

## Tarski-Seidenberg の定理について

山 田 浩 (名工大)

このノートは

[C] Paul L. Cohen; Decision Procedure of Real and  $p$ -adic Fields, Communications on pure and applied Mathematics, vol. XXII, pp. 131-151 (1969)

の中で与えられている「Tarski の定理」の簡潔な証明 (pp.132-134) .と, それを再編成した

[B] G. W. Brumfiel; Partially ordered Rings and semi-algebraic Geometriy, London Mathematical Society Lecture Note Series 37 (1979)

の Appendix (pp.268-277) を, バラバラに分解し, そしてもう一度つなぎ合わせたものである. いささか冗長になってしまっているが, 上記の文献に比べてやや「モノ」が見えている部分も含まれているとの自負心もある (手前味噌) .

§ 1. 「定理」の解説  $R$  を「実閉体」(real closed field) とし,  $X = (X_1, \dots, X_n)$  を  $R$  上の変数とする. このとき, 多項式  $f(X) \in R[X]$  についての relation

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) > 0$$

に有限回の「 $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\sim(not)$ 」を施して得られる「条件」を「多項式の符号条件」(of degree  $n$  over  $R$ ) と言い  $A(X)$  などで表すことにする. 符号条件  $A(X)$  の解集合

$$S \equiv \{x \in R^n \mid A(x) \text{ (is true)}\}$$

は  $R^n$  の semi-algebraic subset (= s.a.s.) と呼ばれている.  $R^n$  の

s.a.s. 全部の集合

$$SA(R^n)$$

は  $V(f) \equiv \{x \in R^n \mid f(x) > 0\}$  ( $f(X) \in R[X_1, \dots, X_n]$ ) で生成される

$\mathfrak{B}(R^n) = 2^{(R^n)}$  の「Bool 代数」(i.e. closed under finite "U", "∩" and "C (= complement)") である.

また, 有限個の多項式  $f_i(X_1, \dots, X_n) \in R[X_1, \dots, X_n]$  とそれに対応する「符号」 $\lambda_i \in \{-1, 0, +1\}$  によって定義される条件式

$$(1.1) \quad \text{sign}[f_i(X_1, \dots, X_n)] = \lambda_i$$

を考える. この解集合  $S \equiv \{x \in R^n \mid \forall i (\text{sign}[f_i(x)] = \lambda_i)\}$  は明らかに 1つの s.a.s. である. このような s.a.s.  $S$  を「基本型」s.a.s. とする. そしてこの  $S$  を定義する (1.1) を基本型 s.a.s.  $S$  の「定義符号式」と呼ぶ. 一般の s.a.s.  $S \in SA(R^n)$  はこの基本型 s.a.s. の有限和で表わされる.

以上の準備のもとで, 「Tarski の定理」は次のように述べられる:

THEOREM 1.A. 射影

$$\pi : R^{n+1} \longrightarrow R^n; \pi(x, y) = y, \quad (x \in R^n, y \in R)$$

について,

$$S \in SA(R^{n+1}) \implies \pi(S) \in SA(R^n).$$

§ 2. 証明の筋書き (アイディア) 部分集合  $S_1, S_2 \subset R^n$  について, 一般に  $\pi(S_1 \cup S_2) = \pi(S_1) \cup \pi(S_2)$  であるから, THEOREM 1.A に現われる  $S \in SA(R^{n+1})$  を基本型と仮定してよい. そこで  $S$  の定義符号式を

$$f_i(X; Y) = \lambda_i$$

$$f_i(X; Y) \in R[X, \dots, X_n; Y], \quad \lambda_i \in \{-1, 0, +1\}$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

とする. このとき  $x \in R^n$  について

$$(2.1) \quad x \in \pi(S)$$

$$\iff \exists y \in R \text{ s.t. } \forall i \text{ (sign}[f_i(x; y)] = \lambda_i)$$

である. この条件を分析する:

$x \in R^n$  を fix する. そして方程式  $f_i(x; Y) = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) の  $R$  の中にある根のすべてを一行に並べたもの

$$\xi_1(x) < \xi_2(x) < \dots < \xi_N(x), \quad N = N(x)$$

を考える. このとき「real closed field 上の多項式についての中間値の定理」より, どの  $f_i(x; Y)$  も, その値は各開区間

$$U_k(x) = (\xi_k(x), \xi_{k+1}(x)), \quad (0 \leq k \leq N+1)$$

$$(\xi_0(x) = -\infty, \xi_{N+1}(x) = +\infty)$$

の上では「定符号」であることがわかる. そこで  $R^n$  上で定義された関数

$$\varepsilon_{ij}(x) \equiv \text{sign} f_i(x; \xi_j(x))$$

$$\delta_{ik}(x) \equiv \text{sign} f_i(x; \eta_k(x))$$

$$1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq N, \quad 0 \leq k \leq N$$

ただし

$$\eta_k(x) = \begin{cases} \xi_0(x) - 1 & k = 0 \\ \frac{1}{2}\{\xi_k(x) + \xi_{k+1}(x)\} & 1 \leq k \leq N \\ \xi_N(x) + 1 & k = N+1 \end{cases}$$

を考えると, 我々の条件 (2.1) は

$$(2.2) \quad (\exists j \text{ s.t. } \forall i \text{ (}\varepsilon_{ij}(x) = \lambda_i\text{)})$$

$$\text{or } (\exists k \text{ s.t. } \forall i (\delta_{ik}(x) = \lambda_i))$$

$$\text{i.e. } \pi(S) = \bigcup_{j=1}^N \left( \bigcap_{i=1}^m \varepsilon_{ij}^{-1}(\lambda_i) \right) \cup \bigcup_{k=0}^N \left( \bigcap_{i=1}^m \delta_{ik}^{-1}(\lambda_i) \right)$$

と書き換えられる。このことから THEOREM 1.A を証明するためには次の「事実」がわかればよい：

THEOREM 2.A. 上記の記号のもとで

$$\varepsilon_{ij}^{-1}(\lambda_i) = \{x \in R^n \mid \text{sign}[f_i(x; \xi_j(x))] = \lambda_i\},$$

$$\delta_{ik}^{-1}(\lambda_i) = \{x \in R^n \mid \text{sign}[f_i(x; \eta_j(x))] = \lambda_i\}$$

はすべて  $R^n$  の semi-algebraic subsets である。

§ 3. Semi-effective Functions THEOREM 2.A を示すために次の概念を導入する：

DEFINITION 3.1. 関数  $\theta : R^n \longrightarrow R$  が  $\forall S \in \text{SA}(R)$  について

$$\theta^{-1}(S) \in \text{SA}(R^n)$$

を満たしているとき、 $\theta$  は semi-effective であるということにする。

このとき

EXAMPLE 3.1. 座標の「射影関数」

$$\pi_l : R^n \longrightarrow R, \quad \pi_l(x_1, \dots, x_n) = x_l, \quad (1 \leq l \leq n)$$

は明らかに semi-effective である。

LEMMA 3.1. semi-effective function  $\theta : R^n \longrightarrow R$  について、そ

の「符号関数」

$$\text{sign} \circ \theta : R^n \longrightarrow R$$

も semi-effective である.

したがって, THEOREM 2.A を示すためには次の「事実」がわかればよい:

THEOREM 3.A. 関数  $f_i(x; \xi_j(x))$ ,  $f_i(x; \eta_j(x))$  ( $x \in R^n$ ) はそれぞれ semi-effective functions である.

ところで THEOREM 3.A に現われる関数  $f_i(x; \xi_j(x))$ ,  $f_i(x; \eta_k(x))$  は射影関数  $\pi_i$  と方程式  $f_i(x; Y) = 0$  の「根関数」 $\xi_j(x)$  ( $x \in R^n$ ) の「多項式結合」である. したがって, もし 次の2つの「主張」が正しければ, THEOREM 3.A の「正当性」は保証される:

CONJECTURE 3.B. 任意の semi-effective functions

$$\theta_i : R^n \longrightarrow R \quad (i = 1, \dots, m)$$

と任意の多項式  $g(Z_1, \dots, Z_m) \in R[Z_1, \dots, Z_m]$  について, 関数

$$g(\theta_1, \dots, \theta_m) : R^n \longrightarrow R$$

もまた semi-effective である.

CONJECTURE 3.C. 任意に与えられた多項式  $f(X; Y) \in R[X_1, \dots, X_n; Y]$

について,  $\xi(x)$  を方程式  $f(x; Y) = 0$ , ( $x \in R^n$ ) の1つの「根関数」とする.

このとき  $\xi : R^n \longrightarrow R$  は semi-effective である.

【注意】 この「根関数」 $\xi(x)$  については, もう少し精密な分析と定義(定式化)が必要になる. これについては THEOREM 4.8 の statement を見てほしい.

§ 4. Effective Functions 前節の CONJECTURE 3.B および 3.C を示すためには、そこに現われる "semi-effective" の考え方 (概念) (DEF. 3.1) を少々修理・修正しておく必要がある:

DEFINITION 4.1. 写像  $\theta : D \longrightarrow R^m$  ( $D \subset R^n$ ) を考える.  $\theta$  が *semi-effective* とは

$$S \in \text{SA}(R^m) \implies \theta^{-1}(S) \in \text{SA}(R^n).$$

特に  $D = \theta^{-1}(R^m)$  ( $R^m \in \text{SA}(R^m)$ ) であるから, semi-effective map  $\theta$  の定義域  $D$  は s.a.s. であることがわかる:  $D \in \text{SA}(R^n)$ .

DEFINITION 4.2. 写像  $\theta : D \longrightarrow R^m$  ( $D \subset R^n$ ) を考える. 任意の自然数  $l \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  に対して, 写像

$$\theta \times 1_l : R^l \times D \longrightarrow R^l \times R^m$$

が semi-effective (DEF. 4.1) であるとき (ここで  $1_l$  は  $R^l$  の恒等写像) 写像  $\theta$  は *effective* (or *universally semi-effective*) と呼ばれる.

【注意】 この DEF. 4.2 は [C] (p. 132) を写像の場合に拡張したものである (「用語」"effective" もそのまま). 最終的には (つまり, 問題の「Tarski の定理」(THEOREM 1.A) が証明されてしまえば) 写像  $\theta$  が "effective" であることは,  $\theta$  のグラフ  $\Gamma(\theta) \subset D \times R^m$  が s.a.s. であること (i.e.  $\theta$  is a semi-algebraic map) と同値であることがわかる (COROLLARY 7.1).

明らかに写像  $\theta$  が effective ならば  $\theta$  は semi-effective でもある ( $l = 0$ ). したがって CONJECTURE 3.B, 3.C は, その主張に現われる "semi-effective" をすべて "effective" で置き換えたものが成立してくれば, この目的としては十分である.

このように変更した CONJECTURE 3.B の証明を以下の THEOREM 4.7 で与える. CONJECTURE 3.C のキチンとした statement は THEOREM 4.8

で与える. その証明が完成するのはずっと後になる (§ 8).

LEMMA 4.1.  $R^n$  の s.a.s.  $D, D_i \in SA(R^n)$  ( $i = 1, \dots, s$ ) について

$$D = \bigcup_{i=1}^s D_i \quad (D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j)$$

(i.e. s.a.s. partition of  $D$ ) とする. このとき 写像  $\theta : D \longrightarrow R^m$  について次の条件は同値である:

- (A)  $\theta$  は (semi-)effective.
- (B)  $\theta_i = \theta|_{D_i}$  は (semi-)effective ( $\forall i$ ).

【注意】 この LEMMA 4.1 の効用は次の通りである. 与えられた射像  $\theta$  が (semi-)effective であることを「証明」する際に, その定義域  $D$  の適当な s.a.s. partition  $D = \bigcup_i D_i$  を与え各  $D_i$  の上で議論すればよい. この考え方は「方法論」として以下の「Tarski の定理」(THEOREM 1.A) の証明の中で効果的に働く.

LEMMA 4.2. (semi-)effective maps の合成写像はまた (semi-)effective である.

LEMMA 4.3. 「有理写像」  $\theta : D \longrightarrow R^m$  ( $D \subset R^n$ ), すなわち多項式

$$f_0(X), f_1(X), \dots, f_m(X) \in R[X_1, \dots, X_n]$$

$$f_0(x) \neq 0, \forall x \in D,$$

によって

$$\theta(x) = \left( \frac{f_1(x)}{f_0(x)}, \dots, \frac{f_m(x)}{f_0(x)} \right) \in R^m, \quad \forall x \in D,$$

で定義される写像  $\theta$  は effective である.

LEMMA 4.4. したがって特に「対角線写像」(diagonal map)

$$\Delta : R^n \longrightarrow R^n \times \cdots \times R^n, \quad \Delta(x) = (x, \dots, x), \quad x \in R^n,$$

は「多項式写像」であるから effective.

PROPOSITION 4.5. effective maps  $\theta_i : D_i \longrightarrow R^{m_i}$  ( $D_i \subset R^{n_i}$ ;  $i = 1, 2$ ) の「積写像」

$$\theta \equiv \theta_1 \times \theta_2 : D_1 \times D_2 \longrightarrow R^{m_1+m_2},$$

$\theta(x_1, x_2) = (\theta_1(x_1), \theta_2(x_2))$ , はまた effective である.

Proof 写像  $1_l \times \theta_1 \times \theta_2 : R^l \times D_1 \times D_2 \longrightarrow R^l \times R^{m_1+m_2}$  は

$$R^l \times D_1 \times D_2 \xrightarrow{1_{l+n_1} \times \theta_2} R^l \times R^{n_1} \times R^{m_2} \xrightarrow{1_l \times \theta_1 \times 1_{n_2}} R^l \times R^{m_1} \times R^{m_2}$$

と分解される. ここで  $\theta_i$  が effective であるから, これらの factors はそれぞれ semi-effective である (DEF.4.2). したがって LEMMA 4.2 より積写像  $\theta_1 \times \theta_2$  は effective である.  $\square$

LEMMA 4.6.  $m$  個の effective functions  $\theta_i : D \longrightarrow R$  ( $D \subset R^n$ ;  $i = 1, \dots, m$ ) によって得られる「組み合わせ写像 (和写像)」

$$\theta \equiv (\theta_1, \dots, \theta_m) : D \longrightarrow R^m,$$

$$\theta(x) = (\theta_1(x), \dots, \theta_m(x)) \in R^m, \quad (x \in D)$$

はまた effective である.

Proof 写像  $\theta$  は

$$\Delta : D \longrightarrow D \times \cdots \times D = D^m$$

$$\theta = \prod_{i=1}^m \theta_i : D^m \longrightarrow R^m$$

の合成写像である。したがって LEMMA 4.2, 4.4, PROP. 4.5 より, この  $\theta$  も effective である。  $\square$

次は CONJECTURE 3.B の解答である:

THEOREM 4.7.  $\theta \equiv (\theta_1, \dots, \theta_m) : D \longrightarrow R^m$  を上の LEMMA 4.6 で与えた effective map とする. このとき任意の effective function  $\varphi : E \longrightarrow R$ ,  $\theta(D) \subset E \subset R^m$ , に対して, 合成関数

$$\xi = \varphi(\theta_1, \dots, \theta_m) : D \longrightarrow R$$

もまた effective である. したがって, 特に任意の多項式  $g(Z_1, \dots, Z_m) \in R[Z_1, \dots, Z_m]$  について, 関数  $g(\theta_1, \dots, \theta_m)$  もまた effective である.

Proof LEMMA 4.2, 4.6 から直ちにわかる。  $\square$

[注意] この THEOREM 4.7 は [B] Lemma A.4 (p. 269) の主張を少しばかり拡張している。

次に CONJECTURE 3.C のキチンとした statement だけを与えておく. 証明は以下の §§ に続く:

THEOREM 4.8. 任意に与えられた多項式  $f(X; T) \in R[X_1, \dots, X_m; T]$ ,  $n = \deg_T[f(X; T)]$ , に対して,  $(n+1)$  個の effective functions で次の条件を満たすものが存在する:

$$\xi_i : R^m \longrightarrow R \quad (1 \leq i \leq n),$$

$$N : R^m \longrightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\} \subset R$$

ただし, ここで, 任意の  $x \in R^n$  に対して

$$\xi_1(x) < \xi_2(x) < \cdots < \xi_{N(x)}(x)$$

は  $f(x;T) = 0$  の  $R$  の中にあるすべての根である.

DEFINITION 4.3. この  $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n$  を  $f(X;T) = 0$  の「根関数」(the root functions),  $N$  を根の「個数関数」(the number function of roots) と言う.

【注意】 THEOREM 4.7 を考慮に入れると, この THEOREM 4.8 を示すためには多項式  $f(X;T)$  が

$$p_n(X;T) \equiv X_0 T^n + X_1 T^{n-1} + \cdots + X_n$$

の場合に証明出来ればよいことがわかる (cf. DEF.7.1).

EXAMPLES 4.1  $n = 0$  の場合:  $p_0(X;T) \equiv X_0$ . このときは root function は存在しない (0 個). そしてダミー関数  $N(x) = 0$  ( $\forall x \in R$ ) を考えればよい.

$n = 1$  の場合;  $p_1(X;T) = X_0 T + X_1$ .

$$\xi_1(x_0, x_1) = \begin{cases} -\frac{x_1}{x_0}, & \text{if } x_0 \neq 0 \\ 1, & \text{if } x_0 = 0 \end{cases},$$

$$N(x_0, x_1) = \begin{cases} 1, & \text{if } x_0 \neq 0 \\ 0, & \text{if } x_0 = 0 \end{cases}.$$

§ 5. 有限個の値をとる Effective Functions 次の事実は以下の議論の中で「本質的」である:

LEMMA 5.1.  $\theta : D \longrightarrow R$  ( $D \subset R^n$ ) を有限個の値  $\{t_1, \dots, t_s\}$  をとる関数とする. このとき次の条件は同値である:

(A)  $\theta$  は effective.

(B)  $\theta$  は semi-effective.

(C)  $D_i = \theta^{-1}(t_i) \in \text{SA}(R^n)$ ,  $i = 1, \dots, s$ .

Proof 任意の  $t \in R$  と任意の  $S \subset R^l \times R$  について  $S(t) \subset R^l$  を

$$S \cap (R^l \times \{t\}) = S(t) \times \{t\}$$

で定義する. このとき  $(1_l \times \theta)^{-1}(S) = \bigcup_{i=1}^s S(t_i) \times \theta^{-1}(t_i)$  である. したがって

$$\begin{aligned} (1_l \times \theta)^{-1}(S) &\in \text{SA}(R^l \times R^n) \\ \iff S(t_i) \times \theta^{-1}(t_i) &\in \text{SA}(R^l \times R^n) \quad (\forall i) \\ \iff \theta^{-1}(t_i) &\in \text{SA}(R^n) \quad (\forall i) \quad \square \end{aligned}$$

したがって, LEMMA 5.1 の「系」(単純な裏返し)として

LEMMA 5.2.  $D = \bigcup_{i=1}^s D_i$  ( $D_i \in \text{SA}(R^n)$ ) を s.a.s  $D \in \text{SA}(R^n)$  の finite s.a.s. partition とする (cf. LEMMA 4.1). このとき, 各  $D_i$  上で定数値をとる関数  $\theta : D \longrightarrow R$  は effective である.

## § 6. 多項式のグラフと根の分布

DEFINITION 6.1. ([C], Def., p.133) real closed field  $R$  の

要素の列

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_M$$

で与えられる区間列は

$$I_i \equiv (t_i, t_{i+1}) \quad (0 \leq i \leq M; t_0 = -\infty, t_{M+1} = +\infty)$$

と多項式  $p(T) \in R[T]$  を考える. ここで, 多項式  $p(T)$  が各开区間  $I_i$  の上で 単調 (増加/減少) であるとき, この  $\{t_1 < t_2 < \cdots < t_M\}$  を  $p(T)$  の1つの「グラフ」(a graph of  $p(T)$ ) と呼ぶ.

$p(T)$  の1つのグラフの「細分」はまた  $p(T)$  の1つのグラフであることに注意せよ.

LEMMA 6.1. 多項式  $p(T) \in R[T]$  に対して,  $\{t_1 < t_2 < \cdots < t_M\}$  が方程式  $\frac{d}{dT}p(T) \equiv p'(T) = 0$  の  $R$  の中のすべての根を含んでいるとき, これは  $p(T)$  の1つのグラフである.

DEFINITION 6.2.  $\{t_1 < t_2 < \cdots < t_M\}$  を多項式  $p(T) \in R[T]$  の1つのグラフ (DEF.6.1) とする. このとき, 「符号列」

$$[\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}] \in \{-1, 0, +1\}^{k+2}$$

$$\varepsilon_i = \text{sign}[p(t_i)], \quad i = 0, 1, \dots, M, M+1$$

をグラフ  $\{t_1 < t_2 < \cdots < t_M\}$  の「データ」(the data of graph) と言う.

LEMMA 6.2. 方程式  $p(T) = 0$  の  $R$  の中にある根の存在 (分布) の状態はグラフのデータの「符号変化の位置」から判定できる. すなわち, 上の記号のもとで

(A)  $\varepsilon_i = 0$  ならば,  $t_i$  は  $p(T) = 0$  の1つの根である.

(B)  $(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1}) = (-1, +1)$  or  $(+1, -1)$  ならば,  $p(T) = 0$  は区間  $I_i$  にただ1個の根を持つ.

(C) それ以外の「場所」には  $p(T) = 0$  の根は存在しない.

LEMMA 6.3. 多項式  $f(X;T) \in R[X_1, \dots, X_m; T]$  が与えられているものとする. effective functions  $\tau_i : R^m \longrightarrow R$ ,  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_M$ , で, すべての  $x \in R^m$  に対して

$$\tau_1(x) < \tau_2(x) < \dots < \tau_M(x)$$

が  $f(x;T)$  のグラフであるようなものが存在すれば,  $f(x;T) = 0$  の  $R$  の中の根の総数  $N(x)$  を与える関数  $N : R^m \longrightarrow R$  は effective である.

Proof 関数  $\varepsilon_i(x) = \text{sign}[f(x; \tau_i(x))]$  を考える. THEOREM 4.7 よりこれは effective である. 一方  $f(x;T) = 0$  の根の総数  $N(x)$  は LEMMA 6.2 より

$$N(x) = \#\{i \mid \varepsilon_i(x) = 0\} + \#\{i \mid \varepsilon_i(x) - \varepsilon_{i+1}(x) = \pm 2\}$$

で与えられる. したがって任意の  $N_0 \in N_0$  に対して

$$D(N_0) \equiv \{x \in R^m \mid N(x) = N_0\} \in \text{SA}(R^m)$$

である. ゆえに LEMMA 5.2 より関数  $N$  は effective である.  $\square$

LEMMA 6.4.  $\{t_1 < t_2 < \dots < t_M\}$  を多項式  $p(T) \in R[T]$  の1つのグラフ (DEF.6.1), そして  $\{\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m\}$  を方程式  $p(T) = 0$  のすべて根の列とする. このとき,  $i$  ( $0 \leq i \leq M$ ) に対して  $k$  番目の根  $\xi_k$  についての条件

$$(1) \quad t_i < \xi_k < t_{i+1}$$

$$(2) \quad \xi_k = t_i$$

はそれぞれ "effective" である.

§ 7. THEOREM 4.8 = CONJECTURE 3.C の証明の準備 次の定義から始め

る：

DEFINITION 7.1. 任意の  $n \in \mathbb{N}_0$  について多項式

$$p_n(C; T) \equiv C_0 T^n + C_1 T^{n-1} + \dots + C_n$$

を *generic polynomial* (of degree  $n$ ) と言う. またこれの  $T$  に関する形式的偏導関数を  $p'_n(C; T) \equiv \frac{\partial}{\partial T} p_n(C; T) = nC_0 T^{n-1} + (n-1)C_1 T^{n-2} + \dots + C_n$  で表わす.

NOTATION 7.1. 関数  $\theta : D \longrightarrow R$  ( $D \subset R^n$ ) が与えられているとき, 任意の  $d \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \in \{-1, 0, +1\}$  に対して

$$S(d; \theta; \lambda) \equiv \{(c, x) \in R^{d+1} \times D \mid \text{sign}[p_d(c; \theta(x))] = \lambda\}$$

とおく.

次の PROP. 7.1 は § 8 で与える「THEOREM 4.8 (CONJECTURE 3.C) の証明」の中で効果的に働く：

PROPOSITION 7.1. 関数  $\theta : D \longrightarrow R$  ( $D \subset R^n$ ) に対して, 次の条件は同値である：

(A)  $\theta$  は effective.

(B)  $S(d; \theta; \lambda) \in \text{SA}(R^{d+1} \times D)$ , ( $\forall d \in \mathbb{N}$  and  $\forall \lambda \in \{-1, 0, +1\}$ ).

Proof (A)  $\Rightarrow$  (B):  $S = \{(c, t) \in R^{d+1} \times R \mid \text{sign}[p_d(c; t)] = \lambda\}$  とおくと,

$$S \in \text{SA}(R^{d+1} \times R),$$

そして

$$S(d; \theta; \lambda) = (1_{d+1} \times \theta)^{-1}(S)$$

であるから,  $\theta$  が effective ならば  $S(d; \theta; \lambda) \in SA(R^n)$  である.  $\square$

(B) $\Rightarrow$ (A): 逆に  $\theta$  が条件 (B) を満足していると仮定し, 写像  $(1_l \times \theta) : R^l \times D \longrightarrow R^l \times R$  ( $l \in N_0$ ) を考える. 任意に与えられた多項式  $f(Z; Y) \in R[Z_1, \dots, Z_l; Y]$  と符号  $\lambda \in \{-1, 0, +1\}$  に対して

$$F = \{(z, y) \in R^l \times R \mid \text{sign}[f(z; y)] = \lambda\}$$

とする. このとき任意の s.a.s.  $S \in SA(R^l \times R)$  は, このような  $F$  の「Bool 結合」で表わされる. また  $(1_l \times \theta)^{-1}$  は「ブール代数の準同型写像」であるから,  $(1_l \times \theta)^{-1}(S)$  は  $(1_l \times \theta)^{-1}(F)$  の「Bool 結合」である. したがって  $\theta$  が effective であることを示すには  $(1_l \times \theta)^{-1}(F) \in SA(R^l \times D)$  を証明すればよいことになる. ここで

$$f(Z; Y) = \sum_{i=0}^d c_i(Z) Y^{d-i}, \quad c_i(Z) \in R[Z]$$

と表わす. このとき, 多項式写像

$$\gamma : R^l \longrightarrow R^{d+1}, \quad \gamma(z) = (c_0(z), \dots, c_d(z))$$

によって  $F = (\gamma \times 1_1)^{-1}[\{(c, t) \mid \text{sign}[p_d(c; t)] = \lambda\}]$  である. したがって可換な図形

$$\begin{array}{ccc} R^l \times D & \xrightarrow{\gamma \times 1_D} & R^{d+1} \times R \\ 1_l \times \theta \downarrow & & \downarrow 1_{d+1} \times \theta \\ R^l \times R & \xrightarrow{\gamma \times 1_1} & R^{d+1} \times R \end{array}$$

より  $(1_l \times \theta)^{-1}(F) = (\gamma \times 1_D)^{-1}[S(d; \theta; \lambda)]$  が得られる. ここで  $\gamma \times 1_D$  は多項式写像であるから effective である (LEMMA 4.3). したがって仮定 (B) より

$$(\gamma \times 1_D)^{-1}[S(d; \theta; \lambda)] \in SA(R^l \times D)$$

$$\therefore (1_l \times \theta)^{-1}(F) \in SA(R^l \times D)$$

となる.

□

【注意】 PROP. 7.1 (B) を満足する関数  $\theta : D \longrightarrow R$  ( $D \subset R^n$ ) を [B] では *psemi-algebraic* と呼んでいる ([B], Def. A.3, p. 269). なおこの PROP. 7.1 の主張は [C] Lemma 1.1 (p. 133) そのものである. ただしその証明 (説明?) は, 私には理解できない.

§ 8. THEOREM 4.8 (= CONJECTURE 3.C) の証明 THEOREM 4.8 の

【注意】より,  $f(X; T) = p_n(X; T)$  の場合に証明すればよい.  $n$  についての数学的帰納法で実行する.  $n = 0, 1$  については EXAMPLES 4.1 より THEOREM 4.8 は成立している. そこで THEOREM 4.8 の主張は  $n-1$  までについてはすでに成立しているものと仮定する.

【注意】  $D = \{x \in R^{n+1} \mid x_0 = 0\} (\equiv R^n) \in SA(R^{n+1})$  の上では  $\deg[p_n(x; T)] \leq n-1$  であるから, 帰納法の仮定より  $D$  の上では effective root functions の存在は保障されている. したがって

$$R_0^{n+1} = \{x \in R^{n+1} \mid x_0 \neq 0\}$$

とすると, LEMMA 4.1 より以下  $R_0^{n+1}$  上で定義されている "effective root functions"  $\xi_i : R_0^{n+1} \longrightarrow R$  および "effective root number function"  $N : R_0^{n+1} \longrightarrow R$  の存在を問題にすればよい.

(I)  $[N : R_0^{n+1} \longrightarrow R \text{ の存在}]$  これは LEMMA 6.3 の簡単な帰結であ

る. 帰納法の仮定より  $p'_n(x;T) = 0$  の root functions

$$\tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_{n-1}$$

は  $(nx_0, (n-1)x_1, \dots, x_{n-1}) \in R_0^n$  についての effective functions である. このことから, 方程式  $p_n(x;T) = 0$  の「根の個数関数」 $N(x)$ , ( $x \in R_0^{n+1}$ ) は LEMMA 6.3 より effective であることがわかる.

(II) [root functions  $\xi = \xi_k$  が effective であること] 関数  $\xi$  が PROP. 7.1 の条件

$$(B): \quad S(d; \xi; \lambda) \in SA(R^{d+1} \times R_0^{n+1}),$$

$$(\forall d \in N_0, \quad \forall \lambda \in \{-1, 0, +1\})$$

を満たすことを示せばよい. もし  $d \geq n$  ならば,  $p_d(C;T)$  を  $p_n(X;T)$  で割って

$$p_d(C;T) = q(C, X;T) p_n(X;T) + r(C, X;T)$$

$$q(C, X;T), \quad r(C, X;T) \in R[C, X, \frac{1}{X_0}; T],$$

$$\deg_T[r(C, X;T)] < n,$$

とする. このとき

$$(*) \quad S(d; \xi; \lambda)$$

$$\equiv \{(c, x) \in R^{d+1} \times R_0^{n+1}; \text{sign}[r(c, x; \xi(x))] = \lambda\}$$

である. また帰納法の仮定より,  $r(c, x;T) = 0$  の root functions

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_m$$

は  $R^{d+1} \times R_0^{n+1}$  の上の effective functions である. そこで

$$\pi : \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_M, \quad M = m+n-1$$

を effective functions  $\tau_i, \sigma_j$  の1つの「順列型」(permutation type) とすると, この  $\pi$  を実現する  $R^{d+1} \times R_0^{n+1}$  の部分集合

$$E(\pi) \equiv \{(c, x) \in R^{d+1} \times R_0^{n+1} \mid \pi(c, x)\}$$

はひとつの s.a.s. である. そして「順列型」 $\pi$  を動かすことで  $R^{d+1} \times R_0^{n+1}$  の finite s.a.s. partition

$$R^{d+1} \times R_0^{n+1} = \bigcup_{\pi} E(\pi)$$

が得られる. したがって LEMMA 4.1 より  $\xi$  が  $E(\pi)$  上で effective であることを示せばよい.

ここで  $(c, x) \in E(\pi)$  を固定すると,  $\pi(c, x)$  は  $p_n(x; T)$  の1つのグラフである (LEMMA 6.1). したがって各  $i$  ( $0 \leq i \leq M$ ) ただし  $u_0 = -\infty, u_{M+1} = +\infty$ , について  $p_n(x; T) = 0$  の  $k$  番目の根  $\xi(x) = \xi_k(x)$  が

$$u_i(c, x) < \xi(x) < u_{i+1}(c, x),$$

$$\text{or} \quad \xi(x) = u_i(c, x)$$

となる条件は "effective" である (LEMMA 6.4). したがって  $R^{d+1} \times R_0^{n+1}$  の s.a.s.

$$A_i(\pi) \equiv \{(c, x) \in E(\pi) \mid u_i(c, x) < \xi(x) < u_{i+1}(c, x)\}$$

$$B_i(\pi) \equiv \{(c, x) \in E(\pi) \mid \xi(x) = u_i(c, x)\}$$

による s.a.s.  $E(\pi)$  の partition

$$E(\pi) = \bigcup_{i=0}^M \{A_i(\pi) \cup B_i(\pi)\}$$

が得られる. 一方関数

$$\text{sign}[\tau(c, x; \xi(x))], \quad (c, x) \in R^{d+1} \times R_0^{n+1}$$

はそれぞれの parts  $A_i(\pi), B_i(\pi)$  の上で "constant" であるから, 集合

(\*)  $S(d; \xi; \lambda)$  は  $A_i(\pi)$ ,  $B_i(\pi)$  の有限和で表わせる. すなわち  $S(d; \xi; \lambda) \in \text{SA}(R^{d+1} \times R_0^{n+1})$  となる (!).  $\square$

COROLLARY 8.1. ([B], Prop. A.6, p. 272) 写像  $\theta : D \longrightarrow R^m$  について次は同値である:

(A)  $\theta$  は effective.

(B)  $\theta$  のグラフ  $\Gamma(\theta) \subset D \times R^m$  は semi-algebraic.

Proof (A) $\Rightarrow$ (B):  $R^m \times R^m$  の対角線集合  $\Delta \equiv \{(y, y) \mid y \in R^m\}$  に対して

$$(\theta \times 1_m)^{-1}(\Delta) = \{(x, y) \in D \times R^m \mid y = \theta(x)\} = \Gamma(\theta)$$

である. したがって  $\theta$  が effective であれば,  $\Delta \in \text{SA}(R^m \times R^m)$  であるから  $\Gamma(\theta) \in \text{SA}(D \times R^m)$ .  $\square$

(B) $\Rightarrow$ (A):  $\Gamma(\theta) \in \text{SA}(R^m \times R^l)$  と仮定する. このとき  $S \in \text{SA}(R^n \times R^l)$  に対して

$$(\Gamma(\theta) \times R^l) \cap (R^n \times S) \in \text{SA}(R^n \times R^m \times R^l)$$

である. そして射影  $\pi : R^n \times R^m \times R^l \longrightarrow R^n \times R^l$ ,  $\pi(x, y, z) = (x, z)$  を考えると

$$(\theta \times 1_m)^{-1}(S) = \pi[(\Gamma(\theta) \times R^l) \cap (R^n \times S)]$$

となる. したがって「Tarski の定理」(THEOREM 1.A) より

$$(\theta \times 1_m)^{-1}(S) \in \text{SA}(R^n \times R^l)$$

となり  $\theta$  は effective.  $\square$