者らは、つぎのようなパラメータ同定手順を提案した¹⁰⁾。

一軸引張変形を受けるMg合金圧延板を考える。強い底面集合組織により、板厚方向のひずみにはc軸方向に成分を持つ錐面<c+a>すべりと<10 $\bar{1}$ 2>双晶の活動の影響が大きいと仮定できる。一方引張変形下では双晶は変形の極性によりほとんど活動できないため、板厚ひずみはほぼ錐面<c+a>すべりの活動によって決まると仮定できる。一方幅方向のひずみは、同様の考え方から柱面すべりあるいは付加的に底面すべりの活動によって決まると仮定できる。このことから、r値は錐面<c+a>すべりと柱面すべりの活動比によってほぼ決定されると近似できる。以上の考察から、つぎの4ステップからなるパラメータ同定手順を提案した。

- (1)引張変形時の初期降伏応力が実験と一致するように、主すべり系である底面すべり系のパラメータを決定する。
- (2)引張変形時のr値発展が実験と一致するように、柱面すべり系と錐面<c+a>すべり系のパラメータ比を決める。
- (3)(2)のステップで定めたパラメータ比をほぼ保ったまま、引張変形時の応力-ひずみ曲線が実験と解析で一致するように全すべり系のパラメータを調整する。
- (4)圧縮変形時の初期降伏応力および圧縮→引張の反転負荷時の応力-ひずみ曲線が実験と一致するように、双晶形成および双晶回復のパラメータを決定する。

各種応力-ひずみ曲線と引張時のr値発展が同じパラメータ群で再現できるまで、以上の4ステップを繰り返す。

本手法の特長は、4種類の変形機構の特徴に基づいて個別にパラメータを同定できる点である。もちろん本手法を用いてもパラメータの一意性は担保できないが、従来に比べてパラメータ同定時の恣意性を大幅に制限できる。

3. 解析事例

3.1 パラメータ同定の解析結果に及ぼす影響

本章では、2章で紹介した結晶塑性モデルを有限要素法に組み込んで解析した事例を紹介する。本節では、パラメータ同定法の解析結果に及ぼす影響を示す。AZ31Mg合金圧

延板(板厚1mm)を対象として、従来の方法で同定されたパラメータを表1に、2.4節で紹介した手法による結果を表2に示す。なお、底面すべりには式(4)を、非底面すべりには式(5)を仮定した。表1に比べて表2では、錐面<c+a>すべりの τ_0 が小さい一方で柱面すべりの加工硬化が大きく見積もられている。図3(a), (b)に一軸引張における応力-ひず

表1 従来の方法により同定されたパラメータ

	底面	柱面	錐面<c+a>	双晶
τ_0 /MPa	8	100	160	40
τ_{∞} /MPa	-	350	360	-
h_0 /MPa	18	680	750	50

表2 提案した方法により同定されたパラメータ

	底面	柱面	錐面<c+a>	双晶
τ_0 /MPa	10	100	100	45
τ_{∞} /MPa	-	726	365	-
h_0 /MPa	30	950	530	60

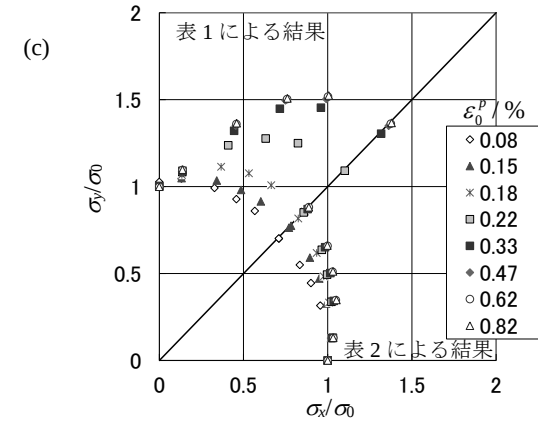
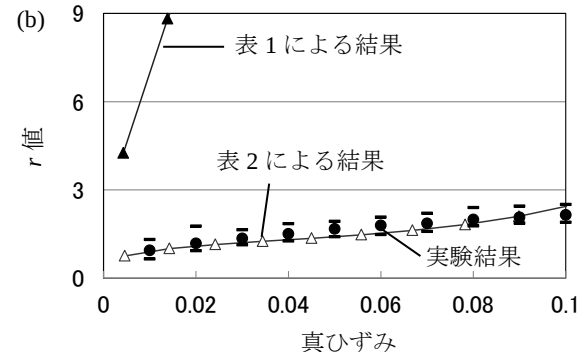
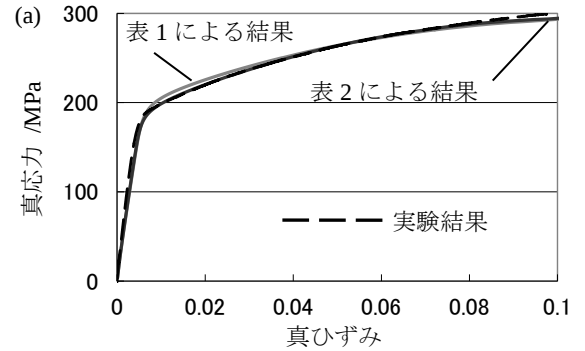


図3 パラメータ同定法が解析結果に及ぼす影響. (a) 応力-ひずみ曲線, (b)r値の発展, (c)等塑性仕事面。

み曲線および r 値の発展を示す。表1のパラメータを用いた場合、応力-ひずみ曲線は良好に予測できているが r 値は実験結果から大きくかい離している。一方表2のパラメータを用いた場合は、いずれの結果も精度良く予測している。この違いは、表2のパラメータを用いた場合は錐面 $\langle c+a \rangle$ すべりの活動が容易なことから、板厚ひずみが生じやすかったためと解釈できる。続いて図3(c)に、等塑性仕事面の予測結果を示す。上半分に示す表2による結果では、下半分に示す表1による結果に比べて変形の進行に伴う等塑性仕事面の発展が小さく、より実験¹⁷⁾に近い傾向が得られている。

このように変形異方性を考慮したパラメータ同定法は、Steglich らも提案している¹⁷⁾。同定すべきパラメータ数が多い六方晶金属においては、同定に際してはできるだけ多くの実験結果を参照することが重要である。

3.2 反転負荷の変形挙動解析¹⁸⁾

Mg 合金圧延板では、圧縮→引張の反転負荷を受けると双晶の形成および回復により S 字状の応力-ひずみ曲線が発現する。また S 字の傾向は、圧縮予ひずみの大きさによって異なることが報告されている¹⁸⁾。以下では、種々の圧縮予ひずみで反転負荷解析を行い、反転後に見られるひずみ経路依存性の発現メカニズムを検討した事例を紹介する。

応力-ひずみ曲線の解析結果を図4に示す。圧縮予ひずみが小さい場合は、変形前期のプラトー領域から変形後期の応力急上昇領域にかけての加工硬化率変化が急峻である。一方圧縮予ひずみが大きくなると、プラトー領域が拡大するとともに変形前期から後期にかけての加工硬化率変化が緩やかになる。紙面の都合上実験結果¹⁸⁾は省略するが、以上の傾向は実験結果を定性的に良く再現できている。

以上の傾向をもたらすメカニズムは、以下のように説明できる。圧縮予ひずみが小さい場合と大きい場合としてそれぞれ圧縮予ひずみ3.5%と10%の条件を例にとり、相対活動度の推移を図5に示す。相対活動度は各すべり系あるいは双晶系が塑性変形に及ぼす影響を表す指標であり、1に近いほどその変形機構の活動が活発なことを示す。3.5%の条件における結果は以下のとおりである。圧縮時には双晶の形成が活発であるが、引張に反転すると変形前期では双晶回復が活発である。しかしながら変形後期で応力急上昇が開始する累積ひずみ7%付近（図4でひずみ0%付近）で双晶回復の活動度が急激に低下し、代わりに非底面すべりの活動が活発になる。この結果から、変形前期は双晶回復により、また変形後期はすべり系の活動により塑性変形が支配され、またその変形モードの遷移が急峻なことが明らかである。

一方10%の条件の場合、3.5%の条件に比べて双晶回復支配型の変形領域が広く、またすべり支配型の変形への遷移が緩やかである。以上より、反転後の応力-ひずみ曲線が圧縮予ひずみによって異なるのは、双晶回復の活動度推移の違いに起因していると考えられる。また結果は省略するが、圧縮予ひずみによって双晶回復の活動度推移に違いが見られるのは、圧縮予ひずみが大きいと双晶形成による結晶方位の分散が大きくなることで、引張変形前期から双晶形成や非底面すべりが活動しやすくなったためと考えられる。

3.3 Mg 合金鋳造材の変形挙動解析¹⁹⁾

圧延板では引張と圧縮で強い変形の非対称性が見られ、その要因の一つとして強い初期集合組織の形成が挙げられ

ている。一方で、ランダムな結晶方位分布を持つ鋳造材においても、図6に示すように明らかな引張-圧縮の非対称性が発現する。また、圧縮→引張の反転ではわずかながら S 字状の曲線が発現している一方で、引張→圧縮の反転ではそのような傾向は見られない。そこで本節では、結晶塑性解析によりその発現メカニズムを検討した事例を紹介する。

解析では、初期結晶方位分布が完全にランダムであると仮定して、乱数により発生させた人工的な初期方位分布を用いた。一方この場合、2.4節で紹介したパラメータ同定法を用いることができない。そこで簡単のため、圧延板を対象に同定されたパラメータが鋳造材においても成り立つと仮定した。ただし粒径の違いを考慮するため、臨界分解せん断応力は Hall-Petch 則²⁰⁾に従うと仮定して調整した。

解析結果は引張-圧縮非対称性やひずみ経路依存性を予測し、実験結果を良好に再現している（図6）。図7にこの時の相対活動度推移を示す。反転前では、引張時に比べて圧縮時の方が双晶の形成が活発であり、引張時には代りに柱面すべりの活動が相対的に大きい。反転前におけるこの違

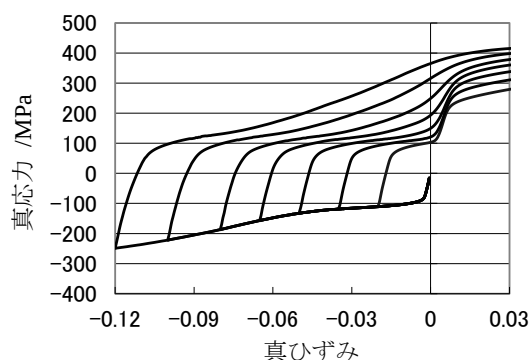


図4 Mg 合金圧延板の反転負荷時の応力-ひずみ曲線。

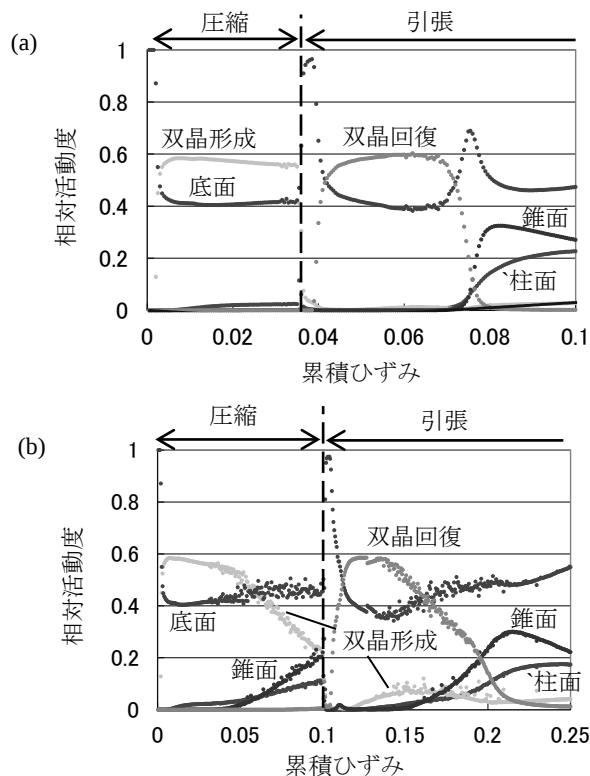


図5 反転負荷時の相対活動度の推移。(a)圧縮予ひずみ3.5%、(b)10%。

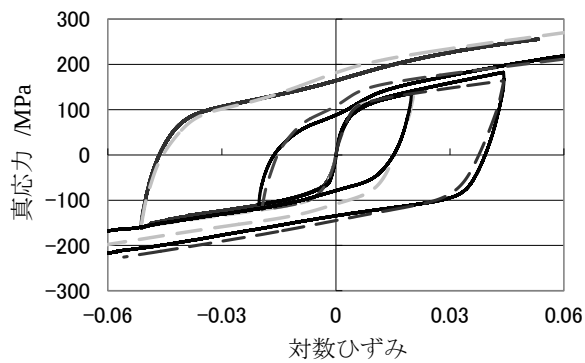


図6 AZ31Mg合金鋳造材の反転負荷時の応力-ひずみ曲線. 実線は実験, 破線は解析結果を表す.

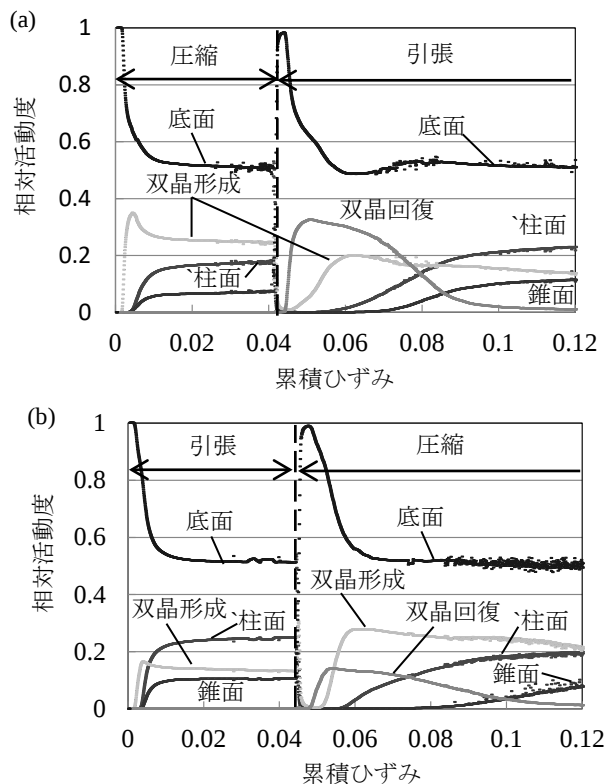


図7 鋳造材の反転負荷変形時の相対活動度推移. (a)4%圧縮-引張, (b)4%引張-圧縮.

いにより, 応力反転後の変形前期でも圧縮→引張の方が引張→圧縮に比べて双晶回復の活動量が大きい. 以上の結果から, 鋳造材における引張-圧縮非対称性およびひずみ経路依存性はやはり双晶の活動度の違いに起因し, またこのことから Mg 合金では初期の結晶方位分布によらず引張-圧縮非対称性の発現は避けられないことが示唆された.

4. 今後の展望とまとめ

本稿では, Mg 合金を対象とした結晶塑性解析の考え方と解析事例について, 筆者らの研究を中心に紹介した. 従来は応力-ひずみ曲線や r 値といった加工特性は実験的に取得することが前提だったが, 最近の解析技術の発達により計算機で予測できつつある段階に入ってきた. 本稿では触れていないが, 近年の計測技術の発展により, 結晶塑性解析により得られる変形中の格子ひずみや集合組織, 転位密度などを実験と直接比較する試みも報告されている²⁾.

このように新たな側面から解析精度の検証を行うことで, 加工硬化特性予測のさらなる精度向上が期待できる. さらに, 解析で得られる知見を加工プロセス設計や素材開発にフィードバックすることで, Mg 合金の幅広い産業利用に貢献することが望まれる. またここで紹介した結晶塑性解析技術は, チタンをはじめとする他の六方晶金属へも適用可能であり, 各種金属への応用も期待される.

その一方で, 今後技術的に解決すべき課題が多数残されている. 例えば, 相互作用行列 $q_{\alpha\beta}$ の決定, 初期結晶方位分布によらない一般的なパラメータ同定法の確立, 寸法効果の導入, 目的に応じた代表体積要素の選択などである. また実用的な観点では計算時間の短縮が大きな課題であり, 現状では結晶塑性モデルを用いた塑性加工解析は現実的ではない. 今後も理論面, アルゴリズム面から解析精度の向上と計算時間の短縮に向けた取り組みが不可欠であろう.

参考文献

- 1) Hama, T., & Takuda, H.: Int. J. Plasticity, **27** (2011), 1072–1092.
- 2) Qiao, H., Agnew, S.R., & Wu, P.D.: Int. J. Plasticity, **65** (2015), 61–84.
- 3) Wen, W., Borodachenkova, M., Tomé, C.N., Vincze, G., Rauch, E.F., Barlat, F., & Gracio, J.J.: Int. J. Plasticity, **73** (2015), 171–183.
- 4) Hama, T., & Takuda, H.: Comput. Mater. Sci., **51** (2012), 156–164.
- 5) 吉田: 塑性と加工, (2016), 印刷中.
- 6) 浜: 軽金属, **65**–5 (2015), 174–183.
- 7) Graff, S., Brocks, W., & Steglich, D.: Int. J. Plasticity, **23** (2007), 1957–1978.
- 8) Agnew, S.R., & Duygulu, O.: Int. J. Plasticity, **21** (2005), 1161–1193.
- 9) Koike, J.: Metall. Mater. Trans. A, **36** (2005), 1689–1696.
- 10) Van Houtte, P.: Acta Metall., **26** (1978), 591–604.
- 11) Tomé, C.N., Lebensohn, R.A., & Kocks, U.F.: Acta Metall. Mater., **39** (1991), 2667–2680.
- 12) Kalidindi, S.R.: J. Mech. Phys. Solids, **46** (1998), 267–290.
- 13) Proust, G., Tomé, C.N., Jain A., & Agnew, S.R.: Int. J. Plasticity, **25** (2009), 861–880.
- 14) Hama, T., & Takuda, H.: Steel Res. Int. Sp. Ed., (2012), 1115–1118.
- 15) Hama, T., Kitamura, N., & Takuda, H.: Mater. Sci. Eng. A, **583** (2013), 232–241.
- 16) Hama, T., Hosokawa, N., & Takuda, H.: Proc. the 9th NUMISHEET, (2014), 692–695.
- 17) Steglich, D., Jeong, Y., Andar, M.O., & Kuwabara, T.: Int. J. Solids Struct., **49** (2012), 3551–3561.
- 18) Hama, T., & Takuda, H.: Key Eng. Mater., **622–623** (2014), 603–608.
- 19) Hama, T., Mayama, T., & Takuda, H.: Romanian J. Tech. Sci. Appl. Mech., **60** (2015), 16pages.
- 20) 中浦祐典・渡部晶・大堀統一: 軽金属, **58**–1 (2008), 22–26.