

On Modules for the Linear Fractional Groups

J. L. Alperin

筑波大・理 宮本 泉(訳)

有限群の表現論には、二つの主要な問題があります。一つは、Lie 型の群の表現を研究することであり、もう一つは、block theory の結果を拡張することです。前者の問題では、主な仕事は既約表現の決定にあります。しかし、そのためには、自然に起ってくる homological type の疑問や問題のために、他の表現の研究も必要ですし、また、これから明らかにされねばならない構造もあると思います。次の問題では、次の段階は、abelian defect group をもつ block に対して、cyclic の場合の結果を拡張することでしょう。しかし、それにはどうしても新しい idea が必要です。今までの方法では、うまくいきません。

以上のことから、実例についてよく研究することは、良い考えだと思います。Lie 型の群を考えるのと同時に、abelian Sylow p -subgroup のことも考え合わせてすぐ思いつくのが

$SL(2, p^n)$ です。経験から、 $p=2$ の場合が比較的容易なので、ここでは、 $SL(2, 2^n)$ の表現を研究しようと思います。

Part I. $G: SL(2, 2^n)$, F : 標数2の代数的閉体、に対する FG -module の考察。

- 1) Irreducible modules
- 2) Projective modules
- 3) Irreducibly generated modules

Part II. Conjectures. (Part I の考察から得られる、abelian defect group をもつ block についての予想)

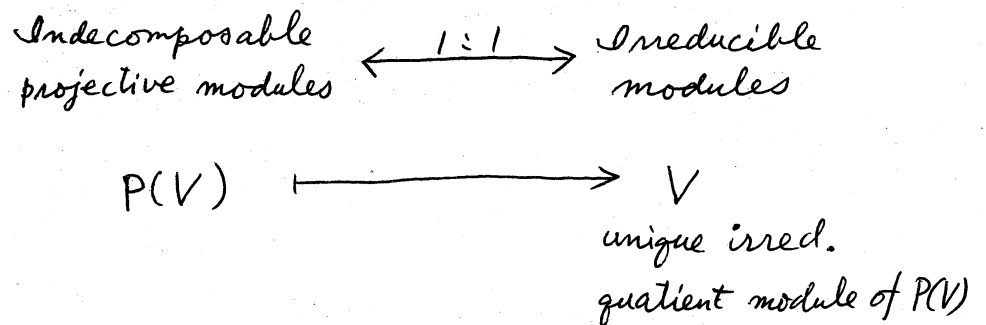
Part I. 1) Irreducible modules.

始めに、irred. FG -module の作り方を思い出しましょう。 V_1 を $G=SL(2, 2^n)$ が自然に作用する F 上 2次元のベクトル空間とします。各元を2乗するのは、体 F の Frobenius automorphism ですから、これを V_1 に適用すると、もう一つの irred. module V_2 が得られます。この V_2 は、 V_1 に "algebraically conjugate" で、この様にして、 $V_3, V_4, \dots, V_n$ ($V_{n+1} = V_1$) と、それぞれ相異なる irred. FG -module が作れ

ます。さらに、 $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq N$ のとき、 $V_I = V_{i_1} \otimes \dots \otimes V_{i_k}$ で定義し、特に $V_\emptyset = F$ とおきます。これで、各 $I \subseteq N$ に対して、 $2^{|I|}$ 次元の irred. FG-module V_I が得られ、これらの 2^n 個の irred. FG-module は互に非同型であり、同型を除いて、これらが G の irred. modules のすべてです。(Steinberg の定理の一例)

2) Projective modules

有限群では、次の 1 対 1 対応があります。



このとき、 V_I に対応する proj. module (これを V_I の projective cover とよびます) を、 P_I と書くと、次の定理が得られます。

定理 1 (tensor products) I を N の空でない真部分集合とすると、

$$P_I \cong V_{N-I} \otimes V_N$$

他の場合は、

$$P_\phi \oplus P_N \cong V_N \otimes V_N$$

もちろん、 $P_N = V_N$ (次元 2^n の Steinberg module, irred. かつ proj. です) ですが、見やすいように、上の様に書きます。次に P_I の submodule について考えます。はじめに、composition factor について。

定理2 (Cartan Matrix) P_I の composition factor に現われる、 V_J の重複度は、

$$2^{n - |I \cup J|} \quad (i \in N \text{ に対して、} i \in I \cap J \text{ かつ } i+1 \notin I \cap J \text{ ならば、} i+1 \notin I \cup J \text{ とするとき})$$

$$0 \quad (\text{他の場合}).$$

(この定理は $SL(2, p^n)$ では成立しない。)

K_I を、 P_I から V_I への準同型の kernel とすると、 K_I は、最大の完全可約商 module をもち、 V_J は、その直和因子として、 $\text{Ext}_{FG}(V_I, V_J)$ の F 上の次元と等しい重複度で含まれています。この次元は、次の定理より得られます。

定理3. $I, J \leq N$ とすると、

$$\text{Ext}_{Fq}(V_I, V_J) = 0$$

ただし、次の場合を除く。

a) $|I \cap J| + 1 = |I \cup J| < n$ 、かつ、

b) $i \in I \cup J$ かつ、 $i \notin I \cap J$ ならば、 $i-1 \notin I \cup J$ 。

このときは

$$\text{Ext}_{Fq}(V_I, V_J) = F$$

3) Irreducibly generated modules.

Irred. gen. module を、次の通りに定義します。 $I, J \subseteq N$, $I \subseteq J$ のとき、 $V_{I,J} = V_I \otimes V_J$ 。ただし、 $I = J = N$ のときは、 $V_{N,N} = P_\phi$ 。従って、 $V_N \otimes V_N \cong V_{N,N} \oplus V_N$ 。特に、 $I = \phi$ ならば、 $V_{\phi,J} = V_J$ 、 $J = N$ ならば $V_{I,J} = P_{N-J}$ となります。

主定理

a) 3^n 個の $V_{I,J}$ は、indecomp. かつ、互に非同型。

b) 各 $V_{I,J}$ は、唯一の irred. quotient module と、唯一の irred. submodule をもつ。

c) これら irreducibly generated modules の任意の 2 個の tensor 積は、また irred. gen. modules の直和に

同型となる。

d) $V_{I,J}$ の同型類によって張られる Green ring の subring は、半単純となる。

(注) Green ring: indecomp. FG-module の同型類からなる $\mathbb{Z}$ 上の basis をもつ。積は次の様に定義する。 U, V を indecomp. FG-module、 $[U], [V]$ を対応する Green ring の元とする。このとき、

$$[U] \cdot [V] = [U_1] + \cdots + [U_r]$$

ただし、 $U_1, \dots, U_r$ は indecomp. FG-module、かつ $U \otimes V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ を満たすとする。従って、定理は、 $[U_{I,J}]$ が Green ring の半単純な subring を張ることを主張している。

証明の概略。 $V_{N,N}$ を除き、 $V_{I,J} = V_1^{e_1} \cdots V_n^{e_n}$ (tensor 積)、ただし、

$$e_i = \begin{cases} 0 & i \notin J \\ 1 & i \in J, i \notin I \\ 2 & i \in I \end{cases}$$

これによって、 3^n 個の $V_{I,J}$ が得られます。a), b) の残りの部分は簡単です。c) は次の key remark によります。

Lemma $V_i \otimes V_i \otimes V_i \cong V_i \oplus V_i \oplus V_{4i, i+1}$

次に、問題の Green ring の subring は、 $x_i = [V_i], i \in \mathbb{N}$, で生成され、基本関係は、 $x_i^3 = 2x_i + x_i x_{i+1}, i \in \mathbb{N}$, で得られます。この subring の半単純性は、この ring から複素数体への、“十分”な準同型写像を見つけることにより証明されます。

結論: V_i を irred FG-module とする。 V_i の tensor power の直和因子として現われる indec. module の同型類は、有限個しかない。

この結論は、 G の Sylow 2-subgroup が abel 群であったことに起因すると思われます。 G を Lie 型の群と仮定しましたが、例えば、 $GL(3, 2)$ の普通の 3次元 module は上の様な性質をもちません。

Part II.

上に得られた結論より、ここで私が強調したい構造に到達します。一般に、 G を有限群とし、 F を体とします。

定義: FG-module U が algebraic とは、Part I の「結論」を満足すること。

Lemma. 次の a), b) は同値

- a) FG-module U は algebraic.
- b) U に対応する Green ring の元 u が algebraic, つまり、 $\exists p \in \mathbb{Z}[X], p \neq 0$ s.t. $p(u) = 0$.

証明。略。(routine work)

algebraic な FG-module を、 G の subgroup に制限したものは algebraic となることは明らかです。関連して、次の事実は大変便利です。

Lemma $G \supseteq H$ subgroup, W : algebraic FH -module とすると、誘導表現 W^G は algebraic FG -module となる。

証明は定義に従い、Mackey の定理を使い、 H の order に関する induction を行います。簡単ですが、十分注意を払う必要があります。

Conjecture (First Form) G : 有限群。 F : 標数 p の体。 G の Sylow p -subgroup が abelian ならば、すべての irred. FG -module は algebraic。

Conjecture (Second Form) G, F : 上に同じ。
 B を abelian defect group をもつ G の p -block とすると、 B に属する任意の irred. FG -module は algebraic。

これらの予想に対する例としては、 $G = SL(2, 2^n)$ のときは、以上で述べた通りです。 B が cyclic defect group をもつときは、明らかに成立します。 G が solvable の場合にも、今やっている所で注意深い確かめが必要ですが、やはり予想は正しいようです。ほかに幾つかの場合について、調べてみましたが、すべて成立するようです。(fours group を Sylow 2-subgroup にもつ群の principal 2-block, A_7 の non-principal 2-block, A_6 の principal 3-block など)

予想の一般的な証明は、まったく手の届かない所にあるように見えます。しかし、多分この話を機会に、だれか、この状況を解決してくれるか、さもなくば、多分どこか他に類似した現象を探す人が現われるでしょう。そうしてこそ、この

話が価値あるものとなりましょう。

終りに、irreducibly generated indecomposable module について。次の様に、一般的に定義します。

定義: irreducible modules の tensor 積に現われる、indecomposable な直和因子。

Question: Green ring の中で、これらの張る部分環は半単純か? その次元は?

例: $G = GL(3, 2)$ $|G| = 168$, $p = 2$ 。

$\mathcal{R} = \text{ired. gen. indecomp. modules の張る環}$
 $\cup$

$\mathcal{P} = \text{projective modules の張る環}$

このとき、 $\mathcal{R}/\mathcal{P} \cong \mathbb{Z}[\tau, \tau^{-1}]$ 。